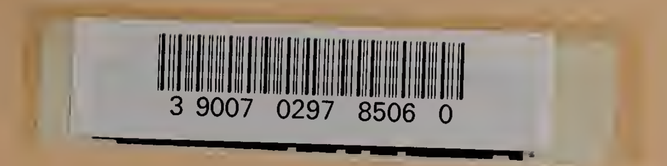



TENTANDA VIA
THE LIBRARY OF
YORK
UNIVERSITY


3 9007 0297 8506 0

HN 5097

ŒUVRES

DE

G. HUMBERT

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE

Pierre HUMBERT
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier

ET DE

Gaston JULIA
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

TOME II



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1936

ŒUVRES

DE

GEORGES HUMBERT

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
90777 Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

DE

G. HUMBERT

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE

Pierre HUMBERT
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier

ET DE

Gaston JULIA
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

TOME II



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1936

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

ŒUVRES

DE

GEORGES HUMBERT

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SURFACES HYPERELLIPTIQUES [1]

(*Journal de Math.*, 4e série, t. IX, 1893.)

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS.

Introduction.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des surfaces remarquables, introduites dans la Science par M. Picard, et pour lesquelles les coordonnées non homogènes d'un point quelconque peuvent s'exprimer en fonction uniforme, quadruplement périodique, de deux paramètres.

Pour abréger le discours, nous désignerons ces surfaces sous le nom de *surfaces hyperelliptiques*, qui rappelle leur propriété fondamentale.

Les travaux de M. Poincaré sur les zéros communs à plusieurs fonctions abéliennes thêta sont, avec ceux de M. Picard sur les surfaces qui nous occupent, la base de nos recherches.

Notre Mémoire, après un Chapitre consacré à des généralités, est

---

(1) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Bordin, 1892).

divisé en deux sections principales : la première est relative à la surface de Kummer; la seconde aux surfaces hyperelliptiques en général.

La surface de Kummer a déjà été l'objet de travaux nombreux et importants, en Allemagne surtout. Nous n'avons pas prétendu en faire une étude complète, en réunissant et en reliant les résultats obtenus par nos devanciers; nous nous sommes borné à lui appliquer les méthodes dont nous faisons usage dans la suite pour les surfaces hyperelliptiques générales : c'est ainsi que nous avons laissé systématiquement de côté les questions qui se rapportent à la surface de Kummer considérée comme surface des singularités de complexes du second ordre, ou comme surface focale de congruences rectilignes. De même, bien que nos méthodes fussent facilement applicables à ce problème, nous n'avons pas parlé des quinze transformations linéaires de la surface en elle-même.

Ce que nous avons eu surtout en vue, c'est l'étude des courbes tracées sur la surface de Kummer et celle des propriétés des surfaces qui passent par ces courbes.

Nous commençons par établir la relation qui existe entre les fonctions thêta et des courbes tracées sur la surface de Kummer, et nous démontrons, à ce point de vue, un théorème fondamental (n° 16), qui domine toute la théorie; on en déduit, en particulier, que toutes les courbes tracées sur la surface sont d'ordre pair et que, le long de chacune d'elles, on peut inscrire à la surface de Kummer une surface algébrique ne coupant pas la surface proposée en dehors de la courbe considérée.

Avant de pousser plus loin cette étude, nous donnons un nouvel algorithme, qui nous paraît simple et utile, pour représenter les seize points et les seize plans singuliers; nous en faisons ensuite quelques applications, soit à des problèmes déjà résolus, soit à des problèmes nouveaux, sur certains groupements remarquables des seize coniques de la surface.

Viennent ensuite la classification et la détermination des courbes d'un degré donné qu'on peut tracer sur la surface de Kummer; nous parvenons, sur ce sujet, à des propositions nouvelles remarquablement simples et qui reposent sur ce théorème :

Une courbe quelconque devient l'intersection complète *de la surface*

avec une surface algébrique si on lui adjoint 0, 1, 2, 3 *ou* 4 *coniques de la surface de Kummer.*

Ces principes posés, nous étudions avec détails les courbes de degrés 4, 6, 8 et les surfaces inscrites le long de ces courbes, dont les degrés sont 2, 3, 4.

MM. Darboux et Rohn ont établi que la surface de Kummer admet trente séries de quadriques inscrites; nous complétons leurs recherches en étudiant les relations qui existent entre une de ces séries et les vingt-neuf autres; pour les surfaces inscrites d'ordre trois ou quatre, nous donnons une théorie très complète qui conduit à des résultats géométriques simples.

Les Chapitres suivants se rapportent à l'étude des sections de la surface par ses plans tangents; c'est pour nous l'occasion de faire connaître et d'appliquer les formules analytiques importantes, dont plusieurs appartiennent à M. Klein et sont établies ici par une voie nouvelle.

Après un Chapitre consacré aux relations qui lient la surface de Kummer à sa réciproque, nous passons à l'examen du *genre* des courbes tracées sur la surface et à celui des propriétés qui se rattachent à la notion de genre; pour terminer nous étudions des courbes remarquables que nous appelons *univoques*, et qui possèdent d'importantes propriétés géométriques.

La surface de Kummer occupe, parmi les surfaces hyperelliptiques, une place particulière, non seulement parce qu'elle est la plus simple, mais surtout parce que, à un de ses points, correspondent *deux* couples d'arguments hyperelliptiques. Les surfaces les plus générales ne possèdent évidemment pas cette propriété : aussi leurs caractères fondamentaux sont-ils différents de ceux de la surface de Kummer.

Cinq Chapitres sont consacrés à l'étude de ces surfaces et des courbes qu'on peut tracer sur elles; le plus important est celui où se trouve établie la liaison entre les fonctions hyperelliptiques et les surfaces adjointes à une surface donnée.

Grâce à cette liaison, qui est la généralisation directe de notre théorème *fondamental* pour la surface de Kummer, nous donnons un certain nombre de résultats géométriques se rapportant au nombre des surfaces adjointes, aux surfaces adjointes de contact, aux sections planes, etc.

Les deux derniers Chapitres de cette Section font connaître quelques

familles de surfaces et quelques surfaces hyperelliptiques remarquables; nous signalerons, en particulier, une intéressante surface d'ordre huit.

La dernière Partie du Mémoire, fort courte, se rapporte aux surfaces hyperelliptiques telles qu'à chacun de leurs points correspondent deux couples d'arguments : ces surfaces sont représentables point par point sur la surface de Kummer.

Nous donnons un procédé simple pour trouver celles d'entre elles qui sont du quatrième ordre, et à titre d'exemple, nous étudions le lieu des sommets des cônes du second ordre passant par six points, surface remarquable, déjà examinée par plusieurs auteurs et dont M. Darboux, le premier, a signalé la liaison avec la surface de Kummer.

Généralités.

1. Nous appellerons *surface hyperelliptique* toute surface telle que les coordonnées x, y, z d'un de ses points puissent s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres ayant quatre paires de périodes.

M. Appell a établi [1], ce qu'on déduit d'ailleurs d'un théorème célèbre de MM. Poincaré et Picard, qu'on peut mettre x, y, z sous la forme

$$x = \frac{\theta_1(u, v)}{\theta_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\theta_2(u, v)}{\theta_0(u, v)}, \qquad z = \frac{\theta_3(u, v)}{\theta_0(u, v)},$$

les fonctions θ_h étant uniformes, et vérifiant les relations

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} &\theta_h(u + 2\pi i, v) = \theta_h(u, v + 2\pi i) = \theta_h(u, v) \\ &\theta_h(u + a, v + b) = e^{-mu+\alpha}\,\theta_h(u, v) \\ &\theta_h(u + b, v + c) = e^{-mv+\beta}\,\theta_h(u, v) \end{aligned}\right\} \quad (h = 0, 1, 2, 3).$$

Dans ces formules, a, b, c, α, β sont des constantes et *m désigne un entier*. Les quatre paires de périodes de x, y, z sont

$$2\pi i, 0; \quad 0, 2\pi i; \quad a, b; \quad b, c.$$

De plus, la partie réelle de $ac - b^2$ doit être positive, pour la conver-

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 4e série, t. VII, p. 211.

gence des séries obtenues en développant $\theta_h(u, v)$ suivant les puissances de e^u et e^v; quant à l'entier m, il est positif ou négatif selon que la partie réelle de a est négative ou positive.

Dans tout ce qui suit nous supposerons, pour fixer les idées, que la partie réelle de a est négative, et par suite que m est positif.

Nous appellerons *fonctions thêta d'ordre m* les fonctions qui vérifient des relations de la forme (1); nous dirons que deux fonctions thêta de même ordre ont *mêmes multiplicateurs* si α et β sont les mêmes, dans les relations (1), pour ces deux fonctions.

2. On peut préciser davantage la forme des fonctions thêta qui figurent dans l'expression de x, y, z. Soient en effet λ et μ des constantes, posons

$$\theta_h(u+\lambda, v+\mu) = \Theta_h(u, v),$$

on aura

$$\begin{aligned}
\Theta_h(u+2\pi i, v) &= \Theta(u, v+2\pi i) = \Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+a, v+b) &= e^{-mu+\alpha-m\lambda}\,\Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+b, v+c) &= e^{-mv+\beta-m\mu}\,\Theta_h(u, v).
\end{aligned}$$

on pourra toujours déterminer λ et μ de manière à vérifier les conditions

$$\alpha - m\lambda = -\frac{1}{2}ma, \qquad \beta - m\mu = -\frac{1}{2}mc$$

et l'on aura finalement

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Theta_h(u+2\pi i, v) &= \Theta_h(u, v+2\pi i) = \Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+a, v+b) &= e^{-mu-\frac{ma}{2}}\,\Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+b, v+c) &= e^{-mv-\frac{mc}{2}}\,\Theta_h(u, v).
\end{aligned}\right.$$

Nous dirons que les fonctions $\Theta(u, v)$, qui satisfont à des relations de cette forme, sont des fonctions thêta, d'ordre m, *normales, à caractéristique nulle*.

Plus généralement, si une fonction $\Theta(u, v)$ satisfait aux relations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Theta(u+2\pi i, v) &= e^{\omega\pi i}\,\Theta(u, v),\\
\Theta(u, v+2\pi i) &= e^{\omega'\pi i}\,\Theta(u, v),\\
\Theta(u+a, v+b) &= e^{\theta\pi i}\,e^{-mu-\frac{ma}{2}}\,\Theta(u, v),\\
\Theta(u+b, v+c) &= e^{\theta'\pi i}\,e^{-mv-\frac{mc}{2}}\,\Theta(u, v),
\end{aligned}\right.$$

où ω, ω', Θ, Θ' sont des nombres égaux à o où à 1, nous dirons que cette fonction est une fonction Θ (ou thêta) d'ordre m, *normale et que sa caractéristique est* $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

Les fonctions de caractéristique nulle sont celles pour lesquelles ω, ω', θ, θ' sont tous nuls.

Il y a seize valeurs pour la caractéristique; il y a donc seize systèmes de fonctions Θ normales.

3. Avant de commencer l'étude des surfaces hyperelliptiques, nous ferons connaître quelques propriétés des fonctions Θ normales, sur lesquelles nous aurons souvent à nous appuyer.

Une fonction Θ développée, par la formule de Fourier, en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de e^u et e^v, est de la forme

$$\Theta(u, v) = \sum_\nu \sum_\varpi A_{\nu\varpi} e^{\nu u + \varpi v},$$

la double sommation s'étendant aux valeurs entières de ν et ϖ, de $-\infty$ à $+\infty$ et les coefficients $A_{\nu\varpi}$ étant indépendants de u et v. En écrivant que cette fonction satisfait aux relations (3), on trouve, par un calcul facile et bien connu, qu'elle est fonction linéaire et homogène, à coefficients constants quelconques, des m^2 fonctions $\Theta_{p.q}(u, v)$ ainsi définies

$$\Theta_{p.q}(u, v) = \sum_\rho \sum_\sigma e^{\left(p+\frac{\omega}{2}+m\rho\right)u + \left(q+\frac{\omega}{2}+m\sigma\right)v} e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')} e^{\frac{1}{2m}\varphi\left(p+\frac{\omega}{2}+m\rho,\, q+\frac{\omega'}{2}+m\sigma\right)}.$$

Dans le second membre, la double sommation s'étend aux valeurs entières de ρ et σ, de $-\infty$ à $+\infty$; p et q désignent deux entiers quelconques de la série o, 1, ..., $m-1$; $\varphi(x, y)$ est la fonction

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

En donnant à p et q tous les systèmes de valeurs dont ils sont susceptibles, on trouve bien m^2 fonctions $\Theta_{p.q}$: toute fonction thêta normale, d'ordre m, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ pourra s'exprimer en fonction linéaire et homogène de ces m^2 fonctions.

4. Il est intéressant, pour ce qui suit, de chercher ce que deviennent

les fonctions $\Theta_{p,q}$ quand on y change simultanément les signes de u et de v.

Examinons d'abord, à part, le cas où la caractéristique est nulle : $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

La formule qui donne $\Theta_{p,q}(u, v)$ montre tout d'abord que, si l'on change u et v en $-u$, $-v$, on obtient le même résultat qu'en laissant u et v inaltérés et en changeant simultanément les signes de p, q, ρ, σ: comme ρ et σ varient de $-\infty$ à $+\infty$, on n'altère pas $\Theta_{p,q}$ en changeant ρ en $-\rho$ et σ en $-\sigma$; par suite, on a

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{-p,-q}(u, v).$$

D'ailleurs il est clair que $\Theta_{p,q}$ ne change pas si l'on augmente p ou q de multiples de m; donc

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{m-p,m-q}(u, v).$$

Si m est impair, les deux fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ et $\Theta_{m-p,m-q}(u, v)$ seront toujours distinctes, hors le cas où p et q sont nuls à la fois : il résulte de cette remarque et de la relation précédente :

1° Que la fonction $\Theta_{00}(u, v)$ et les $\frac{1}{2}(m^2-1)$ fonctions

$$\Theta_{p,q}(u, v) + \Theta_{m-p,m-q}(u, v)$$

sont *paires*, c'est-à-dire ne changent pas si l'on remplace u et v par $-u$, $-v$;

2° Que les $\frac{1}{2}(m^2-1)$ fonctions

$$\Theta_{p,q}(u, v) - \Theta_{m-h,m-q}(u, v)$$

sont *impaires*.

Si m est pair, les deux fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ et $\Theta_{m-p,m-q}(u, v)$ coïncideront pour les quatre systèmes de valeurs

$$p = 0, \quad q = 0; \quad p = 0, \quad q = \frac{m}{2};$$

$$p = \frac{m}{2}, \quad q = 0; \quad p = \frac{m}{2}, \quad q = \frac{m}{2},$$

et, par suite, les quatre fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ correspondantes sont paires.

Les m^2-4 autres fonctions $\Theta_{p,q}$, groupées deux à deux comme plus haut, donnent $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions impaires.

Ainsi :

Si m est pair, les fonctions thêta d'ordre m, de caractéristique nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2+4}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions impaires.

Si m est impair, elles s'expriment en fonction de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires.

En particulier : *les fonctions d'ordre deux, de caractéristique nulle, sont toutes paires.*

5. Considérons maintenant le cas des fonctions normales de caractéristique quelconque, non nulle, $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

Si dans $\Theta_{p,q}(u, v)$ on change u et v en $-u$, $-v$, on voit aisément que cela revient à laisser u et v inaltérés et à changer p et q en $-p-\omega$ et $-q-\omega'$; d'ailleurs changer p en $p+m$ revient à changer ρ en $\rho+1$, et, par suite, à multiplier $\Theta_{p,q}$ par $e^{\pi i\theta}$; de même, changer q en $q+m$ revient à multiplier la fonction par $e^{\pi i\theta'}$: donc on a, en désignant par ε, ε' deux quantités égales à o ou à 1, à volonté,

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{\varepsilon m-p-\omega,\ \varepsilon' m-p-\omega'}(u, v)\, e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta')}.$$

Il résulte de cette relation que :

1° Si m est pair et si ω, ω' ne sont pas nuls à la fois, les indices p et q ne peuvent jamais devenir respectivement égaux à $\varepsilon m-p-\omega$ et $\varepsilon' m-p-\omega'$, quels que soient ε et ε'; en ce cas, aucune des fonctions $\Theta_{p,q}$ n'est paire ou impaire, et la formule précédente montre qu'en associant deux à deux ces fonctions, on obtient $\frac{m^2}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^2}{2}$ fonctions impaires.

2° m étant toujours pair, et ω, ω' étant nuls tous deux, les quatre fonctions Θ_{00}, $\Theta_{\frac{m}{2},0}$, $\Theta_{0,\frac{m}{2}}$, $\Theta_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}}$ sont paires ou impaires. La première est

toujours paire; la deuxième, la troisième et la quatrième sont respectivement paires ou impaires, selon que les nombres θ, θ', $\theta+\theta'$ sont pairs ou impairs : comme θ et θ' ne sont pas nuls à la fois, la caractéristique étant supposée non nulle, deux des quatre fonctions précédentes seront paires, les deux autres seront impaires; les m^2-4 autres fonctions $\Theta_{p,q}$, combinées deux à deux comme plus haut, donnent $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions paires et autant de fonctions impaires.

3° Si m est impair, on pourra satisfaire aux relations

$$p=\varepsilon m-p-\omega; \qquad p=\varepsilon' m-q-\omega',$$

d'une seule manière, en posant

$$p=\frac{\omega(m-1)}{2}, \qquad \varepsilon=\omega',$$
$$q=\frac{\omega'(m-1)}{2}, \qquad \varepsilon'=\omega.$$

Il y aura, pour ces valeurs de p et q, une fonction $\Theta_{p,q}$ qui sera paire ou impaire, selon que $\omega\theta+\omega'\theta'$ sera pair ou impair. Les autres fonctions $\Theta_{p,q}$, combinées deux à deux, donnent $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et autant de fonctions impaires.

En résumé :

Si m est pair, les fonctions Θ normales, d'ordre m, de caractéristique donnée $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, *non nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2}{2}$ fonctions impaires.*

Si m est impair, elles s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires, ou de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions impaires, selon que $\omega\theta+\omega'\theta'$ est pair ou impair.

6. En particulier, si m est égal à 1, il résulte, des considérations précédentes, qu'il y a une seule fonction Θ normale, d'ordre 1, ayant une caractéristique donnée; parmi les seize fonctions d'ordre 1 ainsi définies, dix sont paires et six impaires. Les fonctions paires sont

celles pour lesquelles $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair; pour les fonctions impaires, $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair.

Nous emploierons, pour représenter les fonctions normales du premier ordre, qui sont les seize fonctions hyperelliptiques bien connues, le caractère $\mathfrak{S}$.

7. Pour compléter ces résultats, nous allons montrer que les fonctions Θ normales paires ou impaires s'annulent pour certaines valeurs remarquables de u et de v.

Considérons un couple de périodes simultanées de u et de v,

$$\alpha = 2h\pi i + \lambda a + \mu b,$$
$$\beta = 2k\pi i + \lambda b + \mu c,$$

h, k, λ, μ étant des entiers.

On a, en désignant par $\Theta(u, v)$ une fonction normale, d'ordre m, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$,

$$\Theta(u + \alpha, v + \beta)$$
$$= \Theta(u, v)\, e^{\pi i(h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta') - m\lambda u - m\mu v - m\lambda\frac{a}{2} - m\mu\frac{c}{2} - m\lambda\mu b - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}ma - \frac{\mu(\mu-1)}{2}mc}.$$

Faisons dans cette relation $u = -\frac{\alpha}{2}$, $v = -\frac{\beta}{2}$; il vient

$$(4)\qquad \Theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \Theta\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) e^{m\pi i(\lambda h + \mu k) + \pi i(h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta')}.$$

Cette relation montre, si $\Theta(u, v)$ est pair, que $\Theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ sera nul quand la quantité $m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$ sera impaire; et, si $\Theta(u, v)$ est impair, que $\Theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ sera nul quand la même quantité sera paire.

Il en résulte tout d'abord que, parmi les fonctions Θ normales, d'ordre et de caractéristique donnés, toutes celles qui sont paires, ou bien toutes celles qui sont impaires, s'annulent pour *une demi-période donnée* $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$; en second lieu, la parité ou l'imparité du nombre

$$(5)\qquad m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$$

ne pouvant dépendre, quand ω, ω', θ, θ', h, k, λ, μ sont donnés, que de la parité ou de l'imparité de m, on voit que si une fonction Θ, normale,

paire (ou impaire), d'ordre m, s'annule pour une demi-période, toutes les fonctions paires (ou impaires) de même caractéristique, et dont l'ordre est de même parité que m, s'annuleront pour la même demi-période.

Il suffit donc d'étudier successivement le cas de m pair, et celui de m impair. Or on voit sans difficulté, à l'aide de la formule (4), que :

Si l'ordre m est pair :

1° *Les fonctions normales, paires, de caractéristique nulle, ne s'annulent simultanément pour aucune demi-période ;*

2° *Les fonctions normales, impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les seize demi-périodes ;*

3° *Les fonctions normales paires, de même caractéristique non nulle, s'annulent pour huit demi-périodes, et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les huit autres demi-périodes.*

Si l'ordre m est impair :

Les fonctions normales, paires, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, *s'annulent pour six ou dix demi-périodes, et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les dix ou six autres demi-périodes, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair ou impair.*

Dans ce dernier cas (m impair), la quantité

$$m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$$

a la même parité que la quantité

$$\lambda h + \mu k + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta',$$

qui peut s'écrire

$$(h+\theta)(\lambda+\omega) + (k+\theta')(\lambda+\omega') - \omega\theta - \omega'\theta'.$$

En particulier, pour $m = 1$, la fonction $\mathfrak{S}(u, v)$, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ s'annulera pour la demi-période

$$h\pi i + \lambda\frac{a}{2} + \mu\frac{b}{2}, \qquad k\pi i + \lambda\frac{b}{2} + \mu\frac{c}{2},$$

si l'on a

$$(6) \qquad (h+\theta)(\lambda+\omega) + (k+\theta')(\mu+\omega') \equiv 1 \pmod 2$$

et l'on en déduit qu'une fonction $\mathfrak{S}$ s'annule pour six demi-périodes.

On vérifie, inversement, qu'une même demi-période annule six fonctions $\mathfrak{S}$.

8. Établissons enfin une proposition générale applicable à toutes les surfaces hyperelliptiques.

D'après le n° 2, les coordonnées homogènes des points d'une surface hyperelliptique S, peuvent se mettre sous la forme

$$\rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité et les Θ_i des fonctions thêta normales de même ordre, de caractéristique nulle.

Proposons-nous de chercher la forme de l'équation qui lie u et v le long d'une courbe algébrique quelconque tracée sur S, c'est-à-dire *l'équation hyperelliptique* de cette courbe.

Soit C une courbe algébrique indécomposable sur S; nous pouvons évidemment mener par cette courbe deux surfaces algébriques de même degré, S_1 et S_2, telles que les trois surfaces S, S_1, S_2 n'aient pas d'autre courbe commune que la courbe C; S_1 et S_2 peuvent être, par exemple, les cônes qui projettent C à partir de deux points quelconques de l'espace.

Dans les premiers membres des équations de S_1 et S_2, remplaçons x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u, v)$, ..., $\Theta_4(u, v)$, et désignons par $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ les résultats de ces substitutions.

La fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ sera une fonction uniforme, quadruplement périodique de u et v; d'après un théorème connu de M. Poincaré [1], elle pourra se mettre sous la forme $\frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)}$, les fonctions $\varphi_1(u, v)$ et $\varphi_2(u, v)$ étant uniformes, entières, et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ est indéterminée.

Les arguments u, v d'un point de la courbe C annulent $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$, d'après la définition même des deux fonctions; mais, en général, le point u, v n'est pas un point d'indétermination de la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$. En effet, si $u + du$, $v + dv$ est un point infiniment voisin

[1] *Acta mathematica*, t. II.

du point (u, v), sur la courbe C, on a

$$du\frac{\partial f_1}{\partial u} + dv\frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,$$

$$du\frac{\partial f_2}{\partial u} + dv\frac{\partial f_2}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre qu'au point (u, v) le déterminant

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial u}$$

s'annule, et, par conséquent, qu'en ce point la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ n'est pas indéterminée.

Il en résulte que les deux fonctions $\varphi_1(u, v)$ et $\varphi_2(u, v)$ ne s'annulent pas en tous les points de la courbe C.

Or, d'après un théorème de M. Appell ([1]), l'identité

$$\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)} = \frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)}$$

entraîne, lorsque φ_1 et φ_2 ne s'annulent simultanément qu'aux points où le premier membre est indéterminé, la relation

$$\frac{f_1(u, v)}{\varphi_1(u, v)} = \frac{f_2(u, v)}{\varphi_2(u, v)} = G(u, v),$$

$G(u, v)$ étant une *fonction entière et uniforme de* u, v.

Les points où $G(u, v)$ s'annule sont les points (de la surface S) où $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ s'annulent simultanément, c'est-à-dire les points de la courbe C; on peut donc dire que $G(u, v) = 0$ est l'équation de cette courbe.

Mais à chaque point de S correspondent une infinité de couples d'arguments u, v différant entre eux de multiples des périodes; il faut donc que la fonction $G(u, v)$, quand on augmente u et v de périodes simultanées, se reproduise, à un facteur près. Ce facteur, devant évidemment être entier ainsi que son inverse, sera de la forme $e^{g(u,v)}$, où $g(u, v)$ est une fonction entière.

Or, M. Appell a montré ([2]) qu'une fonction $G(u, v)$, jouissant de ces

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 183.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 196.

propriétés, est égale au produit d'une exponentielle $e^{\lambda(u,v)}$, où $\lambda(u, v)$ est une fonction entière, et d'une fonction entière $\Phi(u, v)$, vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
\Phi(u+2\pi i, v) &= \Phi(u, v),\\
\Phi(u, v+2\pi i) &= e^{nu}\,\Phi(u, v),\\
\Phi(u+a, v+b) &= e^{lu+pv+\frac{na}{2\pi i}v+\alpha}\,\Phi(u, v),\\
\Phi(u+b, v+c) &= e^{l'u+p'v+\frac{nc}{2\pi i}v+\beta}\,\Phi(u, v).
\end{aligned}$$

où α et β sont des constantes, n, l, p, l', p' des entiers.

Ces conditions entraînent la relation

$$lb+pc+\frac{nac}{2\pi i}=l'a+p'b+\frac{nb^2}{2\pi i}+2N\pi i,$$

N étant entier.

Mais, si *nous supposons que les quantités* $2\pi i$, a, b, c, $\frac{b^2-ac}{2\pi i}$ *ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers*, il faut que la relation précédente soit une identité, c'est-à-dire qu'on ait

$$n=p=l'=0, \qquad l=p'.$$

La fonction $\Phi(u, v)$ est donc *une fonction thêta* d'ordre $-l$, aux périodes $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$; a, b; b, c et l'équation de la courbe considérée peut s'écrire $\Phi(u, v)=0$.

Il est clair, *réciproquement*, qu'en égalant à zéro une fonction thêta quelconque, formée avec les périodes précédentes, on obtient l'équation d'une courbe algébrique de la surface S, car le quotient de cette fonction par une fonction thêta de même ordre et de mêmes multiplicateurs est une fonction quadruplement périodique, liée, comme on sait, par une relation algébrique à $\frac{x_1}{x_4}$ et $\frac{x_2}{x_4}$; x_1, x_2, x_3, x_4 étant les coordonnées d'un point de S exprimées en fonction de u, v. Ainsi :

Sur une surface dont les coordonnées non homogènes s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, à quatre paires de périodes, l'équation de toute courbe algébrique s'obtiendra en égalant à zéro une fonction thêta, formée avec les mêmes paires de périodes, et réciproquement.

Il est bien entendu, et *cette condition restrictive s'étend à tout le pré-*

sent Mémoire, que les quantités $2\pi i$, a, b, c et $\frac{ac-b^2}{2\pi i}$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

D'après ce qui précède (n° 2), l'équation d'une courbe algébrique quelconque sur une surface hyperelliptique pourra se mettre aussi sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

λ et μ étant des constantes, et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta normale, de caractéristique nulle.

9. *Remarque I.* — Soit $\theta(u, v)$ une fonction thêta d'ordre m, qui se décompose en un produit de deux fonctions entières $G_1(u, v)$, $G_2(u, v)$: on voit, comme plus haut, que la première de ces fonctions est nécessairement égale au produit d'une fonction thêta $\theta_1(u, v)$, par une exponentielle $e^{\lambda(u,v)}$, où $\lambda(u, v)$ est une fonction entière. On a ainsi

$$\theta(u, v)=\theta_1(u, v)\, e^{\lambda(u,v)}\, G_2(u, v).$$

Cette identité montre que la fonction entière $e^{\lambda(u,v)}G_2(u, v)$ satisfait, quand on augmente u et v de périodes simultanées, aux relations qui caractérisent les fonctions thêta: c'est donc une fonction thêta, et, par suite :

Si une fonction thêta est divisible par une fonction thêta aux mêmes périodes, le quotient est une fonction thêta aux mêmes périodes.

10. *Remarque II.* — Si dans une fonction $\theta(u, v)$, d'ordre m, on change u et v en $-u$, $-v$, on obtient une nouvelle fonction

$$\varphi(u, v)=\theta(-u, -v),$$

qui est aussi une fonction thêta, d'ordre m.

On le voit immédiatement à l'aide des relations (1).

Cherchons dans quels cas le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ pourra être une fonction entière.

Ce quotient est une fonction qui admet les périodes $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$, et qui se reproduit multiplié par une constante quand on augmente u et v des périodes a, b ou b, c; il en résulte aisément, M. Appell a d'ailleurs

établi ce fait ([1]), que le quotient considéré est de la forme $A e^{p'u+q'v}$, p' et q' désignant des entiers, et A une constante.

On a ainsi

$$\theta(u, v) = A\, e^{p'u+q'v}\, \theta(-u, -v).$$

Si l'on change dans cette équation u, v en $-u$, $-v$, on trouve

$$\theta(-u, -v) = A\, e^{-p'u+q'v}\, \theta(u, v);$$

d'où

$$A^2 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad A = \pm 1.$$

Ces résultats montrent que la fonction

$$e^{-\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v}\, \theta(u, v)$$

est *paire ou impaire*, selon que A est égal à $+1$ ou à -1.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$, et aussi son inverse, soit une fonction entière, est que $\theta(u, v)$ soit une fonction paire ou impaire, ou le devienne quand on la multiplie par une exponentielle de la forme $e^{-\left(\frac{p'}{2}u + \frac{q'}{2}v\right)}$.

11. *Remarque III.* — De la même manière, si λ, μ, λ_0, μ_0 sont des constantes, on voit que le quotient $\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)}$, où Θ et Θ_0 désignent deux fonctions thêta de même ordre m, à caractéristique nulle, ne peut être entier (ainsi que son inverse), que s'il est égal à une exponentielle $A e^{hu+kv}$. Les constantes h et k sont des entiers, puisque $\varphi(u, v)$ admet la période $2\pi i$ par rapport à u et à v; on a, de plus, d'après (2),

$$\varphi(u+a, v+b) = e^{m(\lambda-\lambda_0)}\varphi(u, v), \qquad \varphi(u+b, v+c) = e^{m(\mu-\mu_0)}\varphi(u, v),$$

d'où

$$ha + kb = m(\lambda - \lambda_0) + 2\rho\pi i, \qquad hb + kc = m(\mu - \mu_0) + 2\sigma\pi i,$$

ρ et σ étant entiers. Ces conditions peuvent s'écrire

$$m(\lambda - \lambda_0) \equiv 0, \qquad m(\mu - \mu_0) \equiv 0 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

Il résulte de là que si λ, μ, λ_0, μ_0 sont liés par deux relations de

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 195.

cette forme, la courbe qui, sur une surface hyperelliptique quelconque, a pour équation $\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta donnée d'ordre m, à caractéristique nulle, pourra aussi être représentée par une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction de même ordre et de même caractéristique que $\Theta_0(u, v)$.

DEUXIÈME PARTIE.

SURFACE DE KUMMER.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

12. Si les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface sont exprimables par des fonctions uniformes de deux paramètres u et v, à quatre paires de périodes, on peut poser, d'après ce qui a été dit au n° 2, en introduisant, à la place de x, y, z, des coordonnées homogènes $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$,

$$\rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{7}$$

ρ étant le facteur de proportionnalité et les $\Theta_i(u, v)$ des fonctions Θ normales, d'un même ordre m, à caractéristique nulle.

Il existe m^2 fonctions Θ_i, linéairement indépendantes; la première surface hyperelliptique que l'on rencontrera s'obtiendra donc en faisant $m=2$: les quatre fonctions Θ_i sont alors quatre fonctions *normales d'ordre* 2, linéairement distinctes; de plus, et c'est là un point fondamental, elles sont toutes *paires*, puisque, d'après le n° 4, les quatre fonctions normales du second ordre, à l'aide desquelles s'expriment linéairement toutes les autres, sont des fonctions paires. Il en résulte qu'à un point de la surface (7) correspondent, abstraction faite des multiples des périodes, deux couples d'arguments (u, v) et $(-u, -v)$.

La surface ainsi définie est *une surface de Kummer* : le mode de représentation indiqué est en effet le même, comme on s'en assure aisément, que celui indiqué par M. Weber au tome 84 du *Journal de*

Crelle. M. Weber exprime les coordonnées homogènes d'un point de la surface de Kummer par des fonctions linéaires des carrés de quatre fonctions $\mathfrak{S}$ normales du premier ordre, de caractéristiques différentes; or il est clair que ces carrés sont des fonctions Θ, du second ordre, normales et à caractéristique nulle. Les deux modes de représentation sont donc identiques ([1]).

On peut d'ailleurs vérifier directement que la surface définie par les équations (7), où les Θ sont des fonctions normales du second ordre, est une surface d'ordre 4; car, d'après un théorème de M. Poincaré, qui est fondamental dans nos recherches actuelles, deux fonctions Θ, d'ordres m et n respectivement, ont $2mn$ zéros communs (les solutions qui ne diffèrent que de périodes étant regardées comme identiques) ([2]). Or les arguments des points communs à la surface (7) et à une droite, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, vérifient les équations

$$\Theta_1(u, v) = 0, \qquad \Theta_2(u, v) = 0,$$

qui ont un nombre de solutions communes égal à huit, d'après la formule de M. Poincaré; mais ces huit solutions sont deux à deux égales et de signes contraires, de la forme (u, v) et $(-u, -v)$, puisque les fonctions Θ_i sont paires, et, par suite, il ne leur correspond que quatre points de la surface. Celle-ci est donc bien du quatrième ordre.

13. Les *seize points doubles* de la surface correspondent aux valeurs de u et v égales à des moitiés de périodes simultanées, ou, en langage plus court, à des demi-périodes : en effet, si l'on développe $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, suivant les puissances croissantes de u et v, ces développements manqueront de termes du premier ordre, puisque les fonctions considérées sont paires. Il en résulte que le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double, et un raisonnement tout pareil établit la proposition pour les quinze autres demi-périodes.

14. *Courbes tracées sur la surface.* — D'après le n° 8, sur la surface de Kummer, comme sur toute surface hyperelliptique, l'équation d'une

---

([1]) Weber, *Journal de Crelle*, t. 84. — Cayley, *Journal de Crelle*, t. 83, p. 210.

([2]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X.

courbe algébrique s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta quelconque $\theta(u, v)$.

Or, soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface passant par la courbe *indécomposable* de la surface de Kummer, $\theta(u, v) = 0$; désignons par $f(u, v)$ ce que devient f quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_4(u, v)$.

Il est clair que $f(u, v)$ est divisible par $\theta(u, v)$, le quotient étant une fonction thêta (n° 9), on a ainsi

$$f(u, v) = \theta(u, v)\,\theta_1(-u, -v).$$

Mais la fonction $f(u, v)$ étant paire, on a identiquement

$$\theta(u, v)\,\theta_1(u, v) = \theta(-u, -v)\,\theta_1(-u, -v).$$

Si le quotient $\dfrac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ n'est pas une fonction entière, cette identité montre que $\theta_1(u, v)$ sera divisible par $\theta(-u, -v)$ le quotient étant entier ; on aura ainsi

$$f(u, v) = \theta(u, v)\,\theta(-u, -v)\,\theta_2(u, v),$$

θ_2 étant une fonction thêta.

Si le quotient $\dfrac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ est entier, ce résultat n'est plus vrai ; mais alors la fonction $\theta(u, v)$, multipliée par une exponentielle

$$e^{-\left(\frac{p'}{2}u + \frac{q'}{2}v\right)},$$

est égale à une fonction $\theta'(u, v)$ paire ou impaire (n° 10).

Il résulte de cette discussion que :

1° Dans le premier cas, l'équation de la courbe considérée

$$\theta(u, v) = 0$$

doit être en réalité remplacée par l'équation

$$\theta(u, v)\,\theta(-u, -v) = 0;$$

2° Dans le second cas la courbe a une équation de la forme

$$\theta'(u, v) = 0,$$

$\theta'(u, v)$ étant une fonction *paire ou impaire*, qui satisfait aux mêmes

équations fondamentales que les fonctions thêta, avec cette différence, due au facteur $e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}$, que, si l'on augmente u ou v de $2\pi i$, elle se reproduit multipliée par ± 1.

En d'autres termes, si l'on observe que $\theta(u, v)\theta(-u, -v)$ est toujours *pair*, on voit que, pour obtenir toutes les courbes algébriques de la surface de Kummer, il suffira d'égaler à zéro les fonctions $\theta(u, v)$ satisfaisant aux conditions

$$\left.\begin{aligned}\theta(u, v) &= \varepsilon\,\theta(-u, -v)\\ \theta(u+2\pi i, v) &= \varepsilon_1\,\theta(u, v)\\ \theta(u, v+2\pi i) &= \varepsilon_2\,\theta(u, v)\end{aligned}\right\}\qquad(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1),$$

$$\theta(u+a, v+b) = e^{-pu+\alpha}\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u+b, v+c) = e^{-pv+\beta}\,\theta(u, v).$$

Si dans l'avant-dernière de ces relations on change u et v en $-u$, $-v$, en tenant compte de la première, il vient

$$\theta(u-a, v-b) = e^{pu+\alpha}\,\theta(u, v);$$

remplaçant u et v par $u+a$, $v+b$, on trouve

$$\theta(u+a, v+b) = e^{-pu-pa-\alpha}\,\theta(u, v);$$

d'où l'on conclut, par comparaison,

$$e^{2\alpha} = e^{-pa};\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad e^{\alpha} = \pm e^{-\frac{pa}{2}}.$$

De même on aurait $e^{\beta} = \pm e^{-\frac{pc}{2}}$, et, par suite, les équations auxquelles satisfait la fonction θ deviennent

$$\theta(u+2\pi i, v) = \pm\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u, v+2\pi i) = \pm\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u+a, v+b) = \pm\, e^{-pu-\frac{pa}{2}}\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u+b, v+c) = \pm\, e^{-pv-\frac{pc}{2}}\,\theta(u, v).$$

En d'autres termes $\theta(u, v)$ est une fonction Θ, *normale*, d'ordre p, à caractéristique quelconque (n° 2), paire ou impaire, et, par suite :

L'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ normale, d'ordre et de caractéristique quelconques, paire ou impaire ; et réciproquement.

15. On en déduit de suite une conséquence intéressante. Soit en effet p l'ordre de la fonction Θ considérée, pour avoir le degré de la courbe correspondante, coupons-la par un plan, $x_2 = 0$, par exemple; les arguments des points communs vérifient les équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad \Theta_2(u, v) = 0.$$

Elles ont, d'après le théorème de M. Poincaré, $2.2p = 4p$ solutions communes, qui sont deux à deux égales et de signes contraires, puisque Θ_2 est une fonction paire, et que Θ est une fonction paire ou impaire. Le nombre des points communs au plan et à la courbe est donc $\frac{1}{2}4p$, c'est-à-dire $2p$, et la courbe est de degré $2p$. Ainsi :

Toutes les courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer sont de degré pair.

16. *Intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique;* THÉORÈME FONDAMENTAL. — L'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique d'ordre p,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

aura pour équation hyperelliptique

$$f(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0,$$

les Θ_i étant toujours des fonctions normales du second ordre, à caractéristique nulle.

Le premier membre de cette équation est une fonction Θ, normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle.

Or la *réciproque* de cette proposition est vraie, et c'est là un fait capital pour l'étude des courbes tracées sur la surface de Kummer.

Soit, en effet, $\Theta(u, v)$ une fonction normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle; nous allons établir que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ est l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface algébrique d'ordre p.

Toutes les fonctions telles que Θ peuvent (n° 4) s'exprimer linéairement à l'aide de $2p^2 + 2$ d'entre elles; or toute fonction de la forme

(8) $$\Theta_1^\alpha \Theta_2^\beta \Theta_3^\gamma \Theta_4^\delta,$$

où $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ ont la signification indiquée tout à l'heure, est une fonction normale, à caractéristique nulle, d'ordre $2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$; de plus, c'est une fonction paire, puisque les Θ_i sont pairs. Si l'on pose $\alpha+\beta+\gamma+\delta=p$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant bien entendu des entiers non négatifs), on obtient ainsi, en donnant à ces nombres toutes les valeurs compatibles avec les conditions précédentes, des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$ en nombre égal à

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}.$$

Mais toutes les fonctions thêta ainsi formées ne sont pas linéairement distinctes. En effet, Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 sont liées par une équation du quatrième ordre, $K=0$, celle de la surface de Kummer représentée par les équations (7); on a donc

$$0=K(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4)\varphi_{p-4},$$

φ_{p-4} étant une fonction homogène quelconque entière, d'ordre $p-4$, de $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$. Cette fonction renferme $\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{6}$ coefficients arbitraires; comme le produit $K\varphi_{p-4}$ est une somme de fonctions thêta, de la forme (8), où $\alpha+\beta+\gamma+\delta=p$, il en résulte que les fonctions de cette forme sont liées par $\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{6}$ relations linéaires. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi obtenu toutes les relations linéaires existant entre ces fonctions, car toute relation homogène, entière, de degré p entre Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 a nécessairement son premier membre divisible par K. Par suite, le nombre des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$ (où $\alpha+\beta+\gamma+\delta=p$), qui sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire à l'aide desquelles on peut exprimer linéairement les autres, est égal à

$$\frac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3)-\frac{1}{6}(p-3)(p-2)(p-1)$$

ou

$$2p^2+2.$$

Or, ce nombre est précisément égal à celui des fonctions thêta normales, paires, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, et linéairement indépendantes, à l'aide desquelles on peut exprimer toutes les autres; comme d'ailleurs les fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$ $(\alpha+\beta+\gamma+\delta=p)$ sont des fonctions thêta de cette catégorie, on voit que toute fonction Θ

normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, s'exprimera linéairement à l'aide des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$; c'est-à-dire sera une fonction entière, homogène, d'ordre p, de Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4,

$$\Theta = \varphi_p(\Theta_1, \ldots, \Theta_4).$$

En d'autres termes, la courbe $\Theta(u, v) = 0$ sera l'intersection *complète* de la surface de Kummer avec la surface algébrique d'ordre p $\varphi_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

L'équation de la courbe complète, d'ordre $4p$, commune à la surface de Kummer et à une surface algébrique d'ordre p, s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle.

Réciproquement, *la courbe qu'on définit, en égalant à zéro une telle fonction Θ, est l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre p.*

17. *Corollaire.* — Le premier membre de l'équation d'une courbe algébrique sur la surface de Kummer étant (n° 14) une fonction thêta d'ordre p, normale, paire ou impaire, son carré est toujours une fonction Θ normale, d'ordre $2p$, *de caractéristique nulle et paire;* il peut donc s'exprimer en fonction entière, homogène, d'ordre p, de $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$; soit $\varphi_p(\Theta, \ldots, \Theta_4)$, et, par suite, la surface

$$\varphi_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

est circonscrite à la surface de Kummer le long de la courbe considérée, et ne la coupe pas en dehors de cette courbe.

Donc :

Le long de toute courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer et de degré $2p$, on peut circonscrire à cette surface une surface algébrique de degré p, ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée (1).

Avant d'aller plus loin dans l'étude des courbes algébriques de la surface de Kummer, il est nécessaire de présenter quelques remarques

---

(1) Cette propriété curieuse n'appartient évidemment qu'à des surfaces exceptionnelles; en dehors de la surface de Kummer, nous ne connaissons, pour la posséder, que les cônes du second ordre.

sur les points singuliers et sur les seize coniques de la surface; les propriétés des uns et des autres sont bien connues, mais nous devons exposer ici un algorithme nouveau destiné à représenter les éléments de la configuration de Kummer et dont l'utilité sera grande dans nos recherches ultérieures.

Points et plans singuliers.

18. Les courbes du degré le moins élevé qu'on peut tracer sur la surface de Kummer sont des coniques; on obtient seize coniques en égalant à zéro les seize fonctions $\mathfrak{S}$ normales du premier ordre, puisque la courbe otenue en égalant à zéro une fonction normale, paire ou impaire, d'ordre p, est d'ordre $2p$ (n° 15).

Chaque fonction $\mathfrak{S}$ s'annulant pour six demi-périodes, chaque conique passe par six points singuliers.

D'après le théorème du n° 17, le plan de chaque conique touche la surface le long de la conique; les plans des seize coniques seront dits *plans singuliers*.

On peut donner, pour représenter les seize points et les seize plans singuliers, un *algorithme* qui jouit de propriétés remarquables.

Écrivons les deux tableaux identiques :

I.				II.			
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0

et numérotons les colonnes, dans le premier de 1 à 4, dans le second de 1′ à 4′, à partir de la gauche. Soit une fonction $\mathfrak{S}$ du premier ordre, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ g & g' \end{vmatrix}$, par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; nous prendrons la première colonne de cette figure, soit la colonne $\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$, dans le tableau I, où elle a le numéro d'ordre 2; de même la seconde colonne, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$, a le numéro d'ordre 1′ dans le tableau II; nous représenterons alors la fonction $\mathfrak{S}$ de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ par le symbole 21′. Inversement, un symbole, tel que 34′ par exemple, représente la fonction de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

On peut donner un symbole analogue pour représenter les demi-périodes. Soit, par exemple, la demi-période

$$h\pi i + \lambda a + \mu b: \qquad k\pi i + \lambda b + \mu c,$$

où

$$h = 0, \qquad k = 1, \qquad \lambda = 1, \qquad \mu = 1.$$

Nous écrirons le tableau

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1+h & 1+k \end{vmatrix},$$

qui représentera la demi-période; nous négligerons, dans chaque terme $1+\lambda, \ldots, 1+k$, les multiples de 2, en sorte que, dans l'exemple considéré, le tableau s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et nous donnerons à la demi-période le symbole (34'), 3 étant l'ordre de la première colonne $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ dans le tableau I, et 4' celui de la seconde, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$, dans le tableau II. Inversement, un symbole, tel que (13'), représentera la demi-période pour laquelle on a

$$1+\lambda \equiv 1, \qquad 1+h \equiv 1, \qquad 1+\mu \equiv 0, \qquad 1+k \equiv 1 \pmod 2.$$

Pour distinguer des symboles des $\mathfrak{S}$ les symboles des demi-périodes, nous mettons ces derniers entre parenthèses.

Cela posé, je dis que les six demi-périodes qui annulent une fonction $\mathfrak{S}$, de symbole $\alpha\alpha'$, ont les symboles qu'on obtient en faisant suivre le chiffre α des trois chiffres accentués de la série 1, 2, 3, 4, qui diffèrent de α, et en faisant précéder le chiffre α' des trois chiffres de cette série qui diffèrent de α' : ainsi les six demi-périodes annulant 12' sont (11'), (13'), (14') et (22'), (32'), (42').

Nous savons, en effet, que les demi-périodes qui annulent la fonction $\mathfrak{S}$ de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ sont données par la congruence (n° 7, équation 6)

$$(h+\theta)(\lambda+\omega) + (k+\theta')(\mu+\omega') \equiv 1 \pmod 2.$$

Cette congruence admet six solutions, dont l'une, par exemple, est

$$h+\theta \equiv 0, \qquad \lambda+\omega \equiv 0, \qquad k+\theta' \equiv 1, \qquad \mu+\omega' \equiv 1 \pmod 2.$$

Le tableau qui caractérise la demi-période correspondante, à savoir

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1+h & 1+k \end{vmatrix}, \quad \text{est alors} \quad \begin{vmatrix} 1+\omega & \omega' \\ 1+\theta & \theta' \end{vmatrix},$$

en négligeant dans chaque terme les multiples de 2 ; pour les cinq autres solutions, on obtient de même les cinq tableaux

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 1+\theta & \theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega & 1+\omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & 1+\theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega & 1+\omega' \\ \theta & 1+\theta' \end{vmatrix}.$$

On voit que, dans trois de ces six tableaux, la première colonne est $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$, et que, dans les trois autres, la seconde colonne est $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$. Dans les tableaux qui commencent par la colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$, la seconde colonne prend trois des formes $\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}$, la forme exceptée étant $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$. On peut faire la même remarque pour les tableaux qui se terminent par la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$, et ces deux remarques démontrent la règle énoncée : si, en effet, p est l'ordre de la colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$ dans le tableau I ; q' celui de la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$ dans le tableau II, la fonction $\mathfrak{S}$ considérée aura le symbole pq', et, des six demi-périodes qui l'annulent, trois auront des symboles commençant par p, trois des symboles finissant par q', le symbole (pq') ne devant pas figurer.

On verrait de même qu'on obtient les symboles des six fonctions $\mathfrak{S}$ s'annulant pour la demi-période (pq') en faisant suivre p des trois chiffres accentués de la série 1, 2, 3, 4, qui diffèrent de q' et en faisant précéder q' des trois chiffres de cette série qui diffèrent de p : ainsi la demi-période $(12')$ annule les six $\mathfrak{S}$: $11'$, $13'$, $14'$ et $22'$, $32'$, $42'$.

Il est même inutile de faire de nouveaux calculs pour le vérifier, car, d'après ce qui précède, les fonctions pq' et sr' s'annulent pour la demi-période (pr') si $r' \gtrless q'$ et $p \gtrless s$.

On voit sans difficulté que les six fonctions $\mathfrak{S}$ *impaires*, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair, ont pour symboles

$$12', \quad 13', \quad 14', \quad 21', \quad 31', \quad 41';$$

ce sont les six symboles qui contiennent une et une seule fois le chiffre 1, accentué ou non.

19. Revenons maintenant à la surface de Kummer; nous représenterons un plan singulier par le symbole de la fonction ϑ correspondante, et un point singulier par celui de la demi-période qui donne ses arguments : nous arrivons ainsi à l'algorithme suivant, qui peut être présenté indépendamment de toute considération analytique :

Soient 1, 2, 3, 4 *et* 1′, 2′, 3′, 4′ *deux séries de quatre caractères; désignons par* α *un caractère quelconque de la première série, par* β, γ, δ *les trois autres, par* α' *un caractère de la seconde, par* β', γ', δ' *les trois autres.*

Les seize symboles $\alpha\alpha'$ *représenteront les seize plans singuliers, et les seize symboles* $(\alpha\alpha')$ *les seize points singuliers de la surface de Kummer, de telle façon :*

1° *Que les six points singuliers contenus dans le plan* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\delta\alpha');$$

2° *Que les six plans singuliers passant par le point* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha\delta'\quad \beta\alpha',\quad \gamma\alpha',\quad \delta\alpha'.$$

Cette notation a, sur celle de M. Weber (¹), l'avantage d'être symétrique par rapport aux points ou aux plans singuliers de la surface de Kummer; elle est, de plus, réciproque par rapport aux points et aux plans singuliers. Nous verrons enfin qu'elle se rattache étroitement à la notation proposée par Hesse pour les bitangentes d'une quartique plane.

On vérifie immédiatement, à l'aide de notre notation, que deux plans singuliers ont en commun deux points singuliers, et que par deux points singuliers passent deux plans singuliers.

Cet algorithme peut être étendu aux fonctions thêta abéliennes, du premier ordre, de genre quelconque; nous ne l'énoncerons que pour le genre trois, mais la généralisation est évidente.

Soient 1, 2, 3, 4; 1′, 2′, 3′, 4′; *et* 1″, 2″, 3″, 4″ *trois séries de quatre caractères; les soixante-quatre symboles tels que* 1 1′ 1″ *représenteront les*

(¹) Weber, *Journal de Crelle*, t. 84.

soixante-quatre fonctions thêta normales du premier ordre, de genre trois, et les soixante-quatre symboles tels que ($1\,1'\,1''$) *représenteront les soixante-quatre demi-périodes de ces fonctions, de telle sorte :*

1° *Que les vingt-huit demi-périodes annulant une fonction thêta, telle que* $1\,1'\,1''$, *soient représentées par les symboles de la forme* ($\alpha\alpha'\alpha''$) *où les chiffres* 1, $1'$, $1''$ *figurent, au total, un nombre impair de fois;*

2° *Que les vingt-huit fonctions qui s'annulent pour une demi-période, telle que* ($1\,1'\,1''$), *soient également représentées par les symboles* $\alpha\alpha'\alpha''$, *dans lesquels les chiffres* 1, $1'$, $1''$ *figurent, au total, un nombre impair de fois.*

Groupes remarquables de points et de plans singuliers.

20. Il existe des groupes remarquables de points et de plans singuliers, que les travaux antérieurs de divers géomètres ont fait connaître ([1]), mais sur lesquels nous avons à revenir en vue de nos recherches; l'algorithme nouveau va nous permettre de les retrouver de suite.

I. *Groupes de Rosenhain.* — Ce sont des groupes de quatre plans singuliers formant un tétraèdre ayant pour sommets quatre points singuliers.

On trouve que les symboles des quatre plans d'un groupe sont de quatre types :

1°	$\alpha\alpha'$,	$\alpha\beta'$,	$\alpha\gamma'$,	$\alpha\delta'$;	ce type donne	4	tétraèdres.
2°	$\alpha\alpha'$,	$\beta\alpha'$,	$\gamma\alpha'$,	$\delta\alpha'$:	»	4	»
3°	$\alpha\alpha'$,	$\alpha\beta'$,	$\beta\gamma''$,	$\beta\delta'$:	»	36	«
4°	$\alpha\alpha'$,	$\beta\alpha'$,	$\gamma\beta'$,	$\delta\beta'$:	»	36	»

Il y a donc, en tout, 80 groupes ou tétraèdres de Rosenhain. Au point de vue géométrique, il n'y a aucune différence entre les groupes des divers types.

Si, imitant la méthode proposée par M. Cayley pour la représentation

---

([1]) Rosenhain, Mémoires couronnés *Savants étrangers*, t. XI; Weber, *Journal de Crelle* t. 84; Göpel, *Journal de Crelle* t. 35; Krazer, *Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen* (Teubner, 1882); Reichardt, *Darstellung der Kummerschen Fläche*, ... (*Nova Acta de l'Académie Leop.-Carol. de Halle*, t. L).

graphique des bitangentes d'une quartique plane, nous convenons de disposer les caractères α', β', γ', δ' sur une ligne horizontale, et les caractères α, β, γ, δ sur une ligne horizontale au-dessous de la première, et si nous représentons le plan $\alpha\alpha'$ par la droite qui joint les caractères α et α', les symboles graphiques des groupes de Rosenhain sont ([1])

$$\text{⩛} \qquad \text{et} \qquad \text{⩚} \qquad \text{pour les types } 1^{\circ} \text{ et } 2^{\circ},$$

$$\vee\vee \qquad \text{et} \qquad \wedge\wedge \qquad \text{pour les types } 3^{\circ} \text{ et } 4^{\circ}.$$

21. Le produit des quatre fonctions ϑ qui correspondent aux plans d'un groupe de Rosenhain est évidemment une fonction Θ normale, d'ordre quatre : je dis que c'est une fonction *impaire*, de caractéristique *nulle*.

Elle est impaire, car la représentation graphique montre que les quatre symboles des plans d'un groupe renferment un nombre impair de fois, au total, un symbole de la première catégorie, α, par exemple, et un symbole de la seconde, β', par exemple : en particulier, ils renferment un nombre impair de fois, au total, les symboles 1 et $1'$; par suite, sur les quatre fonctions ϑ correspondantes, une ou trois sont impaires (n° 18), et le produit est impair.

Pour étudier la caractéristique, considérons, d'une manière plus générale, le produit d'un nombre quelconque de ϑ, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$. Les nombres qui composent la caractéristique de ce produit sont évidemment

$$\Omega \equiv \Sigma\omega, \qquad \Omega' \equiv \Sigma\omega', \qquad \Theta \equiv \Sigma\theta, \qquad \Theta' \equiv \Sigma\theta' \qquad (\text{mod } 2),$$

les sommes s'étendant aux nombres ω, ω', θ, θ', qui correspondent aux fonctions ϑ du produit considéré. Or le premier caractère, α, du symbole $\alpha\alpha'$ d'une fonction ϑ, représente, dans notre notation, la première colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$ de la caractéristique ; de même α' représente la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$; il en résulte sans difficulté, si l'on se reporte aux tableaux I et II du n° 18, la conséquence suivante.

Écrivons à la suite les uns des autres les symboles $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$ des ϑ dont on considère le produit, et regardons cette expression

([1]) D'après cette convention, les six plans singuliers qui passent par un même point auront pour symbole ⩛.

comme un produit algébrique auquel nous appliquerons les règles du calcul algébrique ; nous aurons ainsi

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta\ldots\gamma\delta' = 1^h 2^k 3^l 4^m . 1'^{h'} 2'^{k'} 3'^{l'} 4'^{m'},$$

h, k, ..., m' étant des entiers positifs : les nombres Ω, Ω', Θ, Θ' seront donnés par les relations

$$\Omega \equiv h + k, \qquad \Omega' \equiv h' + k', \qquad \Theta \equiv h + l, \qquad \Theta' \equiv h' + l' \qquad (\text{mod } 2).$$

Le produit considéré aura donc sa caractérisque nulle si les nombres h, k, l sont de même parité, ainsi que les nombres h', k', l'.

Dans le cas où le produit comprend un nombre pair de fonctions $\mathfrak{I}$, cette règle se simplifie et il n'est pas besoin d'introduire les caractères 1, 2, 3, 4 à la place des α, β, γ, δ. En ce cas, en effet, les nombres (égaux entre eux) $h+k+l+m$ et $h'+k'+l'+m'$ sont pairs ; la condition pour que le produit étudié soit de caractéristique nulle est donc que les nombres h, k, l, m soient de même parité, ainsi que les nombres h', k', l', m'. Or cette condition est symétrique par rapport aux caractères 1, 2, 3, 4 et par rapport aux caractères 1', 2', 3', 4' ; il en résulte que, si l'expression $\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta'$ prend, par l'application des règles du calcul algébrique, la forme $\alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'}$, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit considéré soit de caractéristique nulle est que les nombres h, k, l, m soient de même parité, ainsi que h', k', l', m', sans qu'on ait besoin de savoir à quels caractères des séries 1, 2, 3, 4 et 1', 2', 3', 4' correspondent les caractères α, β, ..., δ'.

Cette observation montre que le produit des quatre $\mathfrak{I}$ d'un groupe de Rosenhain est une fonction de caractéristique nulle, car on a, pour les groupes du premier type,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\alpha\gamma'.\alpha\delta' = \alpha^4\alpha'\beta'\gamma'\delta',$$

et pour ceux du troisième,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\beta\gamma'.\beta\delta' = \alpha^2\beta^2\alpha'\beta'\gamma'\gamma';$$

de même pour les groupes des types 2° et 4°.

Le produit des quatre $\mathfrak{I}$ d'un groupe de Rosenhain étant une fonction normale, d'ordre quatre, impaire et de caractéristique nulle, les résultats du n° 7 montrent que l'ensemble des quatre plans d'un groupe

de Rosenhain passe par tous les points singuliers; ce qui se vérifie d'ailleurs directement à l'aide de l'algorithme.

Trois coniques dont les plans appartiennent à un même groupe de Rosenhain ont un point singulier commun, d'après la définition même des groupes de Rosenhain; réciproquement, si trois coniques ont un point singulier commun, leurs plans appartiennent à un de ces groupes : on le voit immédiatement à l'aide du symbole graphique. En effet, les plans des six coniques qui passent par un même point singulier ont pour symbole $\wedge\!\!\wedge\vee\!\!\vee$, trois de ces plans seront représentés par un des symboles $\wedge\!\!\wedge$, $\vee\!\!\vee$, $\wedge\,|$, $|\,\vee$, qui font respectivement partie des symboles $/\!\!\wedge\!\!\wedge$, $\vee\!\!\vee\!\!/$, $\wedge\,/$, $/\,\vee$, correspondant à des groupes de Rosenhain.

22. *Remarque.* — Soient des fonctions $\mathfrak{S}$ en nombre pair, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$; écrivons, comme tout à l'heure,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta' = \alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'}.$$

Pour que le produit des $\mathfrak{S}$ considérés ait sa caractéristique nulle, il faut et il suffit que h, k, l, m soient de même parité, ainsi que h', k', l', m'; pour que ce produit soit pair, il faut que les symboles 1 et 1' figurent au total un nombre pair de fois dans $\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta'$, c'est-à-dire que h, k, l, m soient de même parité que h', k', l', m', quels que soient ceux des caractères α, β, ..., δ' qui correspondent aux caractères 1 et 1'.

En d'autres termes, si nous nous reportons au théorème fondamental du n° 16, nous voyons que $2p$ coniques de la surface de Kummer, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$, seront sur une surface algébrique d'ordre p, si, étant posé

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta' = \alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'},$$

les exposants h, k, l, ..., l', m' sont tous de même parité.

Cette condition est nécessaire et suffisante; nous en ferons plus loin des applications.

23. II. *Groupes de Göpel.* — Ce sont des groupes de quatre plans formant un tétraèdre qui n'a aucun point singulier pour sommet.

On trouve aisément, à l'aide de l'algorithme, que les symboles des

quatre plans d'un groupe sont de deux types.

1° $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$: ce type donne 24 groupes;
2° $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$: ce type donne 36 groupes.

Il y a donc 60 groupes de Göpel.

Les même symboles, avec parenthèses, désignent 60 groupes de quatre points singuliers, sommets d'un tétraèdre qui n'a pour face aucun plan singulier: nous appellerons ces groupes : *groupes de points de Göpel*, les précédents étant les *groupes de plans*, *ou tétraèdres de Göpel.*

Les symboles graphiques des groupes de points ou plans de Göpel sont

[illegible] et ▷◁.

Le produit des quatre $\mathfrak{S}$ qui correspondent aux plans d'un tétraèdre de Göpel est une fonction paire, à caractéristique nulle; car on a, par exemple,

$$\alpha\alpha'.\beta\beta'.\gamma\gamma'.\delta\delta' = \alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\beta'\gamma'\delta'$$

et tous les exposants au second membre sont de même parité; de même,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\beta\alpha'.\beta\beta' = \alpha^2\beta^2\alpha'^2\beta'^2.$$

Donc (nos 16 et 22) :

Les faces d'un tétraèdre de Göpel touchent la surface de Kummer suivant quatre coniques, qui sont situées sur une même surface du second ordre.

24. III. *Octaèdres de Göpel.* — Nous donnerons le nom d'*octaèdres de Göpel* à des groupes remarquables de huit plans singuliers, en relation intime avec les tétraèdres de Göpel, et qu'on définit comme il suit.

Deux plans singuliers quelconques appartiennent à trois tétraèdres de Göpel : on le voit aisément à l'aide de l'algorithme ou du symbole graphique; ainsi les plans $|\,|$ font partie des tétraèdres [illegible], [illegible], [illegible]; nous dirons que les deux plans donnés et les trois couples de plans qui, associés à ceux-ci respectivement, forment trois tétraèdres de Göpel, constituent un octaèdre de Göpel.

Un octaèdre de Göpel est donc défini ainsi par quatre couples de plans singuliers; il résulte de ce qui a été dit au numéro précédent que

les produits des ϑ qui correspondent aux quatre plans de deux quelconques de ces couples sont, pour un même octaèdre, des fonctions paires et de caractéristique nulle.

Cherchons les symboles des octaèdres, et considérons, à cet effet, deux plans singuliers : si leurs symboles n'ont aucun caractère commun, on pourra les représenter par $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; les trois couples de plans qui, avec le couple précédent, forment des tétraèdres de Göpel sont, d'après les notations données au n° 23,

$$\alpha\beta' \text{ et } \beta\alpha', \qquad \gamma\gamma' \text{ et } \delta\delta', \qquad \gamma\delta' \text{ et } \delta\gamma'.$$

Si les deux plans singuliers primitifs ont un caractère commun, α, on les représentera par $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$; les trois couples formant avec ce couple un octaèdre de Göpel sont

$$\beta\alpha' \text{ et } \beta\beta', \qquad \gamma\alpha' \text{ et } \gamma\beta', \qquad \delta\alpha' \text{ et } \delta\beta'.$$

Si enfin les deux plans primitifs ont, dans leurs symboles, un même caractère, α', on les représentera par $\alpha\alpha'$ et $\beta\alpha'$, et l'on aura pour symboles des trois autres couples

$$\alpha\beta' \text{ et } \beta\beta', \qquad \alpha\gamma' \text{ et } \beta\gamma', \qquad \alpha\delta' \text{ et } \beta\delta'.$$

On trouve donc, pour représenter les quatre couples de plans d'un octaèdre de Göpel, trois types de notations,

1° $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$, $\gamma\gamma'$ et $\delta\delta'$, $\delta\gamma'$ et $\delta\gamma'$;
2° $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$ et $\beta\beta'$, $\gamma\alpha'$ et $\gamma\beta'$, $\delta\alpha'$ et $\delta\beta'$;
3° $\alpha\alpha'$ et $\beta\alpha'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\beta'$, $\alpha\gamma'$ et $\beta\gamma'$, $\alpha\delta'$ et $\beta\delta'$.

Le premier type donne par permutation de α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' dix-huit octaèdres, le deuxième et le troisième en donnent six chacun ; il y a donc en tout *trente octaèdres* de Göpel.

On vérifie maintenant sans difficulté, à l'aide de l'algorithme, que les quatre couples de plans d'un même octaèdre passent par huit mêmes points singuliers, qui sont respectivement, pour les types 1°, 2° et 3°:

$(\alpha\gamma')$, $(\alpha\delta')$, $(\beta\gamma')$, $(\beta\delta')$, $(\gamma\alpha')$, $(\gamma\beta')$, $(\delta\alpha')$, $(\delta\beta')$;
$(\alpha\alpha')$, $(\alpha\beta')$, $(\beta\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\alpha')$, $(\gamma\beta')$, $(\delta\alpha')$, $(\delta\beta')$;
$(\alpha\alpha')$, $(\beta\alpha')$, $(\alpha\beta')$, $(\beta\beta')$, $(\alpha\gamma')$, $(\beta\gamma')$, $(\alpha\delta')$, $(\beta\delta')$.

Nous obtenons ainsi *trente* groupes remarquables de huit points sin-

guliers, par chacun desquels passent quatre couples de plans singuliers; on trouve l'un quelconque de ces groupes en prenant les huit points situés dans deux plans singuliers, en dehors de leur droite d'intersection.

Observons enfin que les huit plans singuliers qui n'appartiennent pas à un octaèdre forment eux-mêmes un octaèdre; les huit points singuliers communs aux quatre couples de plans du premier octaèdre sont différents des huit points communs aux couples de plans du second : les trente groupes de huit plans et les trente groupes de huit points trouvés tout à l'heure sont donc associés deux à deux, deux groupes associés n'ayant aucun plan ou aucun point commun.

25. Avant d'abandonner la théorie des plans singuliers, nous appliquerons notre algorithme à la recherche de nouveaux groupes intéressants formés par les coniques de la surface.

Groupe de quatre coniques situées sur une même quadrique. — Pour que quatre coniques soient sur une même quadrique, il faut et il suffit (n° 22) que le produit de leurs symboles puisse se mettre sous la forme

$$\alpha^h \beta^k \gamma^l \delta^m \alpha'^{h'} \beta'^{k'} \gamma'^{l'} \delta'^{m'},$$

h, k, ..., m' étant des nombres entiers de même parité. D'ailleurs, puisqu'il entre quatre coniques dans le groupe considéré, on a

$$h + k + l + m = h' + k' + l' + m' = 4.$$

On est conduit ainsi à deux types d'expressions.

1° Exposants impairs :

$$h = k = \ldots = l' = m' = 1.$$

Type $\alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

Ce type donne les 24 groupes : $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ (||||).

2° Exposants pairs :

$$h = k = h' = k' = 2, \qquad l = m = l' = m' = 0.$$

Type $\alpha^2\beta^2.\alpha'^2\beta'^2$ ou $\alpha\alpha\beta\beta.\alpha'\alpha'\beta'\beta'$.

Ce type donne les 36 groupes : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$ (⊳⊲), en excluant

les groupes tels que $\alpha\alpha'.\alpha\alpha'.\beta\beta'.\beta\beta'$, qui contiennent deux fois une même conique.

Les $24+36=60$ groupes ainsi obtenus coïncident avec les 60 tétraèdres de Göpel, qu'on devait (n° 23) trouver comme solutions; on voit que ces tétraèdres donnent d'ailleurs toutes les solutions.

26. *Groupes de six coniques situées sur une même surface cubique.* — On devra, pour trouver ces groupes, partir d'expressions du sixième ordre en α, β, γ, δ et du même ordre en α', β', γ', δ', les exposants étant de même parité.

1° Exposants impairs :

Type unique $\qquad \alpha\alpha\alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

Ce type donne (¹) :

16 groupes : $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\alpha'$ (\V/),
144 groupes : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\delta'$ (| \V/\ ).

Les seize premiers groupes sont formés par les six coniques qui passent par un même point singulier.

2° Exposants pairs :

Type $\qquad \alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma.\alpha'\alpha'\beta'\beta'\gamma'\gamma'$.

Ce type donne 96 groupes :

$\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\beta'$, $\gamma\gamma'$ (▷<>◁).

Types : $\qquad \alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha'\alpha'\beta'\beta'\gamma'\gamma'$,
$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta$, $\alpha'\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\beta'$,
$\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$, $\alpha'\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\beta'$.

Ces types doivent être exclus, comme donnant nécessairement deux fois au moins la même conique.

On a donc en tout deux cent cinquante-six groupes de six coniques différentes situées sur une même surface cubique.

Les symboles de ces groupes montrent immédiatement qu'on obtient chacun d'eux en prenant les plans singuliers non communs à deux groupes de Rosenhain, qui ont un et un seul plan singulier commun.

(¹) Nous supposons ici, comme dans tout ce qui suit, qu'on exclut les groupes dans lesquels une même conique figure deux ou plusieurs fois.

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES COURBES ALGÉBRIQUES TRACÉES SUR LA SURFACE DE KUMMER.

27. La première question que nous traiterons dans l'étude générale des courbes algébriques de la surface de Kummer est celle de la détermination et de la classification des courbes d'un degré donné.

On connaît peu de surfaces pour lesquelles ce problème soit résolu; ces surfaces (surface de Steiner, surface du troisième ordre, quadriques, etc.) sont représentables point par point sur le plan, et la question se ramène dès lors à une question de Géométrie plane.

Pour les quadriques, un élégant théorème d'Halphen donne implicitement la solution géométrique du problème : Halphen a montré, en effet, que la surface du moindre degré qu'on peut mener par une courbe tracée sur une surface du second ordre ne coupe, en outre, cette dernière que suivant des génératrices d'un même système([1]).

Sur la surface de Kummer, le résultat est plus simple encore : nous allons voir que, par une courbe algébrique quelconque tracée sur cette surface, on peut mener une seconde surface qui ne coupe, en outre, la première que suivant h coniques, h pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4; et nous obtiendrons en même temps la classification des courbes d'un degré donné.

Nous savons (n° 14) que l'équation d'une courbe algébrique, sur la surface de Kummer, est de la forme $\Theta(u, v) = 0$, Θ désignant une fonction thêta normale, d'ordre et de caractéristique quelconques, paire ou impaire; soit μ son ordre, la courbe correspondante est d'ordre 2μ.

Deux cas sont à distinguer, selon que μ est pair ou impair.

28. I. Soit d'abord μ pair, $\mu = 2m$; les courbes correspondantes sont d'ordre $4m$.

Les fonctions Θ normales, d'ordre $2m$, paires ou impaires, se répartissent en seize systèmes selon les valeurs de la caractéristique.

([1]) *Bulletin de la Soc. math. de France*, t. I, p. 19.

1° Si la *caractéristique est nulle* (n° 4), les fonctions normales *paires*, d'ordre $2m$, s'expriment linéairement en fonction de $2m^2+2$ d'entre elles; les courbes correspondantes sont, d'après le théorème fondamental du n° 16, les intersections complètes de la surface de Kummer et de surfaces algébriques d'ordre m.

2° Les fonctions normales, à *caractéristique nulle*, d'ordre $2m$ et *impaires* sont au nombre de $2m^2-2$ linéairement distinctes; les courbes correspondantes, de degré $4m$, passent par les seize points singuliers de la surface de Kummer, puisque les fonctions thêta normales, à caractéristique nulle et impaires, s'annulent pour les seize demi-périodes (n° 7). Si l'on multiplie une fonction impaire, d'ordre $2m$, à caractéristique nulle, par le produit des quatre fonctions ϑ du premier ordre correspondant aux plans singuliers d'un groupe de Rosenhain, on obtient (n° 21) une fonction *paire*, d'ordre $2m+4$, à caractéristique nulle; il résulte de là (n° 16) que chacune des courbes précédentes est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m+2$, passant par les quatre coniques d'un groupe de Rosenhain, quelconque d'ailleurs.

On obtient donc toutes les courbes de la famille considérée en prenant l'intersection de la surface de Kummer avec des surfaces d'ordre $m+2$, menées par quatre coniques d'un même groupe de Rosenhain, et réciproquement.

Si m est égal à 1, $2m^2-2$ est nul; il n'y a pas de fonction impaire normale, d'ordre 2, à caractéristique nulle et la famille précédente n'existe pas.

3° Considérons maintenant les fonctions Θ normales, d'ordre $2m$, à *caractéristique non nulle:* elles forment quinze systèmes, selon les valeurs de la caractéristique, et, dans chaque système, il y a $2m^2$ fonctions paires et $2m^2$ fonctions impaires, linéairement distinctes (n° 5): d'où trente familles de courbes d'ordre $4m$.

On peut toujours trouver deux fonctions ϑ, du premier ordre, telles que leur produit soit une fonction paire ou impaire, à volonté, ayant une caractéristique non nulle donnée à l'avance. Soient, en effet, ω, ω', θ, θ' les éléments de la caractéristique donnée; ω_1, ω'_1, θ_1, θ'_1 et ω_2, ω'_2, θ_2, θ'_2 ceux des caractéristiques respectives des deux ϑ cherchés. On aura

$$(9)\quad \omega_1+\omega_2\equiv\omega,\qquad \omega'_1+\omega'_2\equiv\omega',\qquad \theta_1+\theta_2\equiv\theta,\qquad \theta'_1+\theta'_2\equiv\theta'\pmod 2;$$

de plus la quantité

$$\omega_1 \vartheta_1 + \omega'_1 \vartheta'_1 + \omega_2 \vartheta_2 + \omega'_2 \vartheta'_2$$

aura une parité donnée (n° 6).

Si l'on tire ω_2, ω'_2, θ_2, θ'_2 des quatre premières relations pour les introduire dans la dernière condition, on trouve la congruence

$$\omega_1 \vartheta + \vartheta_1 \omega + \omega'_1 \vartheta' + \vartheta'_1 \omega' \equiv \omega\vartheta + \omega'\vartheta' + \varepsilon \pmod 2,$$

ε étant une quantité connue, égale à o ou à 1.

Cette congruence a toujours des solutions en ω_1, θ_1, ω'_1, θ'_1, puisque ω, θ, ω', θ' ne sont pas nuls à la fois, la caractéristique donnée n'étant pas nulle. Chaque système de valeurs de ω_1, θ_1, ω'_1, θ'_1 donne, en vertu de (9), un système de valeurs de ω_2, θ_2, ω'_2, θ'_2, et ces deux systèmes sont différents, puisque ω, θ, ω', θ' ne sont pas tous nuls.

D'après cela, on peut multiplier une fonction Θ, paire ou impaire, normale, d'ordre $2m$, à caractéristique non nulle, par deux fonctions $\mathfrak{S}$ convenablement choisies, de telle sorte que le produit soit une fonction *paire*, d'ordre $2m+2$, à *caractéristique nulle* : géométriquement, d'après le théorème du n° 16, cela revient à dire que la courbe d'ordre $4m$ qui correspond, sur la surface de Kummer, à la fonction Θ considérée, est l'intersection de cette surface avec une surface d'ordre $m+1$, passant par deux coniques singulières.

On peut associer deux à deux les seize coniques de la surface de Kummer de $\frac{16.15}{2} = 120$ manières ; il semble donc qu'on doive obtenir géométriquement 120 familles de courbes d'ordre $4m$, tandis que l'Analyse nous a appris qu'on doit en trouver seulement 30. Mais nous savons que, étant donné un couple de fonctions $\mathfrak{S}$ du premier ordre, il existe trois autres couples tels que le produit des $\mathfrak{S}$ de deux quelconques des quatre couples soit une fonction Θ paire et de caractéristique nulle (n° 24); les quatre couples de plans singuliers correspondants de la surface de Kummer forment un octaèdre de Göpel. Donc quatre couples de coniques dont les plans forment un octaèdre de Göpel ne donnent naissance, par l'application du procédé géométrique indiqué plus haut, qu'à une seule et même famille de courbes de degré $4m$, et, par suite, le nombre de ces familles de courbes est $\frac{120}{4} = 30$, résultat qui concorde avec celui de l'Analyse.

La courbe d'ordre $4m$, intersection de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre $m+1$ menée par deux coniques singulières, passe évidemment par les huit points singuliers situés dans les plans de ces deux coniques, en dehors de leur droite d'intersection; ces huit points sont communs (n° 24) aux quatre couples de plans d'un même octaèdre de Göpel.

Si l'on considère deux octaèdres de Göpel *associés* (n° 24), les deux familles de courbes d'ordre $4m$ qui correspondent respectivement à chacun d'eux seront dites *associées;* les courbes de l'une des familles passent par huit points singuliers et les courbes de l'autre famille passent par les huit autres points singuliers. Ces résultats concordent avec ceux du n° 7.

Nous avons ainsi obtenu la définition géométrique de toutes les courbes de degré $4m$ sur la surface de Kummer; elles correspondent à des Θ d'ordre $2m$. Il nous reste à examiner les courbes qui correspondent à des Θ d'ordre μ, impair.

29. II. Soit maintenant $\mu = 2m+1$; les courbes correspondantes sont d'ordre $4m+2$.

Les fonctions Θ normales, d'ordre $2m+1$, paires ou impaires, se répartissent toujours en seize systèmes, selon les valeurs de la caractéristique; et pour une caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, il y a (n°s 4 et 5)

$$2m^2+2m+1 \quad \text{fonctions} \begin{cases} \text{paires,} \\ \text{impaires} \end{cases}$$

et

$$2m^2+2m \quad \text{fonctions} \begin{cases} \text{impaires,} \\ \text{paires,} \end{cases}$$

selon que la quantité

$$\omega\theta+\omega'\theta' \quad \text{est} \begin{cases} \text{paire,} \\ \text{impaire.} \end{cases}$$

1° Supposons d'abord que $\omega\theta+\omega'\theta'$ soit pair; la fonction $\Im_0$ du premier ordre, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ est paire (n° 6), et le produit de cette fonction par une fonction Θ, *paire*, d'ordre $2m+1$ et de même caractéristique, est une fonction normale, paire, d'ordre $2m+2$ et de caractéristique nulle. En d'autres termes, d'après le théorème du n° 16,

la courbe d'ordre $4m+2$, qui correspond à la fonction Θ d'ordre $2m+1$ considérée, est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m+1$ menée par une conique singulière.

Si, $\omega\theta+\omega'\theta'$ étant toujours supposé pair, on considère une fonction Θ *impaire*, d'ordre $2m+1$, et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, le raisonnement précédent ne peut s'appliquer. En ce cas, soient $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ trois fonctions $\mathfrak{S}$ d'ordre un, formant un groupe de Rosenhain avec la fonction $\mathfrak{S}_0$ d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$: nous savons (n° 21) que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_0$ est impair et de caractéristique nulle. Il en résulte, puisque $\mathfrak{S}_0$ est pair, que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$ est impair, et a même caractéristique que $\mathfrak{S}_0$. Si donc on multiplie la fonction Θ impaire considérée par $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$, on obtient une fonction normale paire d'ordre $2m+4$ et de caractéristique nulle. En d'autres termes, d'après le théorème du n° 16, la courbe d'ordre $4m+2$ qui correspond à notre fonction Θ impaire est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m+2$, menée par trois coniques singulières qui font partie d'un même groupe de Rosenhain (¹).

Nous savons (n° 7), ce qui se déduirait d'ailleurs aisément des résultats géométriques précédents, que, dans le cas où $\omega\theta+\omega'\theta'$ est pair, les courbes qui correspondent aux Θ pairs, d'ordre $2m+1$ et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, passent par six points singuliers situés dans un même plan singulier, et que celles qui correspondent aux Θ impairs de même ordre et de même caractéristique passent par les dix autres points singuliers.

2° Le cas où $\omega\theta+\omega'\theta'$ est impair donne lieu à des raisonnements identiques; il suffit d'échanger partout les mots *pair* et *impair*.

30. Nous pouvons maintenant énoncer les propositions suivantes, qui donnent la détermination géométrique et la classification des courbes d'un degré fixé à l'avance, sur la surface de Kummer.

Les courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer sont de degré pair.

(¹) D'après le n° 21, ces trois coniques sont trois coniques quelconques, passant par un même point singulier.

Les courbes d'ordre $4m$ tracées sur la surface *se répartissent en 32 familles :*

1° *Une famille de courbes dont chacune est l'intersection complète et indécomposable de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m générale. L'équation des courbes de cette famille dépend linéairement de* $2m^2+1$ *paramètres;*

2° *Une famille, que nous appellerons* singulière, *de courbes passant par les seize points singuliers, dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m+2$, *menée par quatre coniques singulières appartenant à un même groupe de Rosenhain, d'ailleurs arbitraire. L'équation des courbes de la famille singulière dépend linéairement de* $2m^2-3$ *paramètres* (¹);

3° *Trente familles, deux à deux associées, de courbes dont chacune passe par huit points singuliers et constitue l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m+1$, *menée par deux coniques singulières. L'équation des courbes de chaque famille dépend linéairement de* $2m^2-1$ *paramètres.*

Les courbes d'une de ces familles passant par huit points singuliers, les courbes de la famille associée passent par les huit autres. Chaque famille est liée à un octaèdre de Göpel.

Les courbes d'ordre $4m+2$ tracées sur la surface *se répartissent en 32 familles.*

1° *Seize familles de courbes passant par six points singuliers et dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m+1$ *menée par une conique singulière. L'équation des courbes de chaque famille dépend de* $2m^2+2m$ *paramètres;*

2° *Seize familles de courbes passant par dix points singuliers et dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m+2$, *menée par trois coniques singulières qui ont en commun un point singulier. L'équation générale des courbes de chaque famille dépend linéairement de* $2m^2+2m-1$ *paramètres.*

Chacune des seize familles de la première espèce est associée à une

---

(¹) Pour $m=1$, c'est-à-dire pour les courbes d'ordre quatre, la famille singulière n'existe pas (nº 28).

famille de la seconde espèce d'après la loi suivante : les courbes de la première famille passent par six points singuliers situés sur une même conique, les courbes de la famille associée passent par les dix autres points singuliers.

Dans ces énoncés, quand nous disons que l'équation d'une famille de courbes dépend linéairement de k paramètres, nous entendons que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 \Theta_1(u, v) + \lambda_2 \Theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{k+1} \Theta_{k+1}(u, v) = 0,$$

les λ étant des constantes arbitraires, et les Θ des fonctions normales de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires.

31. *Remarque.* — Les courbes d'ordre $4m$ ou $4m+2$ dont on vient de donner la détermination sur la surface de Kummer sont les plus générales de leur degré et n'ont pas de points multiples, si l'on ne particularise pas les fonctions thêta correspondantes.

Il est intéressant d'étudier la nature des points multiples qu'elles peuvent présenter en un des points singuliers de la surface; nous choisirons le point $u=0$, $v=0$, mais nos raisonnements s'étendraient sans difficulté à tous les autres.

Considérons les fonctions $\Theta_m(u, v)$, d'ordre m, normales, de caractérisque donnée, paires ou impaires.

Si elles ne s'annulent pas toutes pour $u=0$, $v=0$, elles sont paires et, par suite, celles d'entre elles qui deviennent nulles au point $(0, 0)$ ont aussi leurs dérivées premières, par rapport à u et à v, nulles au même point. On voit ainsi que les courbes de la famille correspondante ne passent pas toutes par le point $(0, 0)$, mais que celles qui y passent y ont un point double, et plus généralement un point multiple d'ordre pair.

Si les fonctions $\Theta_m(u, v)$ s'annulent toutes pour $u=0$, $v=0$, elles sont impaires, et les courbes correspondantes, qui passent toutes par le point $(0, 0)$, ne peuvent avoir en ce point qu'un point multiple d'ordre impair.

Ainsi :

Les courbes d'un même ordre et d'une même famille, qui passent

par un point singulier de la surface de Kummer, ont en ce point un point multiple d'ordre impair ou d'ordre pair, selon que toutes les courbes de la famille passent ou ne passent pas par ce point.

Dans cet énoncé, le point multiple d'ordre impair peut être un point simple.

Ce résultat permet de déterminer la famille à laquelle appartient une courbe de la surface de Kummer lorsque l'on connaît l'ordre de multiplicité des seize points singuliers sur cette courbe.

Ainsi, une courbe d'ordre $4m$ ayant un point double en chacun des seize points singuliers est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m passant par ces points, etc.

32. Étant données deux courbes d'un même ordre et d'une même famille, il est clair que le produit des fonctions Θ correspondantes est toujours une fonction Θ normale paire, d'ordre pair, à caractéristique nulle : donc (n° 16) ces deux courbes constituent l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique. Ainsi :

Par deux courbes tracées sur la surface de Kummer, de même degré, $2p$, et appartenant à la même famille, on peut toujours faire passer une surface d'ordre p, ne coupant plus la surface de Kummer en dehors de ces courbes.

Soient

$$\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1} = 0,$$
$$\mu_1\Theta_1 + \ldots\ldots\ldots + \mu_{k+1}\Theta_{k+1} = 0$$

les équations des deux courbes considérées.

Les produits Θ_i et Θ_j étant (n° 16) des fonctions entières, d'ordre p, des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, d'un point de la surface de Kummer, l'équation de la surface d'ordre p qui passe par les deux courbes s'obtiendra en remplaçant dans l'équation développée :

$$(\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1})(\mu_1\Theta_1 + \ldots + \mu_{k+1}\Theta_{k+1}) = 0,$$

les produits Θ_i^2 et $\Theta_i\Theta_j$ par leurs valeurs en fonction entière des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

Dans le cas où les deux courbes coïncident, on obtiendra par ce

procédé l'équation d'une surface d'ordre p inscrite à la surface de Kummer le long de la courbe unique considérée (n° 17).

Il va sans dire que si p est égal ou supérieur à 4, on pourra ajouter aux premiers membres des équations des surfaces ainsi obtenues une expression de la forme $K\varphi_{p-4}$, K étant le premier membre de l'équation de la surface de Kummer, et φ_{p-4} un polynome homogène quelconque d'ordre $p-4$ en x_1, x_2, x_3, x_4.

Surfaces inscrites à la surface de Kummer.

33. Soit l'équation d'une courbe d'ordre $2p$

$$\lambda_1\,\Theta_1(u, v) + \ldots + \lambda_{k+1}\,\Theta_{k+1}(u, v) = 0,$$

celle de la surface inscrite d'ordre p correspondante sera, comme on vient de le dire, de la forme

$$(10) \qquad \lambda_1^2 A_{11} + 2\lambda_1\lambda_2 A_{12} + \lambda_2^2 A_{22} + \ldots + \lambda_{k+1}^2 A_{k+1.k+1} = 0,$$

les A étant des polynomes d'ordre p en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette équation, si l'on y fait varier les paramètres λ, représente une famille de surfaces d'ordre p, qui sont toutes inscrites à la surface de Kummer le long des courbes d'ordre $2p$ appartenant à la même famille.

D'après cela, en appelant *surface inscrite* à la surface de Kummer une surface qui touche celle-ci en tous ses points de rencontre avec elle, on voit que la théorie des familles de surfaces inscrites est la même que celle des courbes algébriques de la surface, et qu'on peut énoncer les propositions suivantes :

Il existe trente-deux familles de surfaces d'ordre $2m$ *inscrites à la surface de Kummer.*

Les surfaces de la première famille sont inscrites suivant les courbes d'ordre $4m$ *de la première famille; leur équation générale est de la forme*

$$(11) \qquad A_m^2 + K\varphi_{2m-4} = 0,$$

où A_m et φ_{2m-4} sont des polynomes arbitraires en x_1, x_2, x_3, x_4, d'ordre marqué par l'indice; K est toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer.

Les surfaces de la deuxième famille sont inscrites le long des courbes

d'ordre $4m$ *de la famille singulière; leur équation générale est de la forme* (10), *où* $k = 2m^2 - 3$ [1].

Les surfaces des trente dernières familles sont inscrites le long des courbes d'ordre $4m$ *des trente dernières familles; leur équation générale est, pour les surfaces inscrites d'une même famille, de la forme* (10) *où* k *a la valeur* $2m^2 - 1$.

De même :

Il existe trente-deux familles de surfaces d'ordre $2m + 1$ *inscrites à la surface de Kummer, le long des trente-deux familles de courbes d'ordre* $4m + 2$ *de cette surface.*

L'équation générale des surfaces inscrites de l'une des seize premières familles est de la forme (10), *où* k *a la valeur* $2m^2 + 2m$; *celle des surfaces inscrites de l'une des seize dernières familles est de la même forme,* k *ayant la valeur* $2m^2 + 2m - 1$.

34. Soient $A = 0$ et $C = 0$ deux surfaces inscrites du même ordre et d'une même famille; leurs deux courbes de contact sont (n° 32) sur une surface $B = 0$, de même ordre, h, que les premières.

Si dans A on remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par les coordonnées d'un point de la surface de Kummer, exprimées en fonction hyperelliptique de u et v, et si l'on fait la même substitution dans B et dans C, on trouve, d'après le n° 32,

$$A = \Theta_1^2(u, v), \qquad C = \Theta_2^2(u, v), \qquad B = \Theta_1 \Theta_2,$$

Θ_1 et Θ_2 étant des fonctions thêta; on a donc identiquement, en tout point de la surface de Kummer,

$$AC - B^2 = 0,$$

et, par suite, en réintroduisant dans A, B, C les coordonnées courantes, on obtient l'*identité*

$$AC - B^2 = KD,$$

où D est un polynome entier d'ordre $2h - 4$ en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette identité a lieu *pour tous les points de l'espace;* elle nous sera très utile dans la suite.

---

[1] Pour $m = 1$, cette famille de surfaces inscrites n'existe pas.

35. Il est intéressant de remarquer que le nombre des familles de surfaces d'ordre p inscrites à la surface de Kummer est précisément égal à celui des familles de courbes d'ordre p inscrites à une courbe du quatrième degré, à un point double : par conséquent, si l'on considère la section de la surface de Kummer par un de ses plans tangents, on obtiendra *toutes* les courbes inscrites à cette section en coupant, par le même plan, toutes les surfaces inscrites à la surface de Kummer [1].

La proposition ne serait plus vraie si, au lieu de la section par un plan tangent, on considérait une section plane quelconque.

CHAPITRE III.

BIQUADRATIQUES SITUÉES SUR LA SURFACE DE KUMMER ET QUADRIQUES INSCRITES A CETTE SURFACE.

36. Après les coniques, les courbes de plus petit degré que l'on rencontre sur la surface de Kummer sont du quatrième ordre : il n'y a (n° 30) que trente et une familles de courbes de cet ordre; la première se compose de l'ensemble des sections planes; les trente autres, dont nous allons maintenant aborder l'étude, sont composées de *biquadratiques*, car deux courbes *quelconques* d'une même famille étant (n° 32) sur une quadrique, chacune de ces courbes est la base d'un faisceau ponctuel de surfaces du second ordre.

Les biquadratiques d'une même famille sont (n° 30) les intersections de la surface de Kummer avec les quadriques passant par deux coniques

---

[1] Nous renverrons, pour le nombre des familles de courbes d'ordre p inscrites à une quartique plane, possédant un point double, à notre Mémoire sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à la Géométrie* (4e série de ce Journal, t. II). Il résulte des formules données aux nos 39 et 43 de ce Mémoire qu'il existe seize systèmes de courbes d'ordre p inscrites à la quartique, chaque système se décomposant en deux familles, soit en tout trente-deux familles. Si p est pair, $p = 2m$, un des seize systèmes, est particulièrement remarquable : la première des deux familles de ce système comprend les courbes d'ordre m du plan comptées deux fois, et correspond à la première famille (11) de surfaces d'ordre $2m$ inscrites à la surface de Kummer; la seconde famille du système correspond à notre seconde famille (ou singulière) de surfaces inscrites.

singulières : en particulier, ces deux coniques constituent une biquadratique de la famille. Nous savons (n° 28) que, pour la définition géométrique d'une famille de courbes d'ordre $4m$, on peut remplacer les deux coniques primitives par trois autres couples de coniques, les plans de quatre couples formant un octaèdre de Göpel; il en résulte que, dans une même famille de biquadratiques, figurent quatre couples de coniques.

Le long de toute biquadratique on peut (n° 17) *inscrire à la surface de Kummer une surface du second ordre;* nous trouvons ainsi trente familles de quadriques inscrites, dont chacune comprend quatre couples de plans singuliers, formant un octaèdre de Göpel [1].

Les biquadriques et, par suite, les quadriques inscrites d'une même famille passent par les huits points singuliers communs aux couples de plans de l'octaèdre qui correspond à la famille.

Les trente familles sont deux à deux associées (n° 30), de telle sorte que les octaèdres correspondant à deux familles associées n'ont aucun plan singulier commun.

Pour définir une famille de quadriques inscrites, il suffit de connaître l'octaèdre de Göpel qui lui correspond; or nous avons trouvé au n° 24 trois types de notations pour les octaèdres.

Dans le premier type, que nous désignerons par le symbole (entre crochets) $[\alpha\beta\alpha'\beta']$, les quatre couples des plans singuliers sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \beta\beta', \quad \alpha\beta' \text{ et } \beta\alpha', \quad \gamma\gamma' \text{ et } \delta\delta', \quad \gamma\delta' \text{ et } \delta\gamma';$$

les huit points singuliers communs à ces quatre couples sont

$$(\alpha\gamma'),\ (\alpha\delta'),\ (\beta\gamma'),\ (\beta\delta'),\ (\gamma\alpha'),\ (\gamma\beta'),\ (\delta\alpha'),\ (\delta\beta')$$ [2].

Dans le second type, que nous désignerons par le symbole $[\alpha'\beta']$, les couples de plans sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \alpha\beta', \quad \beta\alpha' \text{ et } \beta\beta', \quad \gamma\alpha' \text{ et } \gamma\beta', \quad \delta\alpha' \text{ et } \delta\beta',$$

et les huit points ont les mêmes symboles que ces huit plans.

---

[1] MM. Rohn et Darboux ont établi l'existence des trente systèmes de quadriques inscrites, dont M. Darboux a fait connaître plusieurs propriétés géométriques que nous retrouvons plus loin (*Voir* Rohn, *Math. Annalen*, t. XV, p. 351; Darboux, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 686).

[2] D'après cela, les symboles $[\alpha\beta\alpha'\beta']$ et $[\gamma\delta\gamma'\delta']$ désignent le même octaèdre.

Enfin, dans le troisième type, auquel nous attacherons le symbole $[\alpha\beta]$, les couples de plans sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \beta\alpha', \quad \alpha\beta' \text{ et } \beta\beta', \quad \alpha\gamma' \text{ et } \beta\gamma', \quad \alpha\delta' \text{ et } \beta\delta',$$

et les huit points ont les mêmes symboles.

Nous désignerons dans ce qui suit par *plans singuliers d'une famille* de quadriques inscrites les huit plans qui font partie de cette famille; par *points singuliers d'une famille* les huit points par lesquels passent les quadriques inscrites de la famille; nous représenterons une famille de biquadratiques ou de quadriques inscrites par le symbole de l'octaèdre correspondant, tel que $[\alpha\beta]$.

Il est clair que la famille associée de $[\alpha\beta]$ est $[\gamma\delta]$, de même que la famille associée de $[\alpha'\beta']$ est $[\gamma'\delta']$; enfin les familles $[\alpha\beta\alpha'\beta']$ et $[\alpha\beta\gamma'\delta']$ sont associées.

37. Cela posé, on vérifie aisément, à l'aide des notations symboliques, les propositions suivantes :

1° *Les biquadratiques d'une même famille ont deux points singuliers communs avec tout plan singulier n'appartenant pas à la famille*, d'où il suit que ces courbes coupent le plan considéré en *deux* points mobiles.

D'ailleurs toute courbe tracée sur la surface de Kummer touche nécessairement un plan singulier en tous les points, non singuliers, où elle le rencontre, et dès lors les biquadratiques d'une famille touchent en un point les huit plans singuliers qui ne font pas partie de la famille; donc :

Les quadriques inscrites d'une même famille touchent les huit plans singuliers de la famille associée.

2° *Deux familles de quadriques inscrites, non associées, ont en commun quatre plans et quatre points singuliers;* mais *deux cas* sont ici à distinguer.

Dans le *premier cas*, les quatre plans singuliers communs forment un *tétraèdre de Rosenhain*, dont les sommets sont les quatre points singuliers communs. Ainsi, les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha\gamma]$ ont en commun le tétaèdre de Rosenhain : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$.

Dans le *second cas*, les quatre plans singuliers communs forment un *groupe de Göpel*, et appartiennent à une troisième famille; ainsi les

familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha'\beta']$ ont en commun les quatre plans $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, qui appartiennent à la famille $[\alpha\beta\alpha'\beta']$. Quant aux quatre points communs aux deux premières familles, ils forment aussi un groupe de Göpel et appartiennent à la famille associée de $[\alpha\beta\alpha'\beta']$.

On trouve sans difficulté à l'aide de la notation symbolique qu'*une famille de quadriques inscrites a en commun*, *avec* douze *autres familles, quatre plans singuliers formant un groupe de Göpel; avec* seize *autres*, *quatre plans singuliers formant un groupe de Rosenhain:* la trentième famille est l'*associée* de la première.

Ainsi, les douze familles qui ont en commun avec $[\alpha\beta]$ un groupe de Göpel de plans singuliers sont :

$$[\alpha'\beta'],\quad [\gamma'\delta'],\quad [\alpha'\gamma'],\quad [\beta'\delta'],\quad [\alpha'\delta'],\quad [\beta'\gamma'],$$
$$[\alpha\beta\alpha'\beta'],\quad [\alpha\beta\gamma'\delta'],\quad [\alpha\beta\alpha'\gamma'],\quad [\alpha\beta\beta'\delta'],\quad [\alpha\beta\alpha'\delta'],\quad [\alpha\beta\beta'\gamma'].$$

Les autres familles (l'associée $[\gamma\delta]$ exceptée) ont en commun avec $[\alpha\beta]$ quatre plans formant un groupe de Rosenhain.

3° *Deux biquadratiques appartenant respectivement à deux familles associées se coupent en quatre points mobiles :* cela résulte de la formule de M. Poincaré, car, d'après cette formule, deux fonctions Θ du second ordre ont huit zéros communs; les deux Θ qui correspondent à deux biquadratiques étant des fonctions soit paires, soit impaires, les huit zéros communs sont deux à deux égaux et de signes contraires, et ne donnent dès lors que quatre points de la surface de Kummer.

Deux biquadratiques appartenant à deux familles non associées se coupent en deux points mobiles : car, parmi les huit zéros communs aux deux fonctions Θ correspondantes, figurent *quatre* demi-périodes, donnant les *quatre* points singuliers communs aux deux courbes; les quatre autres zéros, deux à deux égaux et de signes contraires, donnent *deux* points de la surface de Kummer.

En d'autres termes :

Deux quadriques inscrites, *appartenant respectivement à deux familles associées*, *se touchent en quatre points*, *et se coupent dès lors suivant quatre droites.* (DARBOUX.)

Deux quadriques inscrites, *appartenant respectivement à deux familles non associées se touchent en deux points.*

Nous allons faire voir que, dans ce dernier cas, les deux quadriques

se coupent suivant *deux coniques*, ou suivant *une droite et une cubique*, selon que les quatre plans singuliers qui leur sont communs forment un groupe de Göpel ou un groupe de Rosenhain.

38. Considérons d'abord *un groupe de Göpel de plans singuliers;* soient $x=0, y=0, z=0, t=0$ les équations de ces quatre plans; $V=0$ celle de la quadrique qui contient (n° 23) leurs coniques de contact avec la surface de Kummer; l'équation de celle-ci est de la forme

$$(12) \qquad K = V^2 - xyzt = 0.$$

Les quadriques représentées par l'équation

$$\lambda^2 yz + 2\lambda V + xt = 0,$$

où λ est un paramètre variable, sont inscrites à la surface de Kummer, $K=0$, puisque leur enveloppe a pour équation $V^2 - xyzt = 0$, et cette famille de quadriques comprend évidemment les deux couples de plans $yz=0$ et $xt=0$. Les équations

$$\mu^2 zx + 2\mu V + yt = 0,$$
$$\varpi^2 xy + 2\varpi V + zt = 0,$$

où μ et ϖ sont des paramètres variables, représentent aussi des quadriques inscrites à $K=0$, et chacune de ces nouvelles familles comprend, comme la première, les quatre plans $x=0, y=0, z=0, t=0$.

Nous avons ainsi les équations de trois familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer, et ayant en commun un groupe de Göpel de plans singuliers; il est clair d'ailleurs, pour que $K=0$ soit une surface de Kummer, que les coefficients de V doivent vérifier certaines conditions, mais ces conditions sont inutiles à préciser pour ce qui suit. Posons, pour abréger,

$$A = \lambda^2 yz + 2\lambda V + xt,$$
$$B = \mu^2 zx + 2\mu V + yt,$$
$$C = \varpi^2 xy + 2\varpi V + zt,$$

et

$$\varphi = \lambda yz + \mu zx + \varpi xy,$$
$$\psi = \lambda\mu z + \lambda\varpi y + \mu\varpi x,$$
$$S = V(t + \psi) + t\varphi + \lambda\mu\varpi xyz,$$
$$G = 8\lambda\mu\varpi V + 4\lambda\mu\varpi\varphi - (t - \psi)^2,$$

on a *identiquement*

$$ABC - S^2 = KG.$$

On a également les identités

$$4\mu\varpi A = G + (t - \psi + 2\mu\varpi x)^2,$$
$$4\lambda\varpi B = G + (t - \psi + 2\lambda\varpi y)^2,$$
$$4\lambda\mu C = G + (t - \psi + 2\lambda\mu z)^2.$$

Ces dernières relations montrent que les quadriques A, B, C sont circonscrites à la quadrique G, et se coupent deux à deux suivant deux coniques; la première identité fait voir que les trois coniques de contact des quadriques A, B, C, avec la quadrique G, sont sur une surface cubique, $S = 0$, qui passe par les biquadratiques de contact des trois premières quadriques avec la surface de Kummer, $K = 0$. On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Soient deux familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer et ayant en commun quatre plans singuliers formant un groupe de Göpel; ces quatre plans appartiennent à une troisième famille de quadriques inscrites.

Trois quadriques inscrites quelconques, appartenant respectivement à ces trois familles, ont leurs biquadratiques de contact avec la surface de Kummer situées sur une même surface cubique, qui coupe en outre chacune d'elles suivant une conique; il existe une surface du second ordre inscrite aux trois quadriques le long des trois coniques ainsi déterminées.

Les trois quadriques se coupent deux à deux suivant deux coniques.

39. Les identités précédentes donnent encore lieu à d'autres conséquences.

Les deux quadriques A et B se touchent en deux points situés sur la droite $t - \psi + 2\mu\varpi x = 0$; $t - \psi + 2\lambda\varpi y = 0$, qui rencontre évidemment la droite $x = 0$, $y = 0$, et aussi, en vertu de l'expression de ψ, la droite $t = 0$, $z = 0$: donc les trois quadriques A, B, C se touchent deux à deux en deux points, situés d'ailleurs sur la surface de Kummer, et les trois droites qui joignent les points de contact d'un même couple s'appuient sur deux arêtes opposées du tétraèdre de référence. De plus, ces trois droites concourent au point d'intersection des trois plans

$$t - \psi + 2\mu\varpi x = 0, \qquad t - \psi + 2\lambda\varpi y = 0, \qquad t - \psi + 2\lambda\mu z = 0,$$

c'est-à-dire au point

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\varpi} = \frac{t}{\lambda\mu\varpi}.$$

Inversement, si ce point est donné arbitrairement, on déterminera les quadriques A, B, C, qui lui correspondent, par les relations

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y} = \frac{\varpi}{z} = \frac{\lambda\mu\varpi}{t}$$

qui donnent, pour λ, μ, ϖ, deux systèmes de solutions (en écartant la solution $\lambda = \mu = \varpi = 0$),

$$\lambda^2 = \frac{tx}{yz}, \qquad \mu = \lambda\frac{y}{x}, \qquad \varpi = \lambda\frac{z}{x}.$$

Observant que la quadrique $G = 0$ touche évidemment la surface de Kummer aux six points de contact des quadriques A, B, C deux à deux, on déduit de cette analyse les conséquences suivantes :

Trois quadriques inscrites à la surface de Kummer, et appartenant respectivement à trois familles qui ont en commun quatre plans singuliers formant un tétraèdre de Göpel, se touchent deux à deux en deux points; les trois droites qui joignent les trois couples de points de contact sont concourantes et s'appuient respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre; de plus, en ces six points de contact, une même quadrique (celle qui est inscrite aux trois quadriques primitives) *touche la surface de Kummer.*

Inversement, *trois droites menées par un point quelconque de l'espace et s'appuyant respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre de Göpel de plans singuliers, coupent, au total, la surface de Kummer en douze points, qui se partagent en deux groupes de six points, situés par couple sur les trois droites considérées : les six points de chaque groupe sont les points de contact de la surface de Kummer avec une surface du second ordre* [1].

40. Considérons maintenant deux familles de quadriques inscrites à

[1] Ce théorème et celui du n° 36 s'appliquent, avec de simples modifications de langage, à toutes les surfaces du quatrième ordre représentées par une équation de la forme (12), puisque c'est cette forme qui a servi de base à nos calculs.

la surface de Kummer et ayant en commun *quatre plans formant un groupe de Rosenhain;* par exemple, les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha\gamma]$, qui ont en commun les quatre plans $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$: remarquons que les quatre autres plans singuliers de la famille $[\alpha\beta]$ et les quatre autres plans de la famille $[\alpha\gamma]$, à savoir : $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\beta\delta'$ et $\gamma\alpha'$, $\gamma\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\gamma\delta'$, appartiennent à une même famille $[\beta\gamma]$, et l'on vérifie aisément que c'est là un fait général.

Cela posé, soit un des quatre plans communs aux deux familles considérées primitivement, $\alpha\alpha'$ par exemple; ce plan, associé au plan $\beta\alpha'$, forme une quadrique de la première famille, $[\alpha\beta]$, et, associé au plan $\gamma\alpha'$, une quadrique de la deuxième famille, $[\alpha\gamma]$; les deux plans $\beta\alpha'$ et $\gamma\alpha'$ forment une quadrique de la famille $[\beta\gamma]$ (n° 36).

Désignons maintenant par $z=0$, $y=0$, $x=0$ les équations respectives des trois plans $\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$: ces trois plans se coupent au point singulier $(\delta\alpha')$, et, par suite, leurs coniques de contact avec la surface Kummer ne peuvent être sur une même quadrique.

L'équation de la surface de Kummer pourra se mettre sous l'une des trois formes

$$L^2 - lyz = 0, \qquad M^2 - mzx = 0, \qquad N^2 - nxy = 0,$$

L, M, N, l, m, n étant des polynomes du second ordre en x, y, z, t. On pourra évidemment disposer des facteurs constants qui figurent dans ces polynomes pour qu'on ait identiquement

$$L^2 - lyz = M^2 - mzx = N^2 - nxy.$$

On en déduit

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx),$$

ce qui montre que $L - M$ ou $L + M$ est divisible par z. On a ainsi

$$L \pm M = 2rz, \qquad M \pm N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy,$$

p, q, r étant linéaires en x, y, z, t. Comme L, M, N ne figurent dans l'équation de la surface de Kummer que par leurs carrés, ils ne sont déterminés qu'au signe près et l'on peut écrire, sans diminuer la généralité,

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy.$$

On a donc deux cas à distinguer.

Si l'on prend le signe — dans $N \pm L$, on écrira, en changeant pour

la symétrie les signes de M et p

$$\mathrm{L}-\mathrm{M}=2rx, \qquad \mathrm{M}-\mathrm{N}=2px, \qquad \mathrm{N}-\mathrm{L}=2qy,$$

d'où

$$px+qy+rz=0;$$

c'est-à-dire

$$2p=cy-bz, \qquad 2q=az-cx, \qquad 2r=bx-ay,$$

a, b, c désignant des constantes. On en conclut

$$\mathrm{L}-ayz=\mathrm{M}-bzx=\mathrm{N}-cxy,$$

et, en appelant V la valeur commune de ces expressions, les trois formes de l'équation de Kummer deviennent

$$\mathrm{V}^2-l'yz=0, \qquad \mathrm{V}^2-m'zx=0, \qquad \mathrm{V}^2-n'xy=0,$$

l', m', n' étant des polynomes du second ordre. On en déduit de suite

$$l'=\mathrm{T}x, \qquad m'=\mathrm{T}y, \qquad n'=\mathrm{T}z,$$

T étant du premier ordre, et la surface de Kummer a pour équation

$$\mathrm{V}^2-xyz\mathrm{T}=0.$$

Les trois coniques de contact des plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ sont sur une quadrique, $\mathrm{V}=0$: c'est le cas examiné plus haut, ce n'est pas celui dans lequel nous nous sommes supposés placés; nous devons donc admettre la seconde hypothèse, celle où l'on a

$$\mathrm{L}+\mathrm{M}=2rz, \qquad \mathrm{M}+\mathrm{N}=2px, \qquad \mathrm{N}+\mathrm{L}=2qy,$$

qui donne

$$\mathrm{L}=qy+rz-px, \qquad \mathrm{M}=rz+px-qy, \qquad \mathrm{N}=px+qy-rz.$$

La relation

$$\mathrm{L}^2-\mathrm{M}^2=z(ly-mx)$$

devient alors

$$4r(qy-px)=ly-mx,$$

et, de même, on a

$$4p(rz-qy)=mz-ny,$$

d'où l'on tire

$$\frac{l-4rq}{x}=\frac{m-4rp}{y}=\frac{n-4pq}{z},$$

et, par suite,

$$l=\theta x+4rq, \qquad m=\theta y+4rp, \qquad n=\theta z+4pq,$$

θ étant linéaire en x, y, z, t. L'équation de la surface de Kummer, $L_\zeta - lyz = 0$, est alors

$$\theta xyz = p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2pqxy - 2prxz - 2qryz. \tag{13}$$

Les trois familles de quadriques inscrites auxquelles appartiennent respectivement les couples de plans $yz = 0$, $zx = 0$, $xy = 0$ ont pour équations, en désignant par λ, μ, ϖ des constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} A &= \lambda^2 yz + 2\lambda(qy + rz - px) + 4rq + \theta x = 0, \\ B &= \mu^2 zx + 2\mu(rz + px - qy) + 4pr + \theta y = 0, \\ C &= \varpi^2 xy + 2\varpi(px + qy - rz) + 4pq + \theta z = 0; \end{aligned}$$

car on vérifie de suite que l'enveloppe des surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ est bien la surface (13).

Ces équations montrent que toute quadrique A coupe toute quadrique B ou C suivant une droite et une cubique gauche; on a, en effet, identiquement,

$$Ay - Bx = (\lambda y + \mu x + 2r)[z(\lambda y - \mu x) + 2(qy - px)].$$

Or le plan

$$0 = \lambda y + \mu x + 2r$$

touche A, car on vérifie immédiatement que la droite de ce plan, $\lambda y + 2r = 0, x = 0$ est sur la quadrique A; ce plan touche de même la quadrique B. Il résulte de ces remarques et de l'identité précédente que les deux quadriques A et B ont une droite commune, située dans le plan $\lambda y + \mu x + 2r = 0$; on verrait de même que les surfaces A, B, C se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique.

La biquadratique de contact de la surface $A = 0$ et de la surface de Kummer est donnée par les deux équations

$$\lambda yz + qy + rz - px = 0, \qquad \lambda(qy + rz - px) + 4rq + \theta x = 0.$$

Or, considérons le polynome du troisième ordre,

$$\begin{aligned} S = {} & (\lambda yz + qy + rz - px)(2\varpi r + 2\mu q + \mu\varpi x - \theta) \\ & - (\lambda qy + \lambda rz - \lambda px + 4rq + \theta x)(\varpi y + \mu z + 2p). \end{aligned}$$

D'après la forme même de son équation, la surface cubique, $S = 0$, passe par la biquadratique de contact de la quadrique A avec la sur-

face de Kummer : si nous développons cette équation nous trouvons

$$\begin{aligned} S = &+ \lambda\mu\varpi xyz + \lambda yz(\mu q + \varpi r - \theta) + 2qy(\mu q - \lambda p - \varpi r) \\ &- \lambda\varpi q y^2 \quad + \mu zx(\lambda p + \varpi r - \theta) + 2rz(\varpi r - \mu q - \lambda p) \\ &- \lambda\mu r z^2 \quad + \varpi xy(\lambda p + \mu q - \theta) + 2px(\lambda p - \mu q - \varpi r) \\ &- \mu\varpi p x^2 \quad - t(px + qy + rz) - 8pqr. \end{aligned}$$

On voit ainsi que S est symétrique par rapport à x, y, z ; p, q, r ; λ, μ, ϖ ; c'est-à-dire ne change pas quand on permute x, y, z en permutant de la même manière p, q, r et λ, μ, ϖ, et laissant θ invariable : il résulte de cette remarque que la surface $S = 0$ passe par les courbes de contact de la surface de Kummer avec les *trois* quadriques A, B, C.

Cette surface cubique, $S = 0$, coupe A, en dehors de la biquadratique de contact, suivant une conique ; comme on peut écrire identiquement

$$\begin{aligned} S = &(\lambda yz + qy + rz - px) \\ &\times (\mu\varpi x + \lambda\varpi y + \lambda\mu z + 2\lambda p + 2\mu q + 2\varpi r - \theta) \\ &- A(\mu z + \varpi y + 2p), \end{aligned}$$

le plan de cette conique a pour équation

$$P = \mu\varpi x + \lambda\varpi y + \lambda\mu z + 2\lambda p + 2\mu q + 2\varpi r - \theta = 0.$$

Cette équation est encore symétrique en x, y, z ; p, q, r ; λ, μ, ϖ ; il en résulte que les trois coniques suivant lesquelles la surface $S = 0$ coupe les trois quadriques A, B, C sont dans un même plan, $P = 0$.

Or la section de la surface $S = 0$ par ce plan est du troisième degré ; on déduit de là, en se rappelant que les quadriques A, B, C se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique, que le plan $P = 0$ coupe $S = 0$ suivant trois droites, qui sont les droites communes aux surfaces A, B, C prises deux à deux.

Ce résultat peut d'ailleurs se vérifier directement sans dificulté.

On a ainsi les propositions suivantes :

Soient deux familles, F_1 *et* F_2, *de quadriques inscrites à la surface de Kummer, ayant en commun quatre plans singuliers formant un groupe de Rosenhain ; les quatre autres plans singuliers de chacune de ces familles appartiennent à une troisième famille* F_3.

Trois quadriques inscrites quelconques, appartenant respectivement à ces trois familles, se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique

gauche; les trois droites, communes à ces quadratiques prises deux à deux, sont dans un même plan.

Les biquadratiques de contact des trois quadriques avec la surface de Kummer sont sur une même surface du troisième ordre, qui passe en outre par les trois droites précédentes (¹).

41. *Remarque.* — Les notations que nous avons adoptées pour représenter les plans singuliers de la surface de Kummér sont liées d'une manière très étroite à l'algorithme de Hesse pour la représentation des bitangentes d'une courbe plane du quatrième ordre.

Soient huit caractères 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′ : combinés deux à deux sans distinction entre les caractères accentués et ceux non accentués, ils donnent vingt-huit symboles, 12, 13, ..., 11′, ..., 3′4′, qui, dans la notation de Hesse, représentent respectivement les vingt-huit bitangentes d'une quartique, et les symboles peuvent être appliqués aux bitangentes de manière à vérifier les conditions suivantes.

On sait que la courbe du quatrième ordre admet soixante-trois systémes de coniques inscrites, c'est-à-dire la touchant chacune en quatre points; chacun de ces systèmes comprend six couples de bitangentes, qui, dans la notation de Hesse, correspondent à deux types de symboles.

Dans le premier type, on obtient les six couples de bitangentes en divisant les huit caractères en deux groupes de quatre, et en combinant deux à deux les caractères de chaque groupe; ainsi, en partant de la division 1231′, 42′3′4′, on obtient les six couples 12,31′; 13,21′; 11′,23; 42′,3′4′; 43′,2′4′; 44′,2′3′.

Le système de coniques inscrites correspondant, c'est-à-dire le systéme auquel appartiennent les six couples précèdents, pourra se désigner par [1231′].

Dans le second type, on obtient les six couples de bitangentes d'un même système en combinant deux des caractères, 1 et 2 par exemple, avec les six autres, ce qui donne les six couples 12,23; 14,24; 11′,21′; 12′,22′; 13′,23′; 14′,24′, et le système de coniques inscrites correspondant pourra se dèsigner par le symbole [12].

(¹) On a des propriétés semblables pour les surfaces du quatrième ordre dont l'équation peut se mettre sous la forme (13).

Cela posé, la relation entre la notation de Hesse et la nôtre est la suivante : la section de la surface de Kummer par un plan admet pour tangentes doubles les intersections de ce plan avec les seize plans singuliers; on peut appliquer la notation de Hesse, de telle sorte que ces seize bitangentes aient les mêmes symboles que les seize plans singuliers correspondants dans notre notation.

Ainsi la bitangente située dans le plan $11'$ aura la notation $11'$. On vérifie cette règle sans difficulté, en partant des propriétés des familles de quadriques inscrites.

On voit aussi que les notations, dans le système de Hesse, des trente familles de coniques inscrites qui sont les sections, par le plan considéré, des trente familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer, coïncident avec les notations que nous avons proposées pour ces familles de quadriques.

CHAPITRE IV.

SEXTIQUES ET SURFACES INSCRITES DU TROISIÈME ORDRE.

42. Il y a, sur la surface de Kummer, trente-deux familles de courbes du sixième ordre ou *sextiques*, se partageant en deux groupes de seize familles chacun (n° 30).

Les courbes du premier groupe, que nous allons tout d'abord étudier, sont les intersections de la surface de Kummer avec des quadriques menées par une des seize coniques singulières; à chaque conique singulière correspond ainsi une famille de sextiques, que nous représenterons par le symbole même de cette conique, $\alpha\alpha'$.

L'équation générale des sextiques d'une famille $\alpha\alpha'$ est de la forme (n° 30)

$$\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\lambda_3\theta_3+\lambda_4\theta_4+\lambda_5\theta_5=0,$$

les λ étant des constantes arbitraires et les θ des fonctions thêta normales, du troisième ordre, de même caractéristique, simultanément paires ou impaires, qui s'annulent pour les six demi-périodes correspondant aux points singuliers du plan $\alpha\alpha'$, points qui sont situés sur toutes les sextiques de la famille $\alpha\alpha'$.

Un plan singulier, autre que $\alpha\alpha'$, passe par deux des points singu-

liers situés dans ce plan; il en résulte, par la répétition d'un raisonnement fait n° 37, que toutes les sextiques de la famille $\alpha\alpha'$ touchent en *deux* points chacun des quinze plans singuliers autres que $\alpha\alpha'$.

Le long de chaque sextique de la famille on peut inscrire à la surface de Kummer une surface cubique (n° 17), qui, d'après ce qui précède, touchera en *deux* points les plans singuliers, le plan $\alpha\alpha'$ excepté, c'est-à-dire aura une droite dans chacun de ces plans.

Deux sextiques de la famille $\alpha\alpha'$ se coupent en six points en dehors des six points singuliers qui leur sont communs; en effet, les deux fonctions Θ correspondantes ont $2.3.3 = 18$ zéros communs; si l'on retranche les six demi-périodes relatives aux six points singuliers du plan $\alpha\alpha'$, il reste douze zéros, deux à deux égaux et de signes contraires, qui donnent six points de la surface de Kummer.

Ces six derniers points sont sur une conique, car les deux quadriques qui passent respectivement par les deux sextiques considérées se coupent, en dehors de la conique $\alpha\alpha'$, suivant une deuxième conique.

Les surfaces du troisième ordre inscrites à la surface de Kummer le long des deux sextiques précédentes se touchent donc en six points, situés dans un même plan, et ont, par suite, en commun, dans ce plan, une courbe du troisième ordre.

Parmi les surfaces cubiques inscrites le long des sextiques de la famille $\alpha\alpha'$, et que nous appellerons *surfaces inscrites* de la famille $\alpha\alpha'$, figurent des groupes de trois plans singuliers : on les obtient en menant par la conique $\alpha\alpha'$ des quadriques coupant la surface de Kummer suivant trois nouvelles coniques; les plans de ces trois coniques forment évidemment une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$. Le nombre de ces surfaces décomposables est, d'après cela (n° 25), égal au nombre des groupes de Göpel qui comprennent le plan singulier $\alpha\alpha'$: comme il y a soixante groupes de Göpel, chaque plan singulier appartient à $\frac{4.60}{16} = 15$ de ces groupes, et il y a, dans la famille $\alpha\alpha'$, 15 surfaces cubiques inscrites composées de trois plans singuliers.

Une quelconque de ces surfaces décomposables a, comme on vient de le dire, une cubique plane commune, avec une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$: cette cubique plane se décompose nécessairement en trois droites; en d'autres termes, on peut dire que les quinze droites

qu'une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$ a respectivement dans les quinze plans singuliers autres que le plan $\alpha\alpha'$ sont réparties trois à trois dans quinze plans ([1]).

Voici quelques propositions géométriques relatives à ces quinze plans, qui sont des *plans tritangents* de la surface cubique inscrite considérée.

Soient $\mathfrak{S}(u, v)$ la fonction du premier ordre qui correspond au plan $\alpha\alpha'$; $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ les quatre fonctions normales du second ordre à caractéristique nulle qui sont proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface de Kummer.

Les fonctions Θ, d'ordre trois, qui correspondent aux sextiques $\alpha\alpha'$, ont (n° 29) même caractéristique que la fonction $\mathfrak{S}$, et sont paires ou impaires en même temps qu'elle; il en résulte qu'on obtiendra quatre de ces fonctions, linéairement indépendantes, en multipliant $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ par $\mathfrak{S}$. Si maintenant nous désignons par θ_5 une autre fonction du troisième ordre, de même caractéristique, et paire ou impaire en même temps que $\mathfrak{S}$, l'équation d'une sextique $\alpha\alpha'$ sera de la forme

$$\theta_5 = \lambda_1 \mathfrak{S}\Theta_1 + \lambda_2 \mathfrak{S}\Theta_2 + \lambda_3 \mathfrak{S}\Theta_3 + \lambda_4 \mathfrak{S}\Theta_4, \tag{1}$$

les λ étant des constantes.

Soit une autre sextique

$$\theta_5 = \lambda'_1 \mathfrak{S}\Theta_1 + \lambda'_2 \mathfrak{S}\Theta_2 + \lambda'_3 \mathfrak{S}\Theta_3 + \lambda'_4 \mathfrak{S}\Theta_4, \tag{1'}$$

il vient, en retranchant ces équations membre à membre,

$$0 = [(\lambda_1 - \lambda'_1)\Theta_1 + \ldots + (\lambda_4 - \lambda'_4)\Theta_4]\mathfrak{S}.$$

Le plan

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)x_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)x_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)x_3 + (\lambda_4 - \lambda'_4)x_4 = 0$$

est donc celui qui passe par les six points non singuliers communs aux deux sextiques (1) et (1').

La seconde sextique se décompose en trois coniques singulières pour quinze systèmes de valeurs des λ'; pour un de ces systèmes de valeurs, le plan précédent étant, d'après ce qui a été dit plus haut, un plan tritangent de la surface cubique inscrite le long de la sextique (1), il s'ensuit que quinze des plans tritangents de cette surface auront des équa-

([1]) Ces quinze droites forment la figure obtenue en enlevant parmi les vingt-sept droites d'une surface cubique, douze droites d'un même double-six.

tions de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = \mathrm{A}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 15),$$

les A_i étant des fonctions linéaires des x, dont les coefficients ne dépendent pas des λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.

Ces équations sont linéaires en $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, et, en retranchant membre à membre deux quelconques d'entre elles, on trouve une expression indépendante de λ; les quinze plans se coupent donc deux à deux sur des plans fixes, $\mathrm{A}_i - \mathrm{A}_j = 0$; quant au fait que les λ figurent linéairement, on peut en déduire aussi quelques conséquences géométriques. En effet, l'équation de la quadrique qui passe par la conique $\mathfrak{S} = 0$ et par la sextique donnée par la relation (1) s'obtient en multipliant les deux membres de cette relation par $\mathfrak{S}$ et en remplaçant ensuite les fonctions $\mathfrak{S}\theta_5$, $\mathfrak{S}^2\Theta_1$, ... par leurs expressions en fonction quadratique de x_1, x_2, x_3, x_4 : cette équation est donc linéaire par rapport aux λ, et de la forme

$$(2) \qquad \mathrm{R}_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4)\,\mathrm{R}_1;$$

les R sont des polynomes en x, de degré égal à l'indice; $\mathrm{R}_1 = 0$ est le plan de la conique $\mathfrak{S} = 0$. Donc, si l'on établit entre les λ deux relations linéaires, homogènes ou non, à coefficients constants, cela revient à écrire que la quadrique (2) passe, en outre, par deux points fixes de l'espace, et réciproquement; si l'on établit trois relations linéaires entre les λ, on exprime de même que la quadrique précédente passe par trois points fixes, et réciproquement. Les équations des quinze plans tritangents, si l'on y remplace deux ou trois des λ en fonction linéaire des autres, deviennent alors

$$\lambda_1 \mathrm{P}_1 + \lambda_2 \mathrm{P}_2 = \mathrm{A}_i + \mathrm{P}_3 \qquad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$\lambda_1 \mathrm{Q}_1 = \mathrm{A}_i + \mathrm{Q}_2 \qquad \text{dans le second cas,}$$

les P et Q étant linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 et restant les mêmes dans les quinze équations. Donc, dans le premier cas, les quinze plans tritangents pivotent respectivement autour de quinze points fixes qui sont sur la droite $\mathrm{P}_1 = 0$, $\mathrm{P}_2 = 0$; et dans le second cas, autour de quinze droites fixes, qui sont dans le plan $\mathrm{Q}_1 = 0$. D'ailleurs l'équation (2) de la quadrique devient

$$\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1 \mathrm{P}_3 = (\lambda_1 \mathrm{P}_1 + \lambda_2 \mathrm{P}_2)\,\mathrm{R}_1 \qquad \text{dans le premier cas.}$$

et

$$R_2 + R_1 Q_2 = \lambda_1 Q_1 R_1 \qquad \text{dans le second.}$$

On voit ainsi que les deux points fixes par lesquels passe cette quadrique, dans le premier cas, sont sur la droite $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, et que les trois points fixes par lesquels elle passe, dans le second, sont dans le plan $Q_1 = 0$.

43. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude du premier groupe de sextiques et de surfaces cubiques inscrites, et nous énoncerons les propriétés que nous venons d'établir, dans le résumé suivant :

Soit C *une conique de la surface de Kummer; les quadriques menées par* C *coupent en outre la surface suivant une famille quatre fois infinie de sextiques, le long de chacune desquelles on peut inscrire à la surface de Kummer une surface du troisième ordre.*

Deux de ces surfaces inscrites se touchent en six points situés sur une conique et ont en commun une cubique plane dans le plan de cette conique.

Toute surface cubique inscrite, de la famille considérée, a une droite dans chacun des plans singuliers de la surface de Kummer autres que le plan de la conique C; *ces quinze droites sont trois à trois dans quinze nouveaux plans, qui sont, par suite, des plans tritangents de la surface cubique.*

Pour une surface cubique inscrite, variant dans la même famille, les quinze plans tritangents ainsi définis se coupent deux à deux sur des plans fixes.

Par la conique C *et par deux points* A *et* B *de l'espace, faisons passer des quadriques, et considérons, le long des courbes qu'elles découpent sur la surface de Kummer, les surfaces cubiques inscrites à celle-ci : pour chacune de ces surfaces, les quinze plans tritangents définis plus haut pivotent respectivement autour de quinze points, alignés sur la droite* AB.

Si les quadriques qui passent par la conique C *passent par trois points de l'espace* A, B, D, *les quinze plans précédents pivotent respectivement autour de quinze droites, situées dans le plan des points* A, B, D.

44. Arrivons maintenant à l'étude du *second groupe de familles de sextiques* qu'on peut tracer sur la surface de Kummer.

Chacune de ces familles s'obtient par l'intersection de la surface avec des surfaces du troisième ordre menées par trois coniques singulières

qui ont un point singulier commun; soit $\mathfrak{S} = 0$ l'équation de la conique $\alpha\alpha'$ qui forme avec les trois précédentes un groupe de Rosenhain; l'équation des sextiques de la famille considérée sera (n° 29) de la forme

$$(3) \qquad \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 = 0,$$

les λ étant des constantes et les θ des fonctions normales, d'ordre trois, de même caractéristique que $\mathfrak{S}$, toutes impaires si $\mathfrak{S}$ est pair, et toutes paires si $\mathfrak{S}$ est impair.

Ces courbes passent (n° 29) par les dix points singuliers qui ne sont pas dans le plan $\alpha\alpha'$; chacun des quinze plans singuliers autres que $\alpha\alpha'$ les coupe donc en quatre points singuliers et les touche par suite en un point; quant au plan $\alpha\alpha'$, il les touche évidemment en trois points, situés sur la conique $\alpha\alpha'$.

Les surfaces cubiques, inscrites le long des sextiques considérées, passent donc par les dix points singuliers qui ne sont pas dans le plan $\alpha\alpha'$, et admettent ce plan pour plan tritangent, les trois points de contact étant sur la conique $\alpha\alpha'$; elles touchent en un point les quinze autres plans singuliers.

Deux sextiques de la famille (3) *se coupent*, en dehors des dix points singuliers qui leur sont communs, *en quatre points :* en effet, les premiers membres des équations des deux courbes ont, d'après la formule de M. Poincaré, $2.3.3 = 18$ solutions communes, parmi lesquelles figurent dix demi-périodes; les huit autres solutions, deux à deux égales et de signes contraires, donnent quatre points de la surface de Kummer.

45. Cela posé, soient $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ les surfaces cubiques inscrites à la surface de Kummer le long de deux sextiques, s_1 et s_2; $S = 0$ la surface cubique qui passe par ces deux courbes; on a identiquement (n° 34)

$$(4) \qquad S_1 S_2 - S^2 = KG,$$

G étant du second ordre par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, et K désignant toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer.

De cette identité découlent des conséquences nombreuses et importantes.

46. Observons d'abord que les surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$ n'ont pas, en général, de courbe commune. Pour démontrer cette proposition, il suffit de la vérifier dans un cas particulier, celui, par exemple, où la surface S_2 se décompose en trois plans singuliers, formant avec le plan $\alpha\alpha'$ un groupe de Rosenhain; on voit alors de suite que les trois surfaces n'ont pas de courbe commune.

Cela posé, l'*identité* (4) montre d'abord que les points, en nombre égal à 27, communs aux trois surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$, sont des points doubles de la surface $KG = 0$: or, ces trois surfaces passent d'abord par dix mêmes points singuliers de la surface de Kummer; de plus, elles se touchent en chacun des quatre autres points communs aux deux sextiques s_1 et s_2; il est clair, d'ailleurs, qu'elles n'ont pas d'autre point commun sur la surface de Kummer. Les points qui précèdent comptent pour $10 + 4.4 = 26$ points d'intersection; les trois surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$ ont donc un vingt-septième point commun, non situé sur $K = 0$, et ce point, étant un point double de la surface $KG = 0$, est un point double de la quadrique $G = 0$: celle-ci est donc un cône du second ordre.

L'*identité* (4) montre en second lieu que le cône $G = 0$ touche la surface de Kummer en chacun des quatre points communs aux deux sextiques s_1 et s_2, en dehors des points singuliers : la proposition est évidente.

47. En troisième lieu, le cône $G = 0$, en vertu de l'*identité*, est inscrit à chacune des deux surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, le long de la courbe, non située sur $K = 0$, où cette surface, S_1 ou S_2, est coupée par $S = 0$. La courbe commune à S_1 et S comprend la sextique s_1, située sur la surface de Kummer, et une cubique gauche : le cône $G = 0$ touche donc, suivant une cubique gauche, chacune des deux surfaces S_1, S_2.

Remarquons maintenant que l'équation de la surface $S = 0$, lorsque la surface S_1 est donnée, dépend linéairement de quatre coefficients, c'est-à-dire de trois paramètres : soient, en effet,

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 + \mu_4\theta_4 = 0$$

les deux équations des deux sextiques s_1 et s_2; la surface $S = 0$ qui passe par ces deux sextiques aura une équation de la forme

$$\Sigma\Sigma\lambda_i\mu_k A_{ik} = 0,$$

(n° 32), les A_{ih} étant des polynomes d'ordre trois par rapport aux coordonnées. Si les λ sont donnés, cette équation est linéaire et homogène par rapport aux quatre coefficients μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.

Il y a donc une infinité *triple* et linéaire de surfaces, $S=0$, passant par la courbe de contact des surfaces $K=0$ et $S_1=0$; comme parmi les surfaces $S=0$ figure évidemment la surface S_1, il en résulte que les surfaces $S=0$ découpent sur S_1 une infinité *double* de cubiques gauches variables. En d'autres termes, on peut tracer sur S_1 une double infinité de courbes le long de chacune desquelles un cône du second ordre est circonscrit : la réciproque de la surface S_1 admet donc une infinité double de coniques; c'est, par suite, d'après un théorème de M. Darboux, une surface de Steiner, et la surface S_1 est *une surface du troisième ordre à quatre points doubles* (1).

48. Ce résultat peut être retrouvé et complété par une autre voie : en effet, l'identité (4) montre que les points communs aux trois surfaces $S=0$, $K=0$, $G=0$ sont des points doubles de la surface $S_1S_2=0$. Or les surfaces $S=0$, $K=0$ se coupent suivant les deux sextiques s_1 et s_2, qui ont, en dehors des points singuliers de la surface de Kummer, quatre points communs p_1, p_2, p_3, p_4; la surface $G=0$ passe par ces quatre points et touche, en chacun d'eux, les surfaces $S=0$, $K=0$, comme nous l'avons vu. Chacune des deux sextiques, s_1 et s_2 coupe donc le cône $G=0$ en $2.6-8=4$ points, différents des quatre points $p_1, \ldots, p_4$; nous obtenons ainsi, en dehors des points p_i, huit points, qui sont, d'après ce qui précède, des points doubles de la surface $S_1S_2=0$. Quatre de ces points sont sur la sextique s_1 et les quatre autres sur la sextique s_2; pour démontrer que les quatre premiers sont des points doubles de S_1 et les quatre seconds des points doubles de S_2, il suffira donc d'établir que, en général, aucun d'eux n'est situé à la fois sur S_1 et sur S_2.

Or les points communs à S_1 et S_2, et situés sur la surface de Kummer, sont : 1° les quatre points p_1, ..., p_4; 2° dix points singuliers. Nous savons que les huit points trouvés plus haut diffèrent, en général, des quatre points p_1, ..., p_4; pour montrer qu'ils diffèrent des points sin-

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 370.

guliers, il suffit d'établir, puisqu'ils sont sur le cône $G = 0$, que ce cône ne passe par aucun des dix points singuliers considérés.

Soit un de ces points singuliers, que nous supposerons placé à l'origine O des coordonnées, dans le système de coordonnées cartésiennes non homogènes. La surface S_1, étant inscrite à la surface de Kummer et passant par le point O, y touche nécessairement un des plans tangents de cette dernière surface au même point. Soit $x = 0$ ce plan ; soit de même $y = 0$ le plan tangent en O à la surface S_2 : ces deux plans touchent, suivant deux génératrices, le cône des tangentes de la surface de Kummer au point O, et il est clair que le plan des deux génératrices de contact touche en O la surface $S = 0$, qui passe par les deux courbes de contact des surfaces S_1 et S_2, avec la surface de Kummer : soit $z = 0$ ce troisième plan. Les termes de moindre degré dans les polynomes S_1, S_2 et S sont respectivement x, y et z; les termes de moindre degré dans $S_1S_2 - S^2$ sont donc $xy - z^2$: l'origine est donc un point double, et seulement double, de la surface $S_1S_2 - S^2 = 0$, c'est-à-dire de $KG = 0$. Comme ce point est double pour la surface $K = 0$, par hypothèse, il ne saurait être sur la surface $G = 0$.

Nous voyons ainsi que la surface $S_1 = 0$ a *quatre points doubles* et que ces points sont *sur la surface de Kummer*.

49. Les propositions qu'on vient d'établir peuvent se résumer ainsi :

La surface de Kummer admet seize familles de surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles (¹).

Les points doubles de ces surfaces sont sur la surface de Kummer.

Les surfaces inscrites d'une même famille sont en nombre trois fois infini; elles passent par les dix points doubles de la surface de Kummer qui ne sont pas situés dans un des plans singuliers de cette surface, et elles admettent ce plan pour plan tritangent; elles touchent simplement les quinze autres plans singuliers.

Deux surfaces inscrites d'une même famille se touchent en quatre points de la surface de Kummer; il existe un cône du second ordre tangent à

(¹) M. Darboux a fait connaître, sans démonstration et sans détails, que la surface de Kummer admet des surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re série, t. I, p. 355).

celle-ci en ces quatre points, et circonscrit à chacune des deux surfaces cubiques considérées [1].

50. *Remarque.* — Une surface du troisième ordre à quatre points doubles est, comme on sait, représentable point par point sur un plan, de telle sorte que les sections planes aient pour image des courbes du troisième ordre passant par les six sommets d'un quadrilatère complet [2]. Ces sommets sont les images des droites qui joignent les points doubles de l'espace deux à deux, et les droites du plan sont celles des cubiques gauches le long desquelles on peut circonscrire à la surface des cônes du second ordre. Il en résulte aisément qu'une surface quelconque du troisième ordre menée par une de ces cubiques coupe, en outre, la surface à quatre points doubles suivant une sextique, dont l'image est une courbe du quatrième ordre qui passe par les six sommets du quadrilatère. La sextique de l'espace rencontre par suite en un point, distinct des points doubles, chacune des droites joignant ceux-ci deux à deux.

En faisant application de ce résultat à une surface S_1, à quatre points doubles, inscrite à la surface de Kummer, on voit que chacune des droites qui joignent les quatre points doubles deux à deux rencontre en un nouveau point la sextique de contact, et *touche* par suite en ce point la surface de Kummer.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre points doubles de S_1 ; désignons par a_{ij} le point où la droite $a_i a_j$ touche la surface de Kummer.

On sait qu'une surface cubique à quatre points doubles n'a, en dehors des droites qui joignent ceux-ci deux à deux, que trois droites, situées dans un même plan tritangent : soient p, q, r les sommets du triangle, formé par ces trois droites. Le long de la droite qui joint deux points doubles, la surface admet un plan tangent unique, soit en tout six plans tangents remarquables, dont il passe deux par chacune des trois droites pq, pr, qr.

---

(1) On peut dire aussi que *deux sextiques d'une même famille, passant par dix points singuliers, se coupent en outre en quatre points ; en ces quatre points les plans tangents à la surface de Kummer sont concourants et touchent un même cône du second ordre qui passe par les quatre points.*

(2) Voir par exemple LAGUERRE, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 21.

Pour la surface S_1, le plan tritangent est celui d'une conique singulière, $\alpha\alpha'$; les points p, q, r sont sur cette conique (n° 44), et il est clair que le plan tangent unique le long de la droite $a_i a_j$ touche la surface de Kummer au point a_{ij}.

Cela posé, observons que les points a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent se déduire des points p, q, r par la construction suivante :

Pour chacune des droites pq, pr, rq, on peut mener à la surface de Kummer *deux* plans tangents distincts du plan $\alpha\alpha'$; les six points de contact de ces plans sont, d'après ce qui précède, les points a_{ij}; de plus, le plan tangent en a_{ij} contenant la droite $a_i a_j$ et, par suite, les points a_i et a_j, on voit que les six plans tangents précédents se rencontrent trois à trois, sur la surface de Kummer, en quatre points qui sont les points a_1, a_2, a_3, a_4.

Remarquons maintenant que les points p, q, r peuvent être choisis arbitrairement sur la conique $\alpha\alpha'$: on peut, en effet, par trois points quelconques de cette conique mener une sextique de la famille considérée (c'est-à-dire passant par les dix points singuliers non situés dans le plan $\alpha\alpha'$), puisque l'équation générale (3) des sextiques de la famille renferme trois paramètres; la surface cubique inscrite le long de cette sextique touchera le plan $\alpha\alpha'$ aux trois points choisis.

Donc enfin *le tétraèdre* dont les sommets sont a_1, a_2, a_3, a_4 est *inscrit par ses sommets et circonscrit par ses six arêtes à la surface de Kummer*, et il y a un nombre *triplement infini* de tels tétraèdres. Ce fait constitue un théorème : en effet, les tétraèdres inscrits à une surface dépendent de huit paramètres; en exprimant que les six arêtes touchent la surface, on a six conditions, et, par suite, le nombre des tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à une surface quelconque est doublement infini [1].

51. Nous pouvons donc énoncer les propositions qui suivent :

Il existe seize familles de tétraèdres inscrits par leurs sommets et cir-

---

[1] M. Klein a donné une proposition de même nature pour les tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs faces à la surface de Kummer; ces tétraèdres sont en nombre cinq fois infini (*Math. Annalen*, t. XXVII, p. 111).

conscrits par leurs arêtes à une surface de Kummer, chaque famille comprenant un nombre triplement infini de tétraèdres.

On obtient les tétraèdres d'une même famille par la construction suivante. Soient trois points quelconques d'une même conique de la surface de Kummer : par les trois droites qui les joignent deux à deux passent au total six plans tangents de la surface, distincts du plan de la conique; ces six plans se coupent trois à trois sur la surface de Kummer en quatre nouveaux points qui sont les sommets d'un des tétraèdres cherchés. Les six points de contact des arêtes du tétraèdre avec la surface coïncident avec les six points de contact des plans tangents précédents.

Les sommets d'un des tétraèdres sont les points doubles d'une surface cubique inscrite à la surface de Kummer.

Nous retrouverons ces tétraèdres par une voie analytique dans un des Chapitres suivants.

52. Les surfaces cubiques inscrites, à quatre points doubles, peuvent se réduire à des *surfaces réglées* dans le cas suivant :

Supposons que, dans le plan de la conique $\alpha\alpha'$, un des sommets, p par exemple, du triangle pqr, coïncide avec un des six points singuliers situés sur cette conique : les deux plans tangents [1] autres que $\alpha\alpha'$, menés à la surface de Kummer par la droite pq, sont confondus et leur position commune est celle du plan tangent Q, autre que $\alpha\alpha'$, qu'on peut mener par la droite pq au cône des tangentes au point p. Il en est de même des deux plans tangents passant par pr, qui sont confondus en un plan R, et, par suite, les quatre points doubles de la surface cubique inscrite correspondant au triangle pqr sont deux à deux confondus et se réduisent ainsi aux deux points distincts, non singuliers, où la surface de Kummer est coupée par la droite D, commune aux plans Q et R. Cette surface cubique passant, d'ailleurs, comme dans le cas général, par les droites pq et pr, et passant évidemment aussi par la droite D, a un nouveau point double au point p, commun à ces trois droites, puisque celles-ci ne sont pas dans un même plan. Il en résulte que la droite D, sur laquelle la surface a trois points doubles, est une *droite double* de

---

[1] Nous admettons ici, ce qui est d'ailleurs évident, que la surface de Kummer est de quatrième classe; nous l'avons déjà admis au n° 50.

cette surface qui se réduit dès lors à une *surface réglée du troisième ordre*.

La directrice rectiligne simple que rencontrent toutes les droites de la surface est évidemment qr.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Parmi les surfaces cubiques d'une même famille inscrites à la surface de Kummer et passant par les dix points doubles non situés dans un plan singulier, P, *celles qui passent, en outre, par un quelconque des six points doubles situés dans ce plan sont des surfaces réglées : pour chacune d'elles, la directrice double passe par le point double considéré, la directrice simple est dans le plan* P.

La liaison entre la directrice double et la directrice simple est celle qui a été indiquée plus haut, entre les droites D et qr.

Les génératrices rectilignes d'une de ces surfaces réglées inscrites sont évidemment des bitangentes de la surface de Kummer.

CHAPITRE V.

COURBES DU HUITIÈME ORDRE ET SURFACES INSCRITES DU QUATRIÈME ORDRE.

53. Les trente-deux familles de *courbes du huitième ordre* situées sur la surface de Kummer se divisent, d'après la théorie générale du n° 28, en *trois groupes :*

1° Les courbes suivant lesquelles la surface est coupée par les quadriques de l'espace. Ces courbes ne présentent aucune particularité intéressante.

2° La famille que nous avons appelée *singulière* (n° 30), et qui est formée de courbes passant par les seize points doubles de la surface de Kummer; nous l'étudierons en dernier lieu.

3° *Trente* familles, deux à deux associées, de courbes passant par huit points doubles, et dont nous allons nous occuper maintenant.

54. L'équation des courbes de l'une de ces trente familles est (n° 30) de la forme

$$\lambda_1 \theta_1' + \lambda_2 \theta_2' + \ldots + \lambda_8 \theta_8', \tag{5}$$

les λ étant des constantes arbitraires, et les θ' des fonctions d'ordre quatre, normales, toutes paires ou toutes impaires, de même caractéristique non nulle.

Il est aisé de voir qu'on peut exprimer ces fonctions à l'aide des fonctions normales du second ordre.

Soient, en effet, θ_1 et θ_2 deux fonctions quelconques, linéairement indépendantes, d'ordre deux, ayant même caractéristique que les θ', et paires ou impaires selon que les θ' sont pairs ou impairs; soient toujours Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les fonctions normales d'ordre deux. de caractéristique nulle, qui sont proportionnelles aux coordonnées d'un point de la surface de Kummer; les huit fonctions

$$\begin{matrix} \theta_1\Theta_1, & \theta_1\Theta_2, & \theta_1\Theta_3, & \theta_1\Theta_4, \\ \theta_2\Theta_1, & \theta_2\Theta_2, & \theta_2\Theta_3, & \theta_2\Theta_4 \end{matrix}$$

sont d'ordre quatre; elles ont même caractéristique que les θ' et sont paires ou impaires en même temps que ces dernières fonctions. De plus, elles sont linéairement indépendantes, car, s'il existait une relation de la forme

$$\theta_1(a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4) = 0.$$

on en déduirait que la courbé $\theta_1 = 0$, qui est une biquadratique quelconque, différente de la courbe $\theta_2 = 0$, serait dans le plan

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$

ce qui est impossible.

Par conséquent, les huit fonctions θ' sont des combinaisons linéaires et homogènes des huit fonctions $\theta_k\Theta_l$ précédentes, et l'équation générale des courbes du huitième ordre de la famille considérée sera de la forme

$$\begin{aligned} (6) \qquad & \theta_1(a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4) \\ & + \theta_2(b_1\Theta_1 + b_2\Theta_2 + b_3\Theta_3 + b_4\Theta_4) = 0, \end{aligned}$$

les a et b étant des constantes arbitraires.

Cette forme met en évidence une propriété importante des courbes correspondantes : c'est que chacune de celles-ci admet *une sécante quadruple*, ayant pour équations

$$\begin{aligned} P &= \alpha_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0. \\ Q &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0, \end{aligned}$$

et que tout plan, $\lambda P + \mu Q = 0$, mené par cette sécante, coupe en outre la courbe en quatre points situés sur une même biquadratique, $\mu\theta_1 - \lambda\theta_2 = 0$.

Il est aisé de voir que la courbe étudiée n'a qu'*une seule sécante quadruple*. En effet, cette courbe est (n° 30) sur une surface du troisième ordre, passant par deux coniques C_1 et C_2 de la surface de Kummer. Les deux coniques C_1 et C_2, se coupant en deux points, sont rencontrées l'une ou l'autre par vingt-six des droites de la surface cubique; la vingt-septième droite est celle qui s'appuie sur les deux droites (concourantes) situées dans les plans de C_1 et C_2; elle ne rencontre ni C_1 ni C_2 et coupe, par suite, la surface de Kummer en quatre points qui sont sur la courbe proposée. Inversement, toute droite coupant cette courbe en quatre points doit être sur la surface du troisième ordre, et, par suite, il n'existe, comme nous l'avions annoncé, qu'une seule sécante quadruple.

L'analyse conduirait aisément au même résultat.

55. Les courbes de la famille (6) passent par les huit points singuliers de la surface de Kummer qui sont communs aux couples d'un octaèdre de Göpel (n° 30); donc chacune d'elles *touche en deux points* non singuliers *les plans de cet octaèdre*, et *en trois points* non singuliers *les plans de l'octaèdre associé*.

Deux courbes de la famille se rencontrent, en dehors des huit points singuliers qui leur sont communs en $\frac{1}{2}[2.4.4 - 8] = 12$ points de la surface de Kummer; on le démontre à l'aide de la formule de M. Poincaré en répétant un raisonnement fait plusieurs fois.

Les douze points non singuliers communs aux deux courbes

$$(6) \qquad \theta_1(a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4) = 0,$$

$$(6') \qquad \theta_1(a'_1\Theta_1 + \ldots + a'_4\Theta_4) + \theta_2(b'_1\Theta'_1 + \ldots + b'_4\Theta'_4) = 0$$

sont sur la quadrique $PQ' - QP' = 0$, P et Q ayant la signification indiquée plus haut, et P', Q' étant définis de la même manière avec les a' et les b'.

Le long de chaque courbe (6) on peut inscrire à la surface de Kummer une infinité de *surfaces du quatrième ordre* formant un faisceau ponctuel, et *touchant*, d'après ce qui précéde, *huit des plans singuliers en deux points et les huit autres en trois points*.

56. Parmi ces surfaces inscrites du quatrième ordre il en est de particulièrement intéressantes, que l'on obtient comme il suit.

Nous savons (n° 16) que les fonctions θ_1^2, $\theta_1\theta_2$, θ_2^2 sont des fonctions quadratiques entières de Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, que nous désignerons respectivement par A_1, A_{12} et A_2; élevons maintenant au carré l'expression

$$\theta_1(a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4),$$

et remplaçons, dans le développement $\theta_1^2, \theta_1\theta_2$, θ_2^2 par leurs valeurs précédentes, en substituant à Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4; nous obtenons une expression S

$$S = A_1 P^2 + 2 A_{12} PQ + A_2 Q^2$$

qui, égalée à zéro, représente une surface du quatrième ordre, $S = 0$, inscrite à la surface de Kummer le long de la courbe (6).

Cette surface a la *droite double* $P = 0$, $Q = 0$, qui est la sécante quadruple de la courbe de contact.

L'enveloppe des surfaces $S = 0$, c'est-à-dire la surface de Kummer, a évidemment pour équation

$$A_{12}^2 - A_1 A_2 = 0.$$

Les surfaces du quatrième ordre qui touchent la surface de Kummer, le long de la même courbe que la surface $S = 0$, ont pour équation

$$(7) \qquad A_1 P^2 + 2 A_{12} PQ + A_2 Q^2 + \lambda (A_{12}^2 - A_1 A_2) = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. Cette équation peut s'écrire, au facteur près $-\frac{1}{\lambda}$,

$$(Q^2 - A_1\lambda)(P^2 - A_2\lambda) - [A_{12}\lambda + PQ]^2 = 0,$$

ce qui montre que, si λ n'est ni nul ni infini, la surface (7) a *huit points doubles* situés sur les trois quadriques

$$Q^2 - A_1\lambda = 0, \qquad P^2 - A_2\lambda = 0, \qquad A_{12}\lambda + PQ = 0.$$

Ces huit points sont d'ailleurs sur la surface $A_{12}^2 - A_1 A_2 = 0$, c'est-à-dire sur la surface de Kummer : on le voit en éliminant P, Q et λ entre les trois dernières équations.

57. De toute cette analyse résultent les énoncés suivants :

Soit F *une des trente familles de courbes du huitième ordre déterminées,*

sur la surface de Kummer, par des surfaces cubiques passant par deux coniques singulières; les courbes de la famille F *passent toutes par huit points singuliers, situés sur les couples de plans d'un même octaèdre de Göpel; elles touchent en deux points non singuliers les plans de cet octaèdre et en trois points non singuliers les plans de l'octaèdre associé.*

Toute courbe de la famille F *a une et une seule sécante quadruple; chaque plan mené par cette sécante coupe en outre la courbe en quatre points qui sont situés sur une biquadratique de la surface de Kummer, passant par les huit points singuliers communs aux courbes de la famille* F.

Deux courbes de la famille ont, en dehors des points singuliers, douze points communs qui sont situés sur une quadrique passant en outre par les deux sécantes quadruples des deux courbes.

Le long de chaque courbe de la famille on peut inscrire à la surface de Kummer une infinité de surfaces d'ordre 4 formant un faisceau, et qui ont chacune, sur la courbe considérée, huit points doubles, variables d'une surface à l'autre.

Parmi ces surfaces, il en est une qui a pour droite double la sécante quadruple de la courbe considérée, sans avoir généralement de point multiple en dehors de cette droite.

58. Il nous reste à étudier les courbes du huitième ordre appartenant à la *famille singulière*, c'est-à-dire (n° 30) déterminées sur la surface de Kummer par une surface du quatrième ordre, menée par les quatre coniques singulières d'un groupe de Rosenhain.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous nous bornerons à une étude sommaire, nous réservant de revenir, par d'autres méthodes, sur ces courbes intéressantes.

Les courbes du huitième ordre de la famille singulière *passent par les seize points singuliers* de la surface de Kummer et, par suite, *touchent* en un point mobile *chacun des seize plans singuliers.*

Réciproquement, toute courbe du huitième ordre tracée sur la surface de Kummer et passant simplement par les seize points doubles, appartient à la famille singulière (n° 31).

Deux courbes de la famille se coupent, comme on le voit par la formule de M. Poincaré, *en* $\frac{1}{2}(2.4.4-16)=8$ *points mobiles.*

Soient $S_1=0$ et $S_2=0$ deux surfaces du quatrième ordre, circonscrites à la surface de Kummer le long de deux courbes s_1 et s_2 de la

famille singulière; $S=0$ une surface du même ordre passant par ces deux courbes (n° 34); on a identiquement

$$S_1 S_2 = S^2 + KG,$$

G étant un polynome d'ordre 4 en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette identité montre que les points communs aux surfaces $S=0$, $K=0$, $G=0$ sont des points doubles de la surface $S_1 S_2 = 0$.

Or on démontre sans difficulté, en appliquant les méthodes suivies aux nos 46-48, que les trois surfaces $S=0$, $S_1=0$, $S_2=0$ n'ont pas, en général, de courbe commune, et que la surface $G=0$ ne passe pas par les points singuliers de la surface de Kummer.

Cela posé, nous savons que la surface $S=0$ coupe $K=0$ suivant deux courbes s_1 et s_2 d'ordre 8, qui passent par les seize points singuliers et ont huit autres points communs p_1, p_2, ..., p_8 : en ces huit derniers points, les surfaces $S_1=0$, $S_2=0$, $S=0$, $K=0$, $G=0$ sont tangentes, comme le montre l'identité précédente; la courbe s_1 touche donc en chacun d'eux la surface $G=0$, qu'elle coupe par suite en $4.8-2.8=16$ points distincts des points $p_1, p_2, \ldots, p_8$. Ces seize nouveaux points sont, d'après ce qui a été dit, des points doubles de la surface $S_1 S_2 = 0$; ils ne sont pas situés sur la surface $S_2=0$, car la courbe s_1 ne rencontre cette dernière qu'aux points p_1, p_2, ..., p_8 et aux seize points singuliers de la surface de Kummer; ils sont donc des points doubles de la surface $S_1=0$. Celle-ci est donc une surface du quatrième ordre à *seize points doubles*, c'est-à-dire une surface de Kummer; les seize points doubles sont sur la surface de Kummer primitive.

Donc :

Les surfaces générales du quatrième ordre inscrites à la surface de Kummer le long des courbes du huitième ordre de la famille singulière sont des surfaces de Kummer, ayant leurs seize points doubles sur la surface de Kummer primitive.

D'après cela, la courbe de contact des deux surfaces de Kummer passe par les points doubles de la seconde, comme elle passait déjà par les points doubles de la première; il en résulte qu'elle appartient à la famille singulière sur l'une et sur l'autre, et qu'elle touche les plans singuliers des deux surfaces. En d'autres termes :

Deux surfaces de Kummer étant inscrites l'une à l'autre, les points sin-

guliers de l'une sont sur l'autre, et les plans singuliers de l'une touchent l'autre en des points situés sur la courbe de contact.

On peut compléter ces résultats en établissant, par la méthode suivie au n° 46, que la surface G est aussi une surface du quatrième ordre à seize points doubles, c'est-à-dire une surface de Kummer; elle est circonscrite à S_1 et S_2, les courbes de contact étant sur S.

M. Klein est arrivé, par des considérations fondées sur la *Liniengeometrie* à démontrer l'existence des surfaces de Kummer inscrites à une surface de Kummer donnée; il en a déduit des conséquences nombreuses et remarquables pour la configuration que forment, sur cette dernière, les seize points ou les seize plans singuliers d'une surface de Kummer inscrite (¹). Nous n'insisterons donc pas sur un sujet traité à fond par l'éminent géomètre; nous nous bornerons, plus tard, à examiner certains cas particuliers dans lesquels les surfaces de Kummer inscrites dégénèrent en surfaces à lignes multiples.

CHAPITRE VI.

SECTIONS DE LA SURFACE DE KUMMER PAR SES PLANS TANGENTS.

59. Soit $\mathfrak{S}(u, v)$ la fonction normale du premier ordre de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, qui s'annule (n° 7) pour les six demi-périodes

$$0,\ 0;\qquad 0,\ \pi i;\qquad \frac{b}{2},\ \pi i+\frac{c}{2};\qquad \pi i+\frac{b}{2},\ \frac{c}{2};$$
$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}+\frac{c}{2};\qquad \pi i+\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}+\frac{c}{2}.$$

Si l'on désigne par λ et μ deux constantes, la fonction

$$\theta(u, v)=\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)\,\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu)$$

est une fonction paire de u et v, puisque $\mathfrak{S}(u, v)$ est une fonction impaire. D'ailleurs $\theta(u, v)$ est évidemment une fonction *normale*, du second ordre, à caractéristique nulle; elle est donc exprimable linéai-

(¹) Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII; *Configurationen bei der Kummer'schen Fläche*.

rement en fonction des coordonnées d'un point de la surface de Kummer, et, par suite, la courbe $\theta(u, v) = 0$ est une section plane de cette surface. Cette courbe a évidemment un point double, car, d'après la formule de M. Poincaré, les équations

$$\Im(u + \lambda, v + \mu) = 0, \qquad \Im(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

ont, en u et v, deux solutions communes, égales et de signes contraires, auxquelles correspond un seul point de la surface de Kummer : les coordonnées u, v de ce point annulant $\theta(u, v)$ et ses deux premières dérivées sont celles d'un point double. La courbe est donc la section de la surface par un de ses plans tangents; réciproquement, étant donné un point u_0, v_0, si l'on détermine λ et μ (ce qui est possible d'une seule manière, les solutions λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$ étant considérées comme identiques) par les équations

$$\Im(\lambda + u_0, \mu + v_0) = 0, \qquad \Im(\lambda - u_0, \mu - v_0) = 0,$$

il est clair que le point u_0, v_0 sera le point double de la courbe

$$\Im(u + \lambda, v + \mu)\,\Im(u - \lambda, v - \mu) = 0.$$

Les courbes $\theta(u, v) = 0$ *sont donc les sections de la surface de Kummer par ses plans tangents.*

A un système de valeurs des deux arguments hyperelliptiques λ, μ correspond ainsi un plan tangent de la surface de Kummer; réciproquement, à un plan tangent correspondent deux systèmes d'arguments, de la forme λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$.

60. Le fait que le premier membre de l'équation de la section de la surface par un plan tangent se décompose en deux facteurs $\Im$ du premier ordre est fondamental.

Soit, en effet, un plan tangent quelconque donné; choisissons un des deux systèmes d'arguments λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$, qui lui correspondent, et considérons l'équation

$$(1) \qquad \Im(u - \lambda, v - \mu) = 0.$$

Un point de la section de la surface par ce plan tangent a deux systèmes d'arguments u, v et $-u$, $-v$ (à des périodes près); de ces deux systèmes, *un seul* satisfait à l'équation précédente; on voit ainsi qu'à un

point de la courbe (1) ne correspond qu'*un seul* système de valeurs des arguments u, v à des multiples près des périodes.

Il résulte de là que *les deux courbes*

$$\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda', v-\mu')=0$$

se correspondent point par point. Soient, en effet, u, v un point de la première et u', v' un point de la seconde : on peut établir entre les points des deux courbes la correspondance

$$(2) \qquad u-\lambda=u'-\lambda', \qquad v-\mu=v'-\mu',$$

car, lorsque le point u, v décrit la première, le point u', v' décrit la seconde. Or à un point de la première courbe correspond un seul système de valeurs de u, v à des périodes près, et, par suite, d'après les formules précédentes, un seul système de valeurs de u', v', c'est-à-dire un seul point de la seconde courbe, et réciproquement.

Les sections de la surface par ses plans tangents sont donc des courbes de même genre et de mêmes modules; or, pour une courbe du quatrième ordre à un point double, on sait que les modules sont les rapports anharmoniques des six tangentes issues du point double. Donc :

Les rapports anharmoniques des six tangentes doubles qu'on peut mener à la surface de Kummer, par un de ses points, sont constants.

Il s'agit là des rapports anharmoniques des six droites, prises quatre par quatre.

Ce théorème est analogue à celui qui donne géométriquement l'invariant absolu d'une cubique plane; ici nous avons trois rapports anharmoniques, dépendant des trois périodes a, b, c de nos fonctions Θ.

On peut vérifier la proposition précédente d'une manière élémentaire dans un cas particulier. Menons, en effet, par un point singulier, O, de la surface de Kummer les plans qui touchent le cône, H, des tangentes en ce point, et considérons les sections de la surface par ces plans. Les six tangentes doubles qu'on peut mener de O à l'une d'elles sont évidemment les intersections du plan de la courbe avec les six plans singuliers qui passent par O, plans qui touchent le cône H. Les rapports anharmoniques des six tangentes doubles sont donc ceux des six droites suivant lesquelles un plan mobile, tangent à un cône de

second ordre, coupe six plans fixes tangents à ce cône. D'après un théorème bien connu, ces rapports anharmoniques sont constants.

Nous avons ainsi une expression géométrique des modules des sections de la surface par ses plans tangents; on verrait, par voie de réciprocité que *ces modules sont aussi égaux aux rapports anharmoniques de six points singuliers situés sur une même conique.*

61. *Remarque.* — Soit $\Theta_m(u, v)$ une fonction normale d'ordre m; on voit, comme plus haut, que les courbes d'ordre $4m$,

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

ont m^2 points doubles, et que deux d'entre elles se correspondent point par point; nous reviendrons plus tard sur ces courbes remarquables.

62. Reprenons la section de la surface de Kummer par un plan tangent correspondant à l'équation

$$(1) \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu) = 0.$$

Puisque, à un point de cette courbe, on peut faire correspondre un seul système de valeurs de u, v, à des périodes près, les différentielles *du et dv seront*, le long de la courbe, des différentielles abéliennes; comme elles ne deviennent pas infinies, ce seront *des différentielles abéliennes de première espèce*. Par suite, en chaque point de la courbe, les arguments hyperelliptiques u et v seront égaux à deux intégrales de première espèce, appartenant à cette courbe; on aura ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} u = g(t) + \lambda + \alpha, \\ v = g_1(t) + \mu + \beta. \end{cases}$$

α et β étant deux constantes, $g(t)$ et $g_1(t)$ deux intégrales de première espèce, exprimées en fonction d'une variable quelconque, t; cette variable ne jouera d'ailleurs aucun rôle dans ce qui suit, nous ne l'introduisons que pour rappeler que les intégrales $g(t)$ et $g_1(t)$ ont une même limite supérieure ([1]).

Pour limite inférieure de ces intégrales, ou mieux pour leur point de départ, nous choisirons le point $u = \lambda$, $v = \mu$, qui vérifie bien la rela-

([1]) Dans ce qui suit, nous écrirons gt, $g_1 t$, en supprimant la parenthèse.

tion $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$, et dont nous verrons plus bas la signification géométrique. Il résulte de ce choix que α *et* β *sont nuls*, puisque, en faisant $gt = g_1 t = 0$, on doit trouver $u=\lambda$ et $v=\mu$.

En remplaçant u et v par leurs valeurs dans l'équation (1) de la courbe, on a

$$(4) \qquad \mathfrak{S}(gt, g_1 t) = 0,$$

équation qui a lieu pour toute valeur de t. On reconnaît là un théorème fondamental de la théorie des fonctions hyperelliptiques du genre 2, qui se trouve établi ici par voie géométrique.

Cela posé, observons que l'équation $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$ ne change pas si l'on y remplace u et v par $2\lambda-u$, $2\mu-v$: le premier membre ne fait, en effet, que changer de signe. Il en résulte que, si le point u, v est sur la courbe $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$, le point $2\lambda-u$, $2\mu-v$ y est également : ces deux points sont évidemment *en involution*, c'est-à-dire que, si l'un est donné, le second s'en déduit sans ambiguïté par une détermination géométrique, et que la même construction, appliquée au second, fait retomber sur le premier. Or, sur une courbe générale du quatrième ordre à un point double, il n'y a d'autre involution que celle que constituent les couples de points situés sur une sécante issue du point double; donc *les points* u, v *et* $2\lambda-u$, $2\mu-v$ *sont sur une même sécante issue du point double* de la courbe (1). En particulier, on obtiendra *les points de contact des tangentes* menées par le point double, en écrivant

$$u \equiv 2\lambda - u, \qquad v \equiv 2\mu - v \qquad (\text{mod périodes}),$$

c'est-à-dire

$$u = \lambda + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v = \mu + \frac{\mathfrak{P}_1}{2};$$

$\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ étant deux demi-périodes correspondantes. Mais pour que le point u, v, ainsi défini, soit sur la courbe (1), il faut que $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)$ soit nul, c'est-à-dire

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0.$$

On a donc pour $\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ les six systèmes de valeurs écrits plus haut (n° 59).

En particulier, au système de valeurs (o, o) correspond le point $u = \lambda$, $v = \mu$: ce point, que nous avons rencontré tout à l'heure et pris pour point initial des intégrales gt et $g_1 t$, est donc un des points de contact des tangentes menées à la courbe (1) par son point double.

63. *Remarque.* — Les deux courbes $\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0$ et $\vartheta(u'-\lambda', v'-\mu')=0$ se correspondent point par point, selon les relations (2); si donc on désigne par $g't$ et $g'_1 t$ les intégrales de première espèce qui correspondent à u' et v' sur la deuxième courbe, et qui ont pour point initial le point λ', μ', on aura, en vertu de (2) et (3),

$$gt = g't \qquad \text{et} \qquad g_1 t = g'_1 t.$$

En d'autres termes, on pourra supposer, sans nuire à la généralité, que les intégrales gt et $g_1 t$ sont prises le long d'une courbe *déterminée* $\vartheta(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0$, à partir du point λ_0, μ_0 : c'est ce que nous admettrons dans ce qui suit.

64. L'équation générale qui correspond aux sections de la surface par les plans tangents en un point singulier $\frac{\mathcal{P}}{2}$, $\frac{\mathcal{P}_1}{2}$ est, d'après ce qui précède,

$$\vartheta\left(u + g\alpha + \frac{\mathcal{P}}{2},\ v + g_1\alpha + \frac{\mathcal{P}_1}{2}\right) = 0, \tag{5}$$

α étant arbitraire, et $\frac{\mathcal{P}}{2}$, $\frac{\mathcal{P}_1}{2}$ désignant deux demi-périodes correspondantes.

65. Nous renverrons, pour les résultats connus qu'on pourrait déduire de ces relations analytiques, aux Mémoires de MM. Klein et Rohn [1], et nous aborderons un sujet de recherches différent en étudiant l'intersection d'un plan tangent quelconque avec certaines courbes algébriques tracées sur la surface; dans cette étude nous ferons usage d'une proposition de M. Poincaré, qui revient au théorème d'Abel, et qu'on peut énoncer ainsi [2] :

Soient $\Theta_m(u, v)$ et $\Theta_n(u, v)$ deux fonctions thêta, normales, de caracté-

---

(1) KLEIN, *Math. Annalen*, t. XXVII, p. 106; ROHN, *Math. Annalen*, t. XV, p. 315.

(2) *American Journal*, t. VIII.

ristique nulle ; les deux équations

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0$$

ont $2mn$ *solutions communes*, $u, v, u_2, v_2, \ldots,$ *entre lesquelles existent les relations*

$$u_1+u_2+\ldots=mn(\lambda+\lambda'), \qquad v_1+v_2+\ldots=mn(\mu+\mu').$$

66. Cela posé, reprenons la courbe, que nous désignerons par C_4,

$$\Im(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

On sait, *par le théorème d'Abel*, que les sommes des intégrales gt et $g_1 t$, qui correspondent aux points d'intersection de cette courbe et d'une courbe algébrique d'ordre m, sont constantes.

Inversement, si les sommes des intégrales gt et $g_1 t$ qui correspondent à $4m$ points de la courbe C_4 ont les valeurs constantes précédentes, ces $4m$ points ne sont pas généralement sur une courbe d'ordre m, mais sont sur une courbe d'ordre $m+1$, passant en outre par le point double et par deux points quelconques de C_4, situés sur une même sécante issue de ce point ([1]).

Pour simplifier le langage, nous dirons que cette courbe d'ordre $m+1$ *adjointe* (c'est-à-dire passant par le point double) passe en outre par un couple quelconque de *points conjugués*.

Cherchons maintenant l'expression des sommes constantes d'intégrales qui correspondent aux points d'intersection de C_4 avec une courbe algébrique d'ordre m.

Si la courbe d'ordre m est une droite, les deux sommes s'évaluent aisément. En effet, d'après la proposition de M. Poincaré, les sommes des quatre valeurs de u et de v qui vérifient les équations

$$\Im(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta(u, v)=0,$$

où Θ est une fonction normale du second ordre, de caractéristique nulle, sont

$$\sum_1^4 u_i=2\lambda, \qquad \sum_1^4 v_i=2\mu.$$

([1]) Voir, par exemple, notre Mémoire *Sur l'application des fonctions fuchsiennes à la Géométrie*, tome II de ce journal, 4e série, p. 260 et suiv.

Le long de la courbe C_4, on a

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu,$$

il vient donc

$$\sum_1^4 gt = -2\lambda, \qquad \sum_1^4 g_1 t = -2\mu,$$

les deux sommes s'étendant aux quatre points communs à C_4 et à la courbe *plane* $\Theta(u, v) = 0$.

Ainsi, pour une droite, les sommes d'intégrales g et g_1 ont les valeurs constantes -2λ et -2μ; il en résulte que, pour une courbe d'ordre m, ces sommes ont les valeurs $-2\lambda m$ et $-2\mu m$, puisque la courbe d'ordre m peut, en particulier, se décomposer en m droites.

On déduit de là des conséquences intéressantes.

67. I. Soit toujours $\Theta(u, v)$ une fonction normale, d'ordre deux, à caractéristique nulle, les deux équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad \mathfrak{S}(u - \lambda, u - \mu) = 0$$

ont quatre solutions. Or la dernière donne

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu.$$

Portant ces valeurs dans la première, celle-ci devient

$$\Theta(gt + \lambda, g_1 t + \mu) = 0; \tag{6}$$

elle est, d'après ce qui précède, vérifiée pour quatre systèmes de valeurs de gt et $g_1 t$, tels que l'on ait

$$\sum gt = -2\lambda, \qquad \sum g_1 t = -2\mu.$$

Ainsi, si nous désignons par t_1, t_2, t_3, t_4 des constantes quelconques, l'équation

$$\Theta\left[gt - \frac{1}{2}(gt_1 + gt_2 + gt_3 + gt_4),\ g_1 t - \frac{1}{2}(g_1 t_1 + \ldots + g_1 t_4)\right] = 0$$

sera vérifiée pour quatre systèmes de valeurs de gt et $g_1 t$, tels qu'on ait

$$\sum gt = gt_1 + gt_2 + gt_3 + gt_4,$$

$$\sum g_1 t = g_1 t_1 + g_1 t_2 + g_1 t_3 + g_1 t_4.$$

Je dis que, si deux des solutions de l'équation considérée sont gt_1, g_1t_1 et gt_2, g_1t_2, les deux dernières seront gt_3, g_1t_3 et gt_4, g_1t_4.

On a, en effet, en désignant par $g\sigma$, $g_1\sigma$ et $g\tau$, $g_1\tau$ les deux dernières solutions

$$g\sigma + g\tau = gt_3 + gt_4,$$
$$g_1\sigma + g_1\tau = g_1t_3 + g_1t_4,$$

et, d'après la théorie générale de l'inversion, les deux équations précédentes n'ont pas d'autres solutions que

$$\begin{matrix} g\sigma = gt_i, & g\tau = gt_j \\ g_1\sigma = g_1t_i, & g_1\tau = g_1t_j \end{matrix} \qquad (i, j = 3, 4 \text{ et } i \gtrless j).$$

ce qui est précisément la proposition à établir.

En d'autres termes, si l'équation $\Theta(u, v) = 0$ est satisfaite pour deux des quatre systèmes de valeurs de u et v inscrits au tableau suivant, elle sera également satisfaite pour les deux autres :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}(\quad gt_1 - gt_2 - gt_3 - gt_4), & v &= \frac{1}{2}(\quad g_1t_1 - g_1t_2 - g_1t_3 - g_1t_4),\\
u &= \frac{1}{2}(- gt_1 + gt_2 - gt_3 - gt_4), & v &= \frac{1}{2}(- g_1t_1 + g_1t_2 - g_1t_3 - g_1t_4),\\
u &= \frac{1}{2}(- gt_1 - gt_2 + gt_3 - gt_4), & v &= \frac{1}{2}(- g_1t_1 - g_1t_2 + g_1t_3 - g_1t_4),\\
u &= \frac{1}{2}(- gt_1 - gt_2 - gt_3 + gt_4), & v &= \frac{1}{2}(- g_1t_1 - g_1t_2 - g_1t_3 + g_1t_4).
\end{aligned}$$

Géométriquement, en se rappelant qu'il y a quatre fonctions $\Theta(u, v)$ normales, d'ordre deux, à caractéristique nulle, linéairement indépendantes, et que ces quatre fonctions sont proportionnelles aux coordonnées d'un point de la surface de Kummer, on peut dire que tout plan qui passe par deux points (u, v) du tableau passe par les deux autres. En d'autres termes, le tableau donne les arguments de quatre points de la surface de Kummer situés sur une droite, et sur une droite quelconque, puisqu'il y a quatre paramètres arbitraires t_1, t_2, t_3, t_4.

Il va sans dire qu'on peut, dans ce tableau, changer simultanément les signes des arguments u, v d'un quelconque des quatre points.

Plus simplement, on peut dire que les arguments de quatre points en

ligne droite sont donnés par les formules

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 g t_1 + \varepsilon_2 g t_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 g t_3 + g t_4),$$

$$v = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 g_1 t_1 + \varepsilon_2 g_1 t_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 g_1 t_3 + g_1 t_4),$$

où ε_1 et ε_2 peuvent prendre les valeurs ± 1.

Cette formule importante est due à M. Klein, qui l'a démontrée sous une autre forme et par une voie différente; nous en ferons plus loin quelques applications.

68. II. Considérons maintenant une fonction Θ, d'ordre $2m$, normale, impaire, à caractéristique nulle; soit $\Theta_{2m}(u, v)$.

Les zéros communs aux fonctions $\Theta_{2m}(u, v)$ et $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)$, au nombre de $4m$, vérifient les relations

$$\sum u = 2m\lambda, \qquad \sum v = 2m\mu;$$

le long de la courbe C_4, c'est-à-dire $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu) = 0$, on a

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu;$$

d'où

$$\sum gt = -2m\lambda, \qquad \sum g_1 t = -2m\mu,$$

les sommes s'étendant aux $4m$ points de la courbe C_4 situés sur la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$. Ces deux dernières relations montrent (n° 66) que les $4m$ points précédents sont sur une courbe d'ordre $m+1$, adjointe à C_4, qui passe en outre par un couple, qu'on peut choisir arbitrairement, de points conjugués.

On peut ajouter que les $4m$ points ne sont jamais sur une courbe d'ordre m, si aucun d'eux ne coïncide avec le point double de C_4.

Nous savons, en effet (n° 30), puisque la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$ appartient à la *famille singulière* de courbes d'ordre $4m$, qu'elle est sur une surface d'ordre $m+2$ passant par quatre coniques d'un groupe de Rosenhain. Par suite, les $4m$ points où elle coupe le plan de la courbe C_4, c'est-à-dire la courbe C_4 elle-même, sont sur une courbe d'ordre $m+2$, passant par les points de contact de quatre tangentes doubles de C_4; si donc ces $4m$ points étaient sur une courbe d'ordre m,

les huit points de contact des quatre tangentes seraient sur une conique, d'après une propriété générale bien connue des courbes algébriques [1].

Or il est aisé d'établir que les huit points d'intersection d'un plan avec quatre coniques singulières d'un groupe de Rosenhain ne peuvent jamais être sur une conique C. Si cela était, en effet, la surface du second ordre menée par cette conique et les quatre sommets du tétraèdre de Rosenhain considéré couperait chacune des quatre coniques singulières en cinq points, dont deux sur la conique C et trois en trois sommets du tétraèdre : quatre coniques d'un groupe de Rosenhain seraient ainsi sur une même quadrique, ce qui est impossible (n° 25).

Nous avons ainsi démontré que :

Les $4m$ points où une courbe algébrique d'ordre $4m$, tracée sur la surface de Kummer et appartenant à la famille singulière, est coupée par un plan tangent quelconque de la surface, sont situés, avec le point de contact de ce plan, sur une infinité de courbes planes d'ordre $m+1$.

Chacune de ces courbes d'ordre $m+1$ coupe en outre la section de la surface par le plan tangent considéré en deux points, qui sont sur une même sécante issue du point de contact.

Le plan tangent considéré peut avoir son point de contact sur la courbe d'ordre $4m$; on voit alors sans difficulté, soit directement, soit en partant des résultats précédents, que :

Le plan tangent à la surface de Kummer en un point d'une courbe d'ordre $4m$, de la famille singulière, tracée sur cette surface, coupe en outre la courbe en $4m-2$ points, qui sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une courbe d'ordre m.

Ces propositions s'appliquent en particulier à la courbe d'ordre $4m$ formée par l'ensemble de deux courbes d'ordre $2m$, appartenant respectivement à deux familles associées (n°s 28 et 29); car le produit des Θ qui correspondent à ces deux courbes est une fonction normale, impaire, de caractéristique nulle.

---

[1] Il ne peut y avoir d'exception que si un ou plusieurs des $4m$ points coïncident avec le point double de C_4.

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS DIVERSES.

69. Nous réunirons dans ce Chapitre quelques applications des formules des paragraphes précédents et quelques compléments de nos théories générales; nous commencerons par l'étude *des tétraèdres*, en nombre trois fois infini, *inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à la surface de Kummer;* nous montrerons qu'il n'existe pas d'autres figures de cette nature que celles rencontrées au n° 50, et nous trouverons l'expression analytique de leurs éléments.

D'après les formules du n° 67, il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite joignant deux points u_1, v_1; u_2, v_2 de la surface de Kummer touche cette surface en un troisième point, est exprimée par les formules

$$u_1 + \varepsilon u_2 = 2g\rho, \qquad v_1 + \varepsilon v_2 = 2g_1\rho,$$

ε désignant ± 1 et ρ étant une constante quelconque.

Soient u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 les sommets d'un tétraèdre inscrit à la surface de Kummer; écrivons que les six arêtes touchent la surface. On aura d'abord, puisque les signes de u_i et v_i peuvent être changés simultanément,

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1 - u_2 = 2g\,\rho, & u_1 - u_3 = 2g\,\sigma, & u_1 - u_4 = 2g\,\tau, \\ v_1 - v_2 = 2g_1\rho, & v_1 - v_3 = 2g_1\sigma, & v_1 - v_4 = 2g_1\tau. \end{cases}$$

Les conditions de contact des trois arêtes qui ne partent pas du point u_1, v_1 seront :

$$(2)\qquad \begin{cases} u_2 + \varepsilon u_3 = 2g\,\omega, & u_2 + \eta u_4 = 2g\,\varpi, & u_3 + \zeta u_4 = 2g\,\upsilon, \\ v_2 + \varepsilon v_3 = 2g_1\omega, & v_2 + \eta v_4 = 2g_1\varpi, & v_3 + \zeta v_4 = 2g_1\upsilon, \end{cases}$$

ρ, σ, τ, ω, ϖ, υ étant des constantes quelconques; ε, η, ζ désignant ± 1.

Supposons d'abord ε, η, ζ égaux à -1. Il vient alors

$$2g\,\omega = 2(g\,\sigma - g\,\rho), \qquad 2g\varpi = 2(g\tau - g\rho), \qquad 2g\upsilon = 2(g\tau - g\sigma),$$
$$2g_1\omega = 2(g_1\sigma - g_1\rho), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où, en vertu de la relation $\mathfrak{S}(gt, g_1 t) = 0$,

$$\mathfrak{S}\left(g\sigma - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, g_1\sigma - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right),$$

$$\mathfrak{S}\left(g\tau - g\rho + \frac{\mathfrak{P}'}{2}, g_1\tau - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}\right),$$

$$\mathfrak{S}\left(g\tau - g\sigma + \frac{\mathfrak{P}''}{2}, g_1\tau - g_1\sigma + \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}\right),$$

$\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}, \cdots$ étant des demi-périodes simultanées.

Ces trois relations, évidemment distinctes, donnent les valeurs de $g\rho$, $g_1\rho$; $g\sigma$, $g_1\sigma$; $g\tau$, $g_1\tau$ et, par suite, un nombre limité de solutions pour le problème quand le sommet u_1, v_1 est connu; les tétraèdres ainsi trouvés sont en nombre deux fois infini seulement.

Un raisonnement tout semblable montre que, si ε, η, ζ ne sont pas tous les trois égaux à $+1$, les équations (1) et (2) déterminent u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 en fonction de u_1, v_1; il n'y a donc encore qu'un nombre doublement infini de solutions répondant à cette hypothèse.

Reste enfin le cas où $\varepsilon = \eta = \zeta = 1$.

Des deux premiers couples d'équations (1) et du premier couple (2) on tire, en désignant par $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ deux demi-périodes simultanées,

$$u_3 = g\omega - g\sigma + g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_3 = g_1\omega - g_1\sigma + g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$u_2 = g\sigma + g\omega - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_2 = g_1\sigma + g_1\omega - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$u_1 = g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_1 = g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}.$$

Posons

$$u_4 = g\rho + g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2} + \mathrm{U},$$

$$v_4 = g_1\rho + g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2} + \mathrm{V},$$

et portons ces valeurs dans les deux dernières relations (1) et les quatre dernières relations (2), il vient

$$2g\omega - \mathrm{U} = 2g\tau, \qquad 2g\sigma + \mathrm{U} = 2g\varpi, \qquad 2g\rho + \mathrm{U} = 2g\upsilon,$$
$$2g_1\omega - \mathrm{V} = 2g_1\tau, \qquad 2g_1\sigma + \mathrm{V} = 2g_1\varpi, \qquad 2g_1\rho + \mathrm{V} = 2g_1\upsilon.$$

Éliminant τ, ϖ, υ entre ces équations, à l'aide de la relation $\mathfrak{S}(gt, g_1 t)$,

on a

$$\vartheta\left(g\omega - \frac{U}{2} + \frac{\mathfrak{P}'}{2}, g_1\omega - \frac{V}{2} + \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}\right) = 0,$$
$$\vartheta\left(g\sigma + \frac{U}{2} + \frac{\mathfrak{P}''}{2}, g_1\sigma + \frac{V}{2} + \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}\right) = 0,$$
$$\vartheta\left(g\rho + \frac{U}{2} + \frac{\mathfrak{P}'''}{2}, g_1\rho + \frac{V}{2} + \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2}\right) = 0.$$

Si nous posons pour un instant $\frac{U}{2} = u$, $\frac{V}{2} = v$, les trois équations qui précèdent représentent (n° 64) les sections de la surface de Kummer par des plans tangents, dont les points de contact sont respectivement les trois points singuliers $\frac{\mathfrak{P}'}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}$; $\frac{\mathfrak{P}''}{2}, \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}$; $\frac{\mathfrak{P}'''}{2}, \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2}$, et elles expriment que ces trois plans tangents se coupent en un même point u, v de la surface.

Or, pour que le problème ait une infinité triple de solutions, il faut que ω, σ, ρ soient *arbitraires*, c'est-à-dire que trois plans tangents *arbitraires*, dont les points de contact sont respectivement trois points singuliers, distincts ou non, de la surface de Kummer, se coupent en un point de cette surface : cela ne peut évidemment se produire que si les trois points singuliers coïncident; les trois plans sont alors tangents à la surface en un même point singulier, et se coupent en ce point.

D'après cela, nous devons supposer

$$\frac{\mathfrak{P}'}{2} = \frac{\mathfrak{P}''}{2} = \frac{\mathfrak{P}'''}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{P}'_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}''_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2};$$

et les trois équations précédentes seront satisfaites, quels que soient ω, ρ, σ, par

$$\frac{U}{2} = \frac{\mathfrak{P}'}{2}, \qquad \frac{V}{2} = \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}.$$

Les quantités U et V sont donc nulles, à des périodes près, et les sommets des tétraèdres cherchés ont pour coordonnées hyperelliptiques

$$u_1 = g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_1 = g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$
$$u_2 = -g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_2 = -g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$
$$u_3 = g\rho - g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_3 = g_1\rho - g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$
$$u_4 = g\rho + g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_4 = g_1\rho + g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}.$$

D'ailleurs les demi-périodes simultanées $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ peuvent prendre seize systèmes de valeurs; *on trouve ainsi seize familles de tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes* à la surface de Kummer, chaque famille dépendant de *trois paramètres arbitraires*. Il n'y a pas d'autre famille analogue dépendant de trois paramètres, comme le montre l'analyse précédente; par suite, les seize familles qu'on vient de trouver doivent se confondre avec les seize familles obtenues par voie géométrique au n° 50.

70. On peut vérifier ce résultat d'une autre manière.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les sommets (u_1, v_1), ..., (u_4, v_4) d'un des tétraèdres trouvés en dernier lieu; a_{ij} le point de contact de la droite $a_i a_j$ avec la surface de Kummer; pour démontrer que ce tétraèdre est un de ceux rencontrés au n° 50, il suffit d'établir que les plans tangents à la surface aux six points a_{ij} se coupent deux à deux suivant les trois côtés d'un triangle *pqr*, inscrit dans une des seize coniques singulières.

Or, considérons la section de la surface par un plan tangent

$$\Im(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

écrivons que ce plan passe par les points a_1 et a_2, il vient

$$\Im\left(\quad g\rho+g\sigma+g\omega+\frac{\mathfrak{P}}{2}-\lambda,\ g_1\rho+g_1\sigma+g_1\omega+\frac{\mathfrak{P}_1}{2}-\mu\right)=0,$$

$$\Im\left(-g\rho+g\sigma+u\omega+\frac{\mathfrak{P}}{2}-\lambda,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)=0.$$

Ces deux équations, d'après les formules de M. Poincaré, ont deux solutions communes en λ, μ, et la somme des deux valeurs de λ est $2g\sigma+2g\omega$, celle des deux valeurs de μ est $2g_1\sigma+2g_1\omega$. On aperçoit de suite la solution

$$\lambda=\frac{\mathfrak{P}}{2}+g\sigma+g\omega,\qquad \mu=\frac{\mathfrak{P}_1}{2}+g_1\sigma+g_1\omega,$$

car, en remplaçant λ et μ par ces valeurs, les premiers membres des deux équations deviennent $\Im(g\rho, g_1\rho)$ et $\Im(-g\rho, -g_1\rho)$, et sont bien égaux à zéro.

La deuxième solution coïncide, par suite, avec la première, d'après les expressions des sommes des valeurs de λ et de μ.

En d'autres termes, le plan tangent qui coupe la surface suivant la courbe

$$\mathfrak{S}\left(u - g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{L}}{2}, v - g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}\right) = 0$$

passe par les points a_1, a_2 et compte pour deux dans le nombre des plans tangents menés par ces deux points : c'est donc nécessairement le plan tangent au point a_{12}, où la droite $a_1 a_2$ touche la surface.

On arrive ainsi à établir que les plans tangents de la surface de Kummer aux points a_{ij} correspondent aux équations

$$\mathfrak{S}\left(u - g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{L}}{2}, v - g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\omega - g\rho + \frac{\mathfrak{L}}{2}, \dots\dots\dots\dots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\rho - g\sigma + \frac{\mathfrak{L}}{2}, \dots\dots\dots\dots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{L}}{2}, \dots\dots\dots\dots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\omega + g\rho + \frac{\mathfrak{L}}{2}, \dots\dots\dots\dots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\rho + g\sigma + \frac{\mathfrak{L}}{2}, \dots\dots\dots\dots\right) = 0.$$

Les quatre plans dans l'équation desquels figurent $g\rho$ et $g_1\rho$ passent par le point $u = g\rho + \frac{\mathfrak{L}}{2}$, $v = g_1\rho + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}$, comme on le vérifie immédiatement, soit p ce point. Soient de même q le point $g\sigma + \frac{\mathfrak{L}}{2}$, $g_1\sigma + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}$, et r le point $g\omega + \frac{\mathfrak{L}}{2}$, $g_1\omega + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}$. Les deux plans dans l'équation desquels figurent à la fois les paramètres ρ et σ passent par la droite pq, et de même pour les couples de paramètres ρ et ω, σ et ω. Si l'on observe maintenant que les points p, q, r sont sur la conique singulière

$$\mathfrak{S}\left(u + \frac{\mathfrak{L}}{2}, v + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}\right) = 0,$$

on voit bien que la proposition à établir se trouve maintenant démontrée, et qu'on a retrouvé analytiquement les propositions que la Géométrie avait données sur les seize familles de tétraèdres.

71. La configuration remarquable formée par les sommets et les arêtes d'un des précédents tétraèdres peut être aisément généralisée.

Soient, en effet, quatre couples d'intégrales

$$g\rho_1, \quad g_1\rho_1; \qquad g\rho_2, \quad g_1\rho_2; \qquad g\rho_3, \quad g_1\rho_3; \qquad g\rho_4, \quad g_1\rho_4;$$

considérons les huit points définis, sur la surface de Kummer, par les équations

$$\left.\begin{aligned} u_i &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 g\rho_4 \\ v_i &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \varepsilon_3 g_1\rho_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 g_1\rho_4 \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \; i = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$\left.\begin{aligned} u_j &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g_2\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 g\rho_4 \\ v_j &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \varepsilon_3 g_1\rho_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 g_1\rho_4 \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \; j = 1, 2, 3, 4).$$

On pourrait, en outre, ajouter aux u une même demi-période, et aux v la demi-période correspondante.

La droite qui joint un des quatre premiers points à un des quatre derniers touche la surface en un nouveau point : il suffit d'appliquer, pour le vérifier, la règle indiquée plus haut (n° 69).

Nous obtenons ainsi sur la surface *seize familles de configurations* remarquables, dont chacune dépend de *quatre arbitraires;* une de ces configurations est formée par deux groupes de quatre points de la surface de Kummer, tels que les seize droites joignant les points du premier groupe aux points du second soient des tangentes de la surface. Il est clair que sur une surface quelconque il n'y a qu'un nombre limité de telles configurations.

Plus généralement, si l'on considère les 2^{h-1} points donnés par les relations

$$\begin{aligned} u_i &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 + \ldots + \varepsilon_h g\rho_h, \\ v_i &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_h g_1\rho_h, \end{aligned}$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$ sont des arbitraires et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ des quantités égales à $+1$ ou à -1, on voit aisément que les droites qui joignent un d'entre eux à h autres sont des tangentes de la surface. On obtient ainsi une configuration de 2^{h-1} points de la surface, et de $h.2^{h-2}$ tangentes de cette surface, tels que par chaque point passent h tangentes et que sur chaque tangente soient situés deux points.

72. Comme seconde application des résultats du précédent Chapitre,

nous donnerons quelques propriétés des *courbes du huitième ordre de la famille singulière* tracées sur la surface de Kummer. On désignera par C_8 une quelconque de ces courbes.

Tout d'abord les théorèmes du n° 68, appliqués à ce cas particulier, deviennent :

Les huit points où une courbe C_8 *est coupée par un plan tangent quelconque de la surface de Kummer forment, avec le point de contact du plan, la base d'un faisceau de courbes du troisième ordre.*

Chaque courbe de ce faisceau coupe en outre la section de la surface par le plan tangent considéré en deux points, qui sont sur une même sécante issue du point de contact.

Le plan tangent à la surface de Kummer en un point d'une courbe C_8 *coupe en outre celle-ci en six points qui sont sur une conique passant par le point de contact du plan.*

Nous savons de plus (n° 68) que les huit points où une courbe C_8 est coupée par un plan tangent de la surface de Kummer ne peuvent être sur une conique que si l'un d'eux coïncide avec le point de contact du plan.

Or les courbes C_8 sont, en général, de genre 5, comme nous l'établirons dans le Chapitre suivant; il en résulte, d'après une formule de M. Zeuthen, qu'elles ont chacune *dix sécantes quadruples*. Soit D une sécante quadruple de C_8 ; menons par D un plan tangent à la surface de Kummer, désignons par A le point de contact et par p_1, p_2, p_3, p_4 les quatre points, non situés sur D, où ce plan coupe C_8 ; soient enfin q_1 et q_2 deux points quelconques de la section de la surface par le plan tangent, situés sur une sécante issue de A. D'après une proposition précédente, les quatre points de C_8 situés sur D, les points p_i, le point A et les points q_1, q_2 sont sur une cubique; donc les points p_i, A, q_1, q_2 sont sur une conique, et, si le point A était distinct des points p_i, ces derniers seraient en ligne droite : les huit points d'intersection de C_8 avec le plan tangent considéré seraient alors sur une conique (décomposée en un système de deux droites), ce qui est impossible.

Il faut donc que le point A soit un des points p_i : en ce cas deux de ces points sont confondus en A et les deux autres sont sur une sécante issue de ce point.

En d'autres termes :

Chacun des quatre plans tangents menés à la surface de Kummer par une sécante quadruple d'une courbe C_8 *a son point de contact sur cette courbe, qu'il coupe en outre en deux points, situés en ligne droite avec le point de contact.*

Les courbes C_8 dépendent linéairement de cinq paramètres (n° 30), et se coupent deux à deux en huit points non singuliers (n° 58) : celles de ces courbes qui passent par quatre points de la surface de Kummer ont donc quatre autres points communs, et, d'après cela, la proposition qui précède peut s'énoncer ainsi :

Les courbes C_8 *qui passent par quatre points de la surface de Kummer situés sur une droite, passent par les quatre points de contact des plans tangents qu'on peut mener à la surface par cette droite.*

73. Parmi les surfaces de Kummer inscrites à la surface primitive le long d'une courbe C_8 (n° 58), il en est dix qui dégénèrent en surfaces du quatrième ordre, possédant une droite double et huit points doubles.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur cette remarque évidente que, si deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre, toute courbe tracée sur la première touche la seconde en tous ses points de rencontre avec elle; il ne peut y avoir exception que si l'un de ces points est un point singulier de l'une ou l'autre des deux surfaces.

Cela posé, soit D une sécante quadruple d'une courbe C_8; un des plans tangents à la surface de Kummer menés par D touche la surface en un point A, de C_8, et coupe en outre C_8 en deux points, p_1, p_2, en ligne droite avec A (n° 72). Parmi les surfaces du quatrième ordre inscrites le long de C_8, surfaces qui forment un faisceau ponctuel, il en est une, et une seule, S, qui passe par un cinquième point de D, et qui, par suite, contient cette droite. En vertu de la remarque précédente, les quatre points où D rencontre la surface de Kummer sont des points doubles de S, et la droite D est dès lors une droite double de S. Observons maintenant que la droite Ap_1p_2 (qui coupe D) est sur la surface S, puisqu'elle a cinq points sur celle-ci, et que les points p_1 et p_2 sont, d'après la remarque, des points doubles de S. Le même raisonnement pouvant être reproduit pour les quatre plans tangents menés à la surface

de Kummer par la droite D, on voit que la surface S a huit points doubles. Ainsi :

Le long de toute courbe C_8 *générale tracée sur la surface de Kummer, on peut inscrire à cette surface dix surfaces du quatrième ordre, ayant une droite double et huit points doubles.*

Pour chacune de ces surfaces, la droite double est une des dix sécantes quadruples de la courbe C_8 ; *les huit points doubles, situés sur* C_8, *sont par couples dans les quatre plans tangents qu'on peut mener par la droite double à la surface de Kummer.*

Il serait aisé de voir que, pour certaines courbes C_8 *particulières*, deux des surfaces précédentes peuvent se confondre en une seule surface du quatrième ordre, à deux droites doubles ; dans un autre cas, celui où la courbe C_8 a un point double, une des surfaces du quatrième ordre inscrites à deux droites doubles, concourant au point double et tangentes à la surface de Kummer en ce point ; enfin, dans un troisième cas, que nous rencontrerons plus loin, où la courbe C_8 a un point triple en un des points singuliers de la surface de Kummer, une des surfaces du quatrième ordre inscrites est *une surface de Steiner.*

74. En dernier lieu, nous énoncerons, relativement aux courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer, ces quelques propositions évidentes, auxquelles nous aurons à renvoyer par la suite.

Les courbes d'ordre $4m$, *qui sont les intersections complètes de la surface et d'une surface d'ordre* m, *touchent en* $2m$ *points chacun des plans singuliers.*

Les courbes d'ordre $4m$ *de la famille singulière, touchent en* $2m - 3$ *points les seize plans singuliers.*

Les courbes d'ordre $4m$, *appartenant à l'une des trente familles associées deux à deux, touchent huit plans singuliers en* $2m - 1$ *points et les huit autres en* $2m - 3$ *points.*

Les courbes d'ordre $4m + 2$ *qui passent par six points singuliers situés dans un même plan touchent ce plan en* $2m - 2$ *points, et touchent les quinze autres plans singuliers en* $2m$ *points.*

Les courbes d'ordre $4m + 2$ *qui passent par les dix points singuliers non situés dans un plan singulier, touchent celui-ci en* $2m + 1$ *points et touchent les quinze autres en* $2m - 1$ *points.*

CHAPITRE VIII.

SURFACES DÉVELOPPABLES CIRCONSCRITES A LA SURFACE DE KUMMER.

75. La réciproque d'une surface de Kummer est évidemment une surface de Kummer; aux courbes tracées sur la première correspondent des surfaces développables circonscrites à la seconde, et, par suite, les propositions démontrées sur la classification des courbes d'un degré connu donnent, par dualité, la classification des surfaces développables, d'une classe donnée, circonscrites à la surface de Kummer.

Pour ne pas étendre inutilement ce Mémoire, nous n'énoncerons pas explicitement toutes ces propriétés.

Quand on transforme par réciprocité une surface de Kummer, une courbe C_1 d'ordre $2m$, de cette surface se transforme en une développable de classe $2m$ circonscrite à la surface réciproque suivant une courbe C_2 : pour abréger, nous dirons que *les courbes* C_1 *et* C_2 *sont réciproques*.

Cela posé, nous traiterons les questions suivantes :

Étant donnée sur la surface de Kummer une courbe C_1, *quel est le degré de la courbe réciproque* C_2, *et à quelle famille appartient celle-ci ?*

Le degré de C_2 est d'ailleurs égal à la classe de la développable circonscrite, le long de la courbe C_1, à la surface de Kummer primitive.

Nous pouvons toujours supposer que la quadrique qui sert à définir la transformation réciproque ait pour équation

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0;$$

soient toujours Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les quatre fonctions normales, d'ordre 2, à caractéristique nulle, qui sont proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point d'une surface de Kummer, K_1.

Les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 d'un point de la surface K_2 réciproque de K_1, sont données par les formules

$$\rho X_1=\begin{vmatrix} \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\Theta_4}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial v} & \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial v} & \dfrac{\partial\Theta_4}{\partial v}\end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad -\rho X_4=\begin{vmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial v} & \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Désignons par θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 les quatre déterminants précédents : chacune des fonctions θ_i est, comme on le voit aisément, une fonction thêta, normale, paire, d'ordre 6, à caractéristique nulle. Elle s'annule pour la demi-période $u=0$, $v=0$, ainsi que ses dérivées premières par rapport à u et v, car les fonctions *impaires* $\frac{\partial\Theta_i}{\partial u}$, $\frac{\partial\Theta_i}{\partial v}$ s'annulent pour $u=0$, $v=0$. On démontrerait de même que les quinze autres demi-périodes annulent les quatre fonctions θ_i et leurs dérivées premières.

Géométriquement, les courbes, représentées sur la surface K_1 par l'équation

$$\mu_1\theta_1+\mu_2\theta_2+\mu_3\theta_3+\mu_4\theta_4=0,$$

$\mu_1, \ldots, \mu_4$ étant des constantes, sont, d'après ce qui vient d'être dit, les intersections de K_1 avec des surfaces du troisième ordre passant par les seize points singuliers : ce résultat était à prévoir, puisque la polaire d'un point quelconque par rapport à K_1 est précisément une surface de cette nature.

Cela posé, soit $\Theta_p(u, v)=0$ l'équation d'une courbe quelconque C_1 d'ordre $2p$, tracée sur K_1 : Θ_p est une fonction normale, d'ordre p, paire ou impaire. La courbe réciproque C_2 sera représentée, sur la surface K_2, par la même équation; il sera aisé, d'après cela, d'en déterminer le degré et la famille.

76. *Supposons d'abord p pair;* $p=2m$; trois cas sont à distinguer :

1° Si la courbe C_1 d'ordre $4m$, est l'intersection complète de K_1 et d'une surface d'ordre m, la fonction thêta correspondante $\Theta_{2m}(u, v)$ est paire, d'ordre $2m$, et ne s'annule, en général, pour aucune des seize demi-périodes.

On trouvera le degré de la courbe C_2, c'est-à-dire de la courbe $\Theta_{2m}(u, v)=0$ sur la surface K_2, en cherchant en combien de points cette courbe coupe le plan $X_i=0$. Or X_i est proportionnel à une fonction θ_i, paire et d'ordre 6; le nombre des zéros communs aux fonctions Θ_{2m} et θ_i est égal à $2.2m.6=24m$, et comme ces zéros sont deux à deux égaux et de signes contraires, *le degré de* C_2 *sera* la moitié de ce nombre, c'est-à-dire $12m$.

Si la courbe C_1 passe par un ou plusieurs points doubles de K_1, ce résultat se modifie. Supposons, par exemple, qu'elle passe par le point

singulier $u=0$, $v=0$: la fonction *paire* $\Theta_{2m}(u, v)$, s'annulant pour $u=0$, $v=0$, aura ses dérivées premières nulles en ce point et, par suite, parmi les $24m$ solutions communes aux deux équations $\theta_i=0$, $\Theta_{2m}=0$ figurera quatre fois la solution $u=0$, $v=0$ [1]. Le degré de C_2 sera ainsi $\frac{1}{2}(24m-4)=12m-2$; on voit qu'il s'abaisse de deux unités toutes les fois que C_1 passe par un point singulier de la surface K_1.

La courbe C_1 (n° 74), si elle ne passe par aucun point singulier, touche en $2m$ points chacun des seize plans singuliers de K_1; les seize points singuliers de K_2 seront donc, sur C_2, des points multiples d'ordre $2m$; il en résulte que C_2 est (n° 31) l'intersection complète de la surface K_2 avec une surface algébrique d'ordre $3m$ ayant un point multiple d'ordre m en chacun des seize points singuliers de K_2.

Ce dernier résultat, transformé par réciprocité, donne la proposition suivante :

La développable circonscrite à la surface de Kummer le long d'une courbe d'ordre $4m$, *intersection de cette surface avec une surface d'ordre* m *qui ne passe par aucun point singulier, est de classe* $12m$; *elle est circonscrite à une surface de classe* $3m$, *qui touche en* m *points chacun des seize plans singuliers.*

2° Si la courbe C_1 appartient à la famille singulière d'ordre $4m$, on trouve sans difficulté, en appliquant les mêmes méthodes que tout à l'heure, que le degré de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12.2m-2.16]=12m-16$.

En général, la courbe C_1 touche en $2m-3$ points chacun des seize plans singuliers de K_1 (n° 74); sur C_2 les seize points singuliers de K_2 sont donc des points multiples d'ordre $2m-3$: il en résulte (n° 31) que C_2 appartient, sur K_2 à la famille singulière de courbes d'ordre $4(3m-4)$.

3° La courbe C_1 peut enfin appartenir à l'une des trente familles de courbes qui passent par huit points singuliers de K_1; on trouve, en ce cas, que l'ordre de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12.2m-16]=12m-8$.

---

[1] Cela tient, géométriquement, à ce que les deux courbes $\Theta_{2m}(u, v)=0$. $\theta_i(u, v)=0$ ont un point double pour $u=0$, $v=0$, sur la surface K_1.

En général, la courbe C_1 touche en $2m-1$ points huit des plans singuliers de K_1 et touche les huit autres en $2m-2$ points (n° 74).

Donc, sur C_2, huit des points singuliers de K_2 sont multiples d'ordre $2m-1$, et les huit autres, multiples d'ordre $2m-2$; par suite (n° 31), sur la surface K_2, la courbe C_2 appartient à une des trente familles, deux à deux associées, de courbes d'ordre $12m-8$.

Les résultats qui précèdent ne sont exacts que si les courbes C_1 considérées n'ont de point multiple (d'ordre supérieur ou égal à 2), en aucun des points singuliers de K_1; il est aisé de calculer l'abaissement que la présence d'un tel point multiple amènerait dans le degré de C_2; on trouve, par la méthode suivie plus haut, que, pour un point multiple d'ordre $2h$, l'abaissement est égal à $2h$, et pour un point multiple d'ordre $2h+3$, égal à $2h+2$.

De plus, on déterminerait aisément, dans chaque cas particulier, à quelle famille appartient C_2 : il suffit, pour cela, de chercher en combien de points C_1 touche chacun des seize plans singuliers de K_1; on connaît ainsi l'ordre de multiplicité des points singuliers de K_2 sur la courbe C_2, d'où l'on déduit (n° 31) la famille de celle-ci.

77. *Supposons maintenant p impair; $p=2m+1$*; deux cas sont à distinguer :

1° Si la courbe C_1, d'ordre $4m+2$, passe par six points singuliers dans un même plan, le degré de C_2 est égal à

$$\frac{1}{2}[12(2m+1)-2.6]=12m.$$

La courbe C_1, en général, touche (n° 74) quinze des plans singuliers de K_1 en $2m$ points et le seizième en $2m-2$ points; donc C_2 a un point multiple d'ordre $2m-2$ en un des points singuliers de K_2, et un point d'ordre $2m$ en chacun des quinze autres. La courbe C_2 est donc l'intersection complète de K_2 avec une surface d'ordre $3m$ ayant un point multiple d'ordre $m-1$ en un des points singuliers de K_2 et un point d'ordre m en chacun des quinze autres.

2° Si la courbe C_1 passe par dix points singuliers de K_1, le degré de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12(2m+1)-2.10]=12m-4$; on voit, comme plus haut, qu'elle a, en général, un point multiple d'ordre $2m+1$ en un des

points singuliers de K_2 et un point multiple d'ordre $2m-1$ en chacun des quinze autres. La courbe C_2 appartient donc à la famille singulière de courbes d'ordre $12m-4$.

Si la courbe C_1 a un point multiple en un point singulier de K_1, ces résultats cessent d'être exacts, et le degré de C_2 s'abaisse, d'après la loi indiquée au n° 76.

78. Comme application, on peut observer que la réciproque d'une courbe C_1 de la famille singulière d'ordre 8, n'ayant de point multiple en aucun point double de la surface de Kummer, est également une courbe d'ordre 8 de la famille singulière; par suite la développable circonscrite le long d'une telle courbe est de classe 8.

Dans le cas où la courbe C_1 a un point triple en un point singulier de K_1, elle ne touche aucun des six plans singuliers passant par ce point et touche les dix autres en un point : la réciproque, C_2, est une courbe du sixième ordre (n° 76), passant par les dix points singuliers de K_2 non situés dans un même plan singulier.

Inversement, la réciproque d'une telle courbe C_2 du sixième ordre est une courbe C_1, d'ordre 8, de la famille singulière, ayant un point triple en un point singulier.

Or, le long de C_2, on peut inscrire à K_2 une surface du troisième ordre à quatre points doubles (n° 49); donc, le long de C_1 on pourra inscrire à K_1 une *surface de Steiner*, et, par suite :

Il y a seize familles, chacune trois fois infinie, de surfaces de Steiner inscrites à une surface de Kummer; les courbes de contact des surfaces d'une même famille sont les courbes d'ordre 8, *de la famille singulière, qui ont un point triple en un des seize points singuliers.*

79. Voici quelques propriétés de ces surfaces déduites, par dualité, de celles énoncées au n° 49 :

Les surfaces de Steiner inscrites à la surface de Kummer le long des courbes d'ordre 8 *qui ont un point triple en un même point singulier ont chacune pour droites doubles trois droites passant par ce point et formant un trièdre dont les faces touchent le cône des tangentes de la surface de Kummer au point singulier considéré.*

Inversement, *les trois arêtes d'un trièdre, circonscrit au cône des tan-*

gentes d'une surface de Kummer en un point singulier, sont les droites doubles d'une surface de Steiner inscrite à cette surface.

Deux surfaces de Steiner inscrites, appartenant à une même famille, se touchent en quatre points de la surface de Kummer; ces quatre points, situés dans un même plan, sont les points de contact avec cette surface d'une même conique, qui est tracée sur les deux surfaces de Steiner considérées.

Observons enfin que les quatre plans singuliers d'une surface de Steiner inscrite, c'est-à-dire les quatre plans qui la touchent chacun suivant une conique, forment un *tétraèdre circonscrit par ses faces et par ses arêtes* à la surface de Kummer. Ces tétraèdres sont les réciproques de ceux du n° 50, qui sont inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes; le théorème du n° 51 se transforme ainsi :

Les trois arêtes d'un trièdre circonscrit au cône des tangentes d'une surface de Kummer en un point singulier rencontrent respectivement la surface en deux nouveaux points : les six points ainsi obtenus sont trois à trois sur quatre plans qui touchent la surface de Kummer, et ces quatre plans sont les faces d'un tétraèdre dont les six arêtes touchent également la surface. Les points de contact des six arêtes sont les six points primitifs.

CHAPITRE IX.

GENRE DES COURBES ALGÉBRIQUES TRACÉES SUR LA SURFACE DE KUMMER. GÉOMÉTRIE SUR CES COURBES.

80. Nous étudierons, dans ce Chapitre, les courbes tracées sur la surface de Kummer, au point de vue de leur genre et de toutes les propriétés qui se rattachent à la notion de genre; nous arriverons ainsi, dans ce sujet de recherches, à des résultats simples et intéressants, liés d'une manière étroite à notre théorie de la classification des courbes d'un degré donné.

La Géométrie permet d'indiquer immédiatement le genre général des courbes d'un même ordre et d'une même famille, sur la surface de Kummer.

Ces courbes, en effet, sont les intersections de la surface de Kummer,

qui est d'ordre 4, avec des surfaces d'un même degré, q, passant par h coniques singulières ($h = 0, 1, 2, 3, 4$); or, d'après un théorème de M. Nöther, les surfaces d'ordre $q + 4 - 4$, c'est-à-dire d'ordre q, qui passent par les h coniques, coupent une des courbes de la famille considérée en $2(p-1)$ points mobiles, p étant le genre général de ces courbes : en d'autres termes, deux courbes de la famille se coupent en $2(p-1)$ points variables. De plus, ces $2(p-1)$ points forment, sur la courbe à laquelle ils appartiennent, un des *groupes spéciaux* qu'on désigne par la notation $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, ou plus simplement $\mathcal{G}$, et dont voici la définition générale :

Sur une courbe plane d'ordre m, les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ sont les groupes de $2(p-1)$ points mobiles découpés sur la courbe par les courbes adjointes d'ordre $m-3$; sur une courbe gauche, intersection partielle de deux surfaces d'ordres m et n, les groupes $\mathcal{G}$ sont découpés par les surfaces d'ordre $m+n-4$ adjointes, c'est-à-dire passant par le reste de l'intersection des deux surfaces, et par les points doubles de la courbe gauche, si elle en a. Cette dernière définition implique un théorème, qui est dû à M. Nöther et que nous venons de rappeler tout à l'heure. Dans tous les cas, on peut dire que sur une courbe gauche, les groupes $\mathcal{G}$ sont formés par les points qui correspondent univoquement aux points d'un groupe $\mathcal{G}$ sur une courbe plane de même genre et de mêmes modules, ou encore sont formés par les points où s'annule une même différentielle abélienne de première espèce.

Il résulte des définitions et des raisonnements précédents que l'on obtiendra, sur une courbe algébrique générale de la surface de Kummer, *tous* les groupes $\mathcal{G}$, en coupant cette courbe par les courbes du même ordre, et de la même famille; or les groupes $\mathcal{G}$ forment, sur une courbe, un système $p-1$ fois infini, d'après leur définition même sur la courbe plane de genre p : on voit ainsi que $p-1$, pour une courbe de la surface de Kummer est égal au nombre, diminué de 1, des paramètres dont dépend linéairement l'équation des courbes du même ordre et de la même famille.

Ce résultat peut se vérifier autrement : nous avons vu, en effet, que, si N est le nombre des points mobiles communs à deux courbes du même ordre et de la même famille, le genre général, p, de ces courbes est donné par la relation $N = 2(p-1)$; comme nous savons calculer N, par la formule de M. Poincaré, nous pouvons calculer p, et nous arri-

vons ainsi, sans difficulté, à la formule

$$p = 1 + \frac{1}{2}(m^2 - s).$$

$2m$ étant l'ordre de la courbe considérée, supposée sans point multiple, p son genre et $2s$ le nombre des points singuliers de la surface de Kummer par lesquels elle passe.

Ainsi :

Le genre général des courbes d'un même ordre et d'une même famille tracées sur la surface de Kummer est égal au nombre des paramètres dont dépend cette famille.

Deux de ces courbes se coupent en des points mobiles formant sur l'une et sur l'autre un groupe spécial $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, *et, sur l'une d'elles, tous les groupes spéciaux* $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ *sont découpés par les autres courbes de la famille.*

81. Ces résultats peuvent être établis par une méthode analytique, que nous aurons occasion d'appliquer dans nos recherches ultérieures.

Soit $\Theta(u, v)$ la fonction normale la plus générale, d'ordre m et de caractéristique donnée, paire ou impaire : $\Theta_0(u, v)$ étant une quelconque des fonctions ainsi définies, la courbe $\Theta_0 = 0$ sera, sur la surface de Kummer, d'ordre $2m$; si nous désignons par x, y, z les coordonnées non homogènes d'un quelconque de ses points, toute *différentielle abélienne* appartenant à cette courbe sera de la forme $F(x, y, z)\,dx$, F étant rationnel en x, y, z.

Considérons, maintenant, le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, la différentielle

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)}\,du,$$

où $\Theta(u, v)$ a la signification qu'on vient d'indiquer. Nous allons prouver que c'est *une différentielle abélienne de première espèce.*

Démontrons d'abord que c'est une différentielle abélienne, c'est-à-dire qu'en tout point de la courbe $\Theta_0 = 0$, on a

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)}\,du = F(x, y, z)\,dx,$$

ce qui revient à dire que la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} \frac{du}{dx}$$

est exprimable, le long de la courbe, en fonction rationnelle des coordonnées.

Or, sur la surface de Kummer et, par suite, le long de la courbe, les coordonnées x, y, z d'un point sont évidemment, d'après le mode de représentation en coordonnées homogènes, des fonctions uniformes, quadruplement périodiques et *paires* des deux paramètres u, v; on a donc

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ étant des fonctions quadruplement périodiques *impaires*. D'ailleurs, le long de la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, on a

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} du + \frac{\partial\Theta_0}{\partial v} dv = 0.$$

Il vient ainsi, pour l'expression de $\varphi(u, v)$, par élimination de dx, du et dv,

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u, v)}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\Theta_0}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}}.$$

Le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{\varphi(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial v}\Theta_0}{\Theta^2} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial u}\Theta_0}{\Theta^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\varphi(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta_0}{\Theta} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta_0}{\Theta}.$$

Sous cette dernière forme, on voit, puisque $\frac{\Theta_0}{\Theta}$ est évidemment une fonction quadruplement périodique paire, que $\varphi(u, v)$ est aussi une fonction quadruplement périodique, *paire*.

Or il est clair que toute fonction $\varphi(u, v)$ quadruplement périodique

et paire peut s'exprimer en fonction rationnelle des coordonnées, x, y, z, du point (u, v) de la surface de Kummer; car, si l'on se donne x, y, z, les paramètres u et v n'ont, abstraction faite des multiples des périodes, que deux systèmes de valeurs de la forme u, v et $-u, -v$, auxquels ne correspond qu'une seule valeur de $\varphi(u, v)$.

La fonction $\varphi(u, v)$ étant ainsi une fonction rationnelle de x, y, z, notre différentielle est abélienne.

Reste à établir qu'elle est de première espèce. Or cette différentielle,

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

ne peut devenir infinie, puisque $\Theta(u, v)$ est une fonction entière, qu'aux points de la courbe $\Theta_0 = 0$ qui annulent $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}$. Mais la relation

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} du + \frac{\partial\Theta_0}{\partial v} dv = 0$$

montre qu'en ces points du s'annule également, et que la différentielle reste finie; l'analogie avec le cas des courbes algébriques planes est évidente.

Il ne peut y avoir d'exception que pour les points de la courbe $\Theta_0 = 0$ qui vérifieraient les relations $\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire pour les points qui seraient *multiples* sur la courbe considérée.

Écartant provisoirement ce cas particulier, nous voyons que pour une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, sans point multiple, les intégrales abéliennes

(1) $$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\right)} du$$

sont de première espèce.

82. Réciproquement, toute intégrale de première espèce, le long de la courbe $\Theta_0 = 0$ est de la forme précédente; en effet, nous savons (n° 80) que le genre de $\Theta_0 = 0$ est égal au nombre (diminué de une unité) des paramètres qui figurent dans l'équation des courbes du même ordre et de la même famille; si $\varpi + 1$ est ce nombre, on aura $p = \varpi$. Mais les fonctions telles que Θ, linéairement indépendantes, sont en nombre $\varpi + 1$, par définition; si l'on fait abstraction de la

fonction Θ_0, les ϖ autres donnent, sous la forme (1), ϖ (ou p) intégrales distinctes de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$. Le nombre des intégrales distinctes de première espèce, sur une courbe de genre p, étant toujours égal à p, on voit qu'on a ainsi obtenu toutes ces intégrales, pour la courbe $\Theta_0 = 0$, sous la forme (1).

Ce résultat aurait pu d'ailleurs s'établir directement par voie exclusivement analytique. Donc :

Les intégrales abéliennes de première espèce, appartenant à une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ *de la surface de Kummer, ont pour expression générale*

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v)$ *désigne la fonction thêta normale la plus générale de même ordre et de même caractéristique que la fonction* $\Theta_0(u, v)$, *paire ou impaire en même temps que celle-ci.*

83. *Remarque.* — Si la courbe $\Theta_0 = 0$ a un point double, il est clair que la courbe $\Theta = 0$ doit passer par ce point pour que l'intégrale abélienne correspondante y reste finie; plus généralement, si $\Theta_0 = 0$ a un point multiple d'ordre h, on voit, comme dans le cas des courbes planes, que la courbe $\Theta = 0$ doit avoir, au même point, un point multiple d'ordre $h - 1$. Les courbes $\Theta = 0$ satisfaisant à cette condition seront dites *adjointes* de la courbe $\Theta_0 = 0$.

On voit également qu'un point double diminue le genre de une unité, un point triple de trois, etc.; il peut y avoir exception si le point multiple est un des points singuliers de la surface de Kummer; mais nous ne discuterons pas ce cas spécial, facile à examiner, et sans intérêt pour nos recherches actuelles.

84. L'étude des intersections d'une courbe générale de la surface de Kummer avec les courbes de la même famille et du même ordre revient, d'après la théorie précédente, à celle des groupes $\mathcal{G}$ sur cette courbe, et réciproquement. Or on connaît, pour une courbe algébrique quelconque, un certain nombre de propriétés générales des groupes $\mathcal{G}$, qui donneront ainsi autant de propriétés correspondantes, sur la surface de Kummer, relativement aux courbes d'une même famille.

Voici deux exemples :

Parmi les courbes d'ordre $n-3$, adjointes à une courbe plane d'ordre n et de genre p, il en est $2^{p-1}(2^p-1)$ qui touchent celle-ci en tous leurs points, non singuliers, de rencontre avec elle; il en est $p(p^2-1)$ qui ont avec cette courbe un contact d'ordre $p-1$ en un point. Donc :

Parmi les courbes du même ordre et de la même famille qu'une courbe donnée, de genre p, sans point multiple, sur la surface de Kummer : 1° il en est $2^{p-1}(2^p-1)$ qui touchent la proposée en tous leurs points (non fixes) de rencontre avec elle; 2° il en est $p(p^2-1)$ qui ont avec elle, en un point, un contact de l'ordre le plus élevé possible.

85. Des résultats plus nombreux et plus intéressants dérivent de la considération des *groupes* de points sur les courbes de la surface de Kummer, et en particulier de certains *groupes spéciaux;* mais, avant d'aborder ce sujet de recherches, il est nécessaire de rappeler, dans une courte digression, quelques définitions ou propositions de la théorie générale des courbes algébriques.

Soit C une courbe algébrique plane d'ordre n et de genre p : les courbes d'un degré donné, adjointes à C et passant par un certain nombre de points fixes de cette courbe, la coupent en outre en h points mobiles : les groupes de h points ainsi déterminés sont dits *équivalents* entre eux; les groupes équivalents à un groupe donné forment un *système de groupes.*

Analytiquement, deux groupes $a_1, a_2, \ldots, a_h$ et $b_1, b_2, \ldots, b_h$ sont équivalents, lorsque l'on a, en désignant par $\int g\,dx$, une intégrale quelconque de première espèce, appartenant à C,

$$\int_{a_1}^{b_1} g\,dx + \int_{a_2}^{b_2} g\,dx + \ldots + \int_{a_h}^{b_h} g\,dx = 0 \quad (1),$$

Inversement, si une telle relation existe pour chacune des p intégrales

(1) Le second membre de cette relation n'est nul qu'à des multiples près des $2p$ périodes de l'intégrale $\int g\,dx$.

de première espèce, les groupes $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ sont équivalents. C'est le théorème d'Abel et sa réciproque.

Dans un système de groupes, on distingue deux éléments :

1° Le nombre h des points d'un groupe du système ;

2° La multiplicité, r, du système, c'est-à-dire le nombre de points d'un groupe qu'on peut se donner arbitrairement.

En général, d'après le théorème d'Abel, p points d'un groupe d'un système donné sont déterminés par les $h-p$ autres ; on a donc

$$r = h - p,$$

mais il peut se faire qu'on ait

$$r = h - p + \rho,$$

ρ étant positif ; on dit alors que le système correspondant à ces valeurs de h et r est un *système spécial*, *d'indice* ρ. Les groupes d'un système spécial sont dits *groupes spéciaux*.

D'après cela, tout système de groupes comprenant moins de $p+1$ points est spécial.

Les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ forment un système spécial, d'indice 1.

La théorie des systèmes spéciaux est dominée par le théorème suivant, dit *de Riemann-Roch :*

Par les points d'un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité r et d'indice ρ, *on peut faire passer un nombre* $\rho - 1$ *fois infini de courbes adjointes d'ordre* $n-3$: *ces courbes déterminent, par leurs points mobiles d'intersection avec* C, *un nouveau système de multiplicité* $\rho - 1$, *qui est un système spécial d'indice* $r+1$.

Les deux systèmes seront dits *complémentaires*.

Une courbe plane d'ordre n est coupée, par les droites de son plan, suivant des groupes de n points, équivalents entre eux : il résulte du théorème de Riemann-Roch que, si le système déterminé par ces groupes est un système spécial, d'indice ρ, la courbe considérée admet une famille linéaire, $\rho - 1$ fois infinie, de courbes adjointes d'ordre $n-4$, et réciproquement. Les courbes jouissant de cette propriété sont dites *spéciales*.

De même, si les groupes de points déterminés sur une courbe plane

par les coniques de son plan appartiennent à un système spécial d'indice ρ, la courbe proposée admet une famille linéaire $\rho - 1$ fois infinie de courbes adjointes d'ordre $n - 5$; ....

Sur une courbe gauche C, les groupes, spéciaux on non, d'un même système, sont formés par les points qui correspondent aux points d'une des courbes planes sur lesquelles C est représentable point par point.

Une courbe gauche, d'ordre n, est dite *spéciale* lorsque le groupe formé par les n points où elle est rencontrée par un plan quelconque détermine un système spécial. Les courbes gauches spéciales présentent un grand intérêt : c'est à leur existence que tiennent les difficultés du problème de la classification des courbes gauches d'un degré donné.

Toute courbe gauche pour laquelle on a $p \geqq n - 2$ est spéciale; en effet, les n points où elle est coupée par un plan déterminent un système de groupes dont la multiplicité est au moins égale à 3; par suite, pour ce système, $p - h + r$, c'est-à-dire $p - n + r$, est au moins égal à 1, si $p \geqq n - 2$; le système est donc spécial.

86. Revenons maintenant aux courbes tracées sur la surface de Kummer, et introduisons, pour simplifier le langage, une nouvelle définition.

Nous dirons que deux fonctions théta normales, simultanément paires ou impaires, appartiennent à la même *série* si leurs ordres diffèrent d'un nombre pair d'unités et si elles ont même caractéristique. D'après cela, les fonctions normales paires et impaires se répartissent en 64 séries; il y a, pour les fonctions paires, 32 séries, se subdivisant en 16 séries de fonctions d'ordre pair et 16 séries de fonctions d'ordre impair; de même pour les fonctions impaires : c'est la traduction des résultats des n°s 4 et 5. Les courbes de la surface de Kummer qui correspondent aux fonctions d'une même série passent toutes par les mêmes points singuliers de la surface; les degrés de deux quelconques d'entre elles diffèrent de $4n$ unités. Nous dirons également qu'elles appartiennent à la même *série*.

87. Si la courbe d'ordre $2m$, passant simplement par $2s$ points singuliers de la surface de Kummer, a d points doubles, la valeur trouvée au n° 80 pour le genre devra être diminuée de d unités. On a ainsi

$$p = 1 + \frac{1}{2}(m^2 - s) - d.$$

Si la condition $p \geqq 2m - 2$ est vérifiée, la courbe sera spéciale (n° 85); or, si d est nul, il est à remarquer que l'inégalité précédente est toujours vérifiée dès que m dépasse 4; ainsi :

Toute courbe de la surface de Kummer, sans point multiple, et d'ordre supérieur à 8, *est une courbe spéciale.*

Pour préciser ce résultat, il y a lieu de déterminer la multiplicité du système spécial qui comprend les groupes de points de la courbe situés dans un même plan; il est évident que ce nombre est au moins égal à 3; nous allons montrer qu'il a précisément la valeur 3.

Soit, en effet, $\Theta_0 = 0$ l'équation d'une courbe C_0 d'ordre $2m$, de genre p, sans point multiple; désignons par Θ' la fonction thêta la plus générale, d'ordre $m - 2$, et de la même série que Θ_0, par Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les quatre fonctions normales d'ordre 2, de caractéristique nulle. Il est évident que la fonction

$$\Theta(u, v) = (\lambda_1 \Theta_1 + \ldots + \lambda_4 \Theta_4)\Theta',$$

où les λ sont des constantes arbitraires, est du même ordre, m, et de la même famille que Θ_0. Par suite, les deux systèmes de groupes définis respectivement, sur la courbe C_0, par les points mobiles d'intersection de cette courbe avec les plans $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_4 = 0$, et les courbes $\Theta' = 0$, systèmes dont le premier est spécial si p est au moins égal à $2m - 2$, sont complémentaires : le second est donc également spécial, d'après le théorème de Riemann-Roch. Pour démontrer que la multiplicité du premier système est égale à 3, il suffit évidemment d'établir que *tous* les groupes de ce système sont formés de points situés dans un même plan, ou bien, en vertu du théorème de Riemann-Roch, de démontrer que toute courbe $\Theta(u, v) = 0$, de même ordre et de même famille que $\Theta_0 = 0$, qui passe par les points non fixes où la courbe C_0 est coupée par une des courbes $\Theta' = 0$, la coupe en outre en $2m$ points situés dans un même plan.

Or les courbes $\Theta = 0$, $\Theta_0 = 0$, $\Theta' = 0$ appartiennent à la même série; la première passe donc par *tous* les points, *fixes ou non*, qui sont communs aux deux dernières, en vertu de l'hypothèse même; la courbe $\Theta + \lambda\Theta_0 = 0$ passe aussi par ces points, et l'on peut choisir la constante λ de manière à la faire passer par un nouveau point de la courbe $\Theta' = 0$: elle coupe ainsi cette dernière en un point de plus que ne

l'exige le théorème de M. Poincaré, et, par suite, puisque la courbe $\Theta'=0$ peut être choisie indécomposable, la fonction $\Theta+\lambda\Theta_0$ devra contenir Θ' en facteur. Le quotient $\frac{\Theta+\lambda\Theta_0}{\Theta'}$ est, d'après la nature de Θ, Θ_0, Θ', une fonction thêta, normale, d'ordre 2, de caractéristique nulle; il vient ainsi

$$\Theta+\lambda\Theta_0=\Theta'(\lambda_1\Theta_1+\ldots+\lambda_4\Theta_4),$$

ce qui montre bien que la courbe $\Theta=0$ coupe en outre $\Theta_0=0$ en $2m$ points, situés dans le plan $\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_4 x_4=0$.

Nous avons ainsi établi que la multiplicité du système spécial formé par les groupes de points de C_0 situés dans un même plan est égale à 3; de même on voit que les groupes du système complémentaire sont formés *uniquement* par les points d'intersection mobiles de la courbe C_0 (d'ordre $2m$) avec les courbes d'ordre $2m-4$ de la même série.

88. Plus généralement, on établit de la même manière que, si p est supérieur ou égal à $2mq-\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)+2$, la courbe C_0 est coupée par toute surface d'ordre q suivant un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)-1$; le système complémentaire est formé par les groupes des points mobiles communs à la courbe proposée et aux courbes de la même série, d'ordre $2m-4q$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toute courbe, sans point multiple, tracée sur la surface de Kummer, et d'ordre $2m$, est coupée par les courbes de la même série, d'ordre $2m-4q$, suivant des groupes de points mobiles formant un système spécial. Ce système ne comprend pas d'autres groupes que ceux ainsi définis.

Le système complémentaire est formé exclusivement par les groupes de $2mq$ points découpés sur la courbe proposée par les surfaces d'ordre q de l'espace.

Il est inutile d'énoncer la condition restrictive

$$p \geqq 2mq-\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)+2;$$

elle est vérifiée nécessairement s'il existe des courbes d'ordre $2m-4q$, de la même série que la proposée.

Si la courbe a des points doubles, la proposition précédente s'applique aux courbes d'ordre $2m - 4q$ *adjointes* (n° 83) à la proposée.

Il résulte aisément de ce qui précède que, sur la surface de Kummer, les seules courbes, sans point multiple, qui ne soient pas *spéciales*, sont les seize coniques, les biquadratiques, les sextiques passant par dix points singuliers et les courbes d'ordre 8 de la famille singulière.

89. *Remarque.* — Les surfaces d'ordre q découpent sur une courbe C_0 de la surface de Kummer des groupes appartenant à un système de multiplicité au moins égal à $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)-1$; si le système est spécial, la multiplicité a précisément cette valeur, comme nous venons de le voir. L'indice ρ est égal à

$$p - 2mq + \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) - 1 \quad (^1),$$

p et $2m$ désignant toujours le genre et l'ordre de la courbe.

La projection de cette courbe sur un plan est une courbe, C'_0, d'ordre $2m$ et de genre p, sur laquelle existe un système de groupes spéciaux d'indice ρ; les intersections de C'_0 avec les courbes d'ordre q de son plan forment des groupes de ce système, et, par suite (n° 85), C'_0 admet une famille linéaire, $\rho - 1$ fois infinie, de courbes adjointes d'ordre $2m - q - 3$.

Donnons quelques exemples :

Les sextiques passant par six points singuliers situés dans un même plan se projettent suivant des courbes du sixième ordre qui ont six points doubles situés sur une conique.

Les courbes du huitième ordre ne passant par aucun point singulier se projettent suivant des courbes du même ordre, à douze points doubles : ces douze points sont sur une cubique, et sur une infinité triple de quartiques.

Les courbes du huitième ordre passant par huit points singuliers se projettent suivant des courbes du même ordre, à quatorze points doubles situés sur une infinité simple de quartiques.

---

(1) Il est clair que si la courbe considérée est sur h surfaces d'ordre q, linéairement distinctes, la multiplicité et, par suite, l'indice du système doivent être diminués de h.

90. Étudions maintenant les points mobiles communs à C_0 et aux courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$.

Ces courbes coupent C_0, comme on le voit de suite, en $2(p-1)+2mq$ points mobiles; les groupes de points ainsi déterminés appartiennent évidemment à un même système, qui n'est pas spécial, puisque chaque groupe comprend plus de $2(p-1)$ points. La multiplicité de ce système est donc $p+2mq-2$; pour qu'il ne comprenne pas d'autres groupes que ceux qu'on vient de définir, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un de ces groupes comprenant $p+2mq-2$ points arbitraires de la courbe C_0.

Or les courbes d'ordre $2m+4q$, passant par $2s$ points singuliers de la surface de Kummer, dépendent linéairement (n° 80) de

$$1+\frac{1}{2}(m+2q)^2-\frac{s}{2} \text{ paramètres};$$

parmi ces courbes figurent celles qui ont pour équation

$$0=\Theta_0(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\ldots),$$

Θ_0 étant toujours le premier membre de l'équation de C_0, et θ_1, θ_2, ... désignant les fonctions, linéairement distinctes, paires, d'ordre $2q$, de caractéristique nulle. Ces fonctions étant (n° 4) en nombre égal à $2q^2+2$, on pourra, parmi les points communs à C_0 et à une courbe de la même série, d'ordre $2m+4q$, en choisir arbitrairement un nombre égal à

$$1+\frac{1}{2}(m+2q)^2-\frac{s}{2}-2q^2-2,$$

c'est-à-dire, puisque $p=1+\frac{1}{2}(m^2-s)$, égal à

$$p+2qm-2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi les groupes déterminés sur C_0 par les courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$, appartiennent à un système qui ne contient pas d'autres groupes; il est clair d'ailleurs qu'on obtient un groupe particulier du système en combinant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ avec le groupe de $2mq$ points de C_0 situés sur une surface d'ordre q.

Voyons maintenant ce que donnent ces propriétés pour la courbe C'_0, projection de C_0.

Au système de groupes considéré correspondra, sur C'_0, un système

de groupes, renfermant chacun $2mq+2(p-1)$ points, et parmi lesquels figurent les groupes obtenus en combinant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ avec celui que forment les $2mq$ points de C'_0 situés sur une courbe d'ordre q. Or une courbe d'ordre $2m-3$ adjointe à C'_0 et une courbe d'ordre q forment une courbe adjointe d'ordre $2m+q-3$: donc, d'après les propriétés connues des courbes adjointes, tous les groupes du système seront découpés sur C'_0 par les courbes adjointes d'ordre $2m+q-3$ et réciproquement. Ainsi :

Soient C_0 *une courbe d'ordre* $2m$, *sans point multiple, de la surface de Kummer, et* C'_0 *la courbe du même ordre suivant laquelle elle se projette sur un plan quelconque : les courbes de la surface de Kummer de la même série que* C_0, *d'ordre* $2m+4q$, *découpent sur cette courbe des groupes de points mobiles, qui ont pour projections les groupes déterminés sur la courbe* C'_0 *par les courbes adjointes d'ordre* $2m+q-3$ *et réciproquement* (1).

Ce théorème permet d'étendre à une courbe de la surface de Kummer les propositions si nombreuses que l'on connaît sur les groupes de points communs à une courbe plane et à ses adjointes d'un ordre donné.

Sans insister ici sur ces applications bien faciles, nous aborderons l'étude de courbes intéressantes et très générales situées sur la surface de Kummer; nous les appellerons *courbes univoques*, en raison d'une de leurs propriétés fondamentales.

CHAPITRE X.

COURBES UNIVOQUES.

91. Soit $\theta_0(u, v)$ une fonction thêta quelconque : *si cette fonction n'est ni paire, ni impaire*, et si elle ne le devient pas quand on la multiplie par $e^{-\frac{p}{2}u-\frac{q}{2}v}$ (n° 10), la courbe $\theta_0(u, v)=0$, sur la surface de

(1) Si C_0 a des points doubles, le théorème s'applique aux courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$, qui lui sont adjointes (n° 83).

Kummer, doit être en réalité considérée comme donnée par l'équation

$$\vartheta_0(u, v)\,\vartheta_0(-u, -v) = 0;$$

elle a été comprise dans les recherches que nous avons faites jusqu'ici (n° 14), mais elle jouit de propriétés particulières qui rappellent celles des sections de la surface par ses plans tangents : ces sections appartiennent d'ailleurs à la catégorie de courbes dont il s'agit (n° 59).

La fonction $\vartheta_0(u, v)$ peut, comme nous le savons (n° 2), se mettre sous la forme

$$\vartheta_0(u, v) = \Theta_0(u - \lambda, v - \mu),$$

où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta à caractéristique nulle.

Nous retrouvons ainsi les courbes dont nous avons dit un mot au n° 61.

Elles jouissent de cette propriété fondamentale que, pour chaque point de l'une d'elles, on peut séparer les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$ qui correspondent à un point de la surface de Kummer, car si la fonction $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)$ n'est ni paire, ni impaire, elle ne s'annule que pour un seul des systèmes d'arguments u, v et $-u$, $-v$ qui appartiennent à un point de la courbe

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0 \qquad (\text{n° } 60).$$

Si la fonction $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)$ était paire ou impaire, on retomberait sur les courbes générales étudiées jusqu'ici, car on a vu (n° 14) que toute fonction thêta, paire ou impaire, est nécessairement une fonction normale.

Ce cas étant exclu, il ne correspond, à un point de la courbe

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

qu'un seul système de valeurs des paramètres u et v, aux multiples près des périodes : pour rappeler cette propriété, nous donnerons aux courbes dont il s'agit le nom de *courbes univoques*.

Si $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta d'ordre m, la courbe

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

est, d'après le théorème de M. Poincaré, *d'ordre* $4m$; *elle a* (n° 61) m^2 *points doubles*, donnés par les deux équations

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) = 0.$$

Enfin, la fonction $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)$ étant une fonction thêta normale d'ordre $2m$, de caractéristique nulle et paire, la courbe précédente est (n° 16) *l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m, touchant la première en m^2 points.*

La réciproque de cette dernière proposition n'est pas vraie; nous verrons, en effet, plus loin de quelles propriétés spéciales jouissent les surfaces d'ordre m qui passent par les courbes univoques d'ordre $4m$.

Les courbes représentées par l'équation

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

quand on fait varier λ et μ, en laissant Θ_0 invariable, se correspondent en général point par point (n° 61); enfin (n° 62), le long de la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

du et dv sont des différentielles abéliennes de première espèce.

Le *genre* de cette courbe se détermine par la formule du n° 87, où l'on fait $s=0$ et $d=m^2$; on trouve ainsi

$$p=1+\frac{1}{2}(4m^2)-m^2=m^2+1.$$

92. Soit $\Theta(u, v)$ une fonction normale quelconque, d'ordre m, à caractéristique nulle; l'intégrale

$$(1)\qquad \int\frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\left(\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}du$$

est une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Elle est abélienne, car si x, y, z désignent les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface de Kummer, exprimées en fonction quadruplement périodiques de u et v, la fonction

$$\varphi(u, v)=\frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\left(\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\frac{du}{dx}$$

peut s'écrire, le long de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$ (n° 81),

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}}.$$

Le dénominateur de cette expression est évidemment une fonction uniforme, quadruplement périodique de u, v : or, à un point de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)$, ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul système de valeurs de u, v (n° 91) et, par suite, qu'une seule valeur de la fonction $\varphi(u, v)$: celle-ci est donc exprimable rationnellement en fonction des coordonnées du point (u, v) de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$. En d'autres termes, l'intégrale considérée est abélienne.

Elle est de première espèce, car il est manifeste qu'elle ne devient infinie en aucun point de la courbe $\Theta_0=0$, à moins que celle-ci n'ait, en dehors des m^2 points indiqués plus haut, d'autres points doubles vérifiant les relations

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial v}=0.$$

Nous écarterons, sauf avis contraire, ce cas spécial.

On trouve ainsi un nombre d'intégrales de première espèce égal à m^2-1, puisqu'il y a m^2 fonctions Θ linéairement distinctes parmi lesquelles figure Θ_0; ces intégrales, jointes aux intégrales $\int du$ et $\int dv$, donnent le nombre total m^2+1, ou p, des intégrales distinctes de première espèce.

93. Cela posé, nous appellerons *courbes univoques* d'un même ordre et d'une même famille celles qui sont représentées par une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction de caractéristique nulle, d'un ordre *donné*, et où λ et μ sont *fixes :* une famille de courbes univoques est donc définie par l'ordre de la fonction $\Theta(u, v)$ et par les valeurs de λ et μ.

Il est à observer que la famille de courbes univoques définie par des valeurs λ et μ des deux paramètres est la même que celle définie par les valeurs $-\lambda$ et $-\mu$: en effet, $\Theta(u, v)$ étant une fonction normale à caractéristique nulle, la fonction $\Theta(-u, -v)$ est une fonction de même ordre et de même caractéristique, $\Theta'(u, v)$, en sorte que la

courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, qui est, sur la surface de Kummer, la même que la courbe $\Theta(-u-\lambda, -v-\mu)=0$, est aussi la même que la courbe $\Theta'(u+\lambda, v+\mu)=0$.

94. *Remarque.* — Deux courbes univoques d'ordre $4m$ et $4n$ se coupent en $4mn$ points; on peut observer que ces points se répartissent en deux groupes distincts de $2mn$ points chacun. En effet, les deux courbes

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0,$$

où les Θ sont des fonctions d'ordre marqué par l'indice, se coupent aux $2mn$ points dont les coordonnées u, v vérifient les deux équations précédentes; la première pouvant aussi s'écrire

$$\Theta_m(-u-\lambda, -v-\mu)=0;$$

les $2mn$ solutions communes à cette équation et à l'équation

$$\Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0$$

donnent $2mn$ *nouveaux* points d'intersection des deux courbes.

Si les deux courbes sont du même ordre et de la même famille caractérisée par les valeurs λ, μ, on peut, d'une seule façon, mettre leurs équations sous la forme

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta'_m(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

les $2m^2$ points communs aux deux courbes, et dont les arguments vérifient ces deux équations, jouent un rôle plus important que les $2m^2$ autres points d'intersection. Aussi leur réservons-nous le nom de *points communs* aux deux courbes.

D'après ce qui précède, *deux courbes univoques d'un même ordre $4m$, et d'une même famille, ont $2m^2$ points communs, formant sur chacune d'elles un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$*; mais tous les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ sur une courbe univoque ne sont pas obtenus de la même manière, à cause de l'existence des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, qui ne rentrent pas dans le type (1).

Il serait aisé de démontrer des propositions analogues à celles des nos 88 et 90, relativement aux groupes de points découpés, sur une courbe univoque, par les courbes univoques d'ordre inférieur ou supé-

rieur : nous ne développerons pas ici ces considérations, sur lesquelles nous aurons à revenir à propos des surfaces hyperelliptiques générales; nous nous bornerons, dans ce qui suit, à établir quelques propriétés spéciales à la surface de Kummer.

95. Soient $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$, $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ deux courbes univoques de la même famille et d'ordre $4m$; les fonctions Θ_0 et Θ sont d'ordre m. La fonction

$$(2)\qquad \begin{aligned} \varphi(u, v) = {} & \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta(-u-\lambda, -v-\mu) \\ & + \Theta(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) \end{aligned}$$

est évidemment, puisque $\Theta_0(u, v)$ et $\Theta(u, v)$ sont des fonctions de caractéristique nulle, une fonction thêta normale, paire, d'ordre $2m$, de caractéristique nulle. La courbe $\varphi(u, v)=0$ est donc l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $2m$. Cette courbe, d'après la forme $\varphi(u, v)$, passe :

1° Par les points qui annulent

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \quad \text{et} \quad \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu),$$

c'est-à-dire (n° 94) par les points doubles de la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

2° Par les points doubles de la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$;

3° Par les $2m^2$ *points communs* aux deux courbes univoques proposées. Donc :

Les $2m^2$ points communs à deux courbes univoques, d'ordre $4m$, de la même famille, et les m^2 points doubles de chacune d'elles sont sur une même surface d'ordre m (¹).

(¹) Cette proposition constitue bien un théorème. En effet, sur une surface du quatrième degré, comme la surface de Kummer, le nombre des points arbitraires par lesquels on peut faire passer une surface d'ordre m (ne comprenant pas la surface proposée) est au plus égal à

$$\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)-\frac{1}{6}(m-3)(m-2)(m-1)-1,$$

c'est-à-dire à $2m^2+1$. Or, dans la proposition ci-dessus, on établit qu'une surface d'ordre m passe par $4m^2$ points de la surface de Kummer : c'est donc bien un théorème. Une observation analogue s'applique aux propositions qui suivent.

De même, la fonction

$$(3)\qquad \varphi_1(u,v) = \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta(-u-\lambda, -v-\mu) - \Theta(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)$$

est une fonction thêta, normale, impaire, d'ordre $2m$, de caractéristique nulle; la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$ est donc une courbe d'ordre $4m$ de la famille singulière, et, par suite :

Les points communs à deux courbes univoques, d'ordre $4m$, de la même famille et les m^2 points doubles de chacune d'elles sont sur une même courbe, d'ordre $4m$, de la famille singulière.

96. Une courbe univoque d'ordre $4m$, d'une famille donnée, peut se décomposer en m courbes du quatrième ordre. Soit, en effet, $\mathfrak{F}_0(u, v)$ la fonction thêta normale d'ordre 1, de caractéristique nulle; désignons par $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_m, \beta_m$ des constantes : la fonction

$$\vartheta(u,v) = \mathfrak{F}_0(u-\alpha_1, v-\beta_1)\ldots\mathfrak{F}_0(u-\alpha_m, v-\beta_m)$$

peut (n° 2) être mise sous la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu)$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction normale, d'ordre m, de caractéristique nulle; les quantités λ et μ sont, par exemple, données par les équations

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m - m\lambda = 0, \qquad \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m - m\mu = 0.$$

La courbe *univoque* $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$ se décompose ainsi en m courbes d'ordre 4, sections de la surface de Kummer par m plans tangents (n° 59); et l'on peut appliquer à ce système de m courbes les théorèmes généraux qui précèdent.

Rappelons-nous, à cet effet, que les $4m$ points communs à la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$$

et à la courbe plane

$$\mathfrak{F}_0(u-\alpha, v-\beta) = 0$$

se répartissent (n° 94) en deux groupes de $2m$ points; l'un de ces groupes est défini par les équations

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0, \qquad \mathfrak{F}_0(u-\alpha, v-\beta) = 0,$$

et l'autre par

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0, \qquad \mathfrak{F}_0(u+\alpha, v+\beta) = 0;$$

rien ne les distingue l'un de l'autre si l'on se borne à se donner *géométriquement* le plan tangent qui coupe la surface suivant la courbe

$$\mathfrak{S}_0(u-\alpha,\ v-\beta)=0.$$

Observons enfin que les points doubles de la courbe $\theta(u,\ v)=0$, décomposée en m sections de la surface par des plans tangents, sont : 1° les points de contact de ces m plans ; 2° $\frac{1}{2}m(m-1)$ couples de points communs à deux de ces plans et donnés (n° 91) par des équations de la forme

$$\mathfrak{S}_0(u-\alpha_i,\ v-\beta_i)=0,\qquad \mathfrak{S}_0(-u-\alpha_j,\ -v-\beta_j)=0.$$

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, conséquence de ceux du n° 95 :

Soit C *une courbe univoque tracée sur la surface de Kummer et d'ordre* $4m$. *On prend à volonté* $m-1$ *plans tangents de la surface, dont chacun détermine sur* C *deux groupes de* $2m$ *points, et l'on choisit arbitrairement un de ces groupes ; les points des* $m-1$ *groupes ainsi obtenus sont situés, avec les* m^2 *points doubles de* C, *sur une surface* S, *d'ordre* m, *qui coupe en outre* C *en* $2m$ *points, situés dans un nouveau plan tangent de la surface de Kummer.*

La surface S *passe également par les points de contact des* m *plans tangents précédents avec la surface de Kummer, et par* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *couples de points, communs à cette surface et aux* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *droites d'intersection des* m *plans, pris deux à deux.*

Tous les points dont il vient d'être parlé, par lesquels passe la surface S, *sont également situés sur une même courbe de la surface de Kummer, d'ordre* $4m$, *appartenant à la famille singulière.*

Voici une application de ce théorème :

Nous savons (n° 94) que les sections de la surface de Kummer par deux plans tangents se coupent en quatre points, qui se répartissent en deux couples, comme M. Klein l'a d'ailleurs montré par une autre voie [1]; à un couple de plans tangents correspondent ainsi deux couples de points, situés sur la surface de Kummer et sur l'arête du

---

[1] KLEIN, *Math. Annalen*, t. XXVII, p. 107.

couple de plans : chacun de ces couples de points sera dit *conjugué* du couple de plans.

Cela posé, la courbe C du théorème précédent peut elle-même se décomposer en m sections de la surface de Kummer par des plans tangents, d'où cette proposition très générale, et qui se prête à de nombreuses applications :

Il existe des configurations remarquables *formées par* $2m$ *plans tangents de la surface de Kummer et par* $m(2m-1)$ *couples de points de cette surface :*

1° *Les* $m(2m-1)$ *couples de points sont situés respectivement sur les arêtes des* $m(2m-1)$ *couples de plans obtenus en associant deux à deux les* $2m$ *plans tangents de la configuration; sur chaque arête, le couple de points est conjugué du couple de plans;*

2° *Les* $m(2m-1)$ *couples de points et les* $2m$ *points de contact des plans sont sur une même surface d'ordre* m, S ;

3° *Ils sont également sur une même courbe d'ordre* $4m$, *de la famille singulière, tracée sur la surface de Kummer.* C_{4m};

4° *Le long de la courbe* C_{4m}, *on peut inscrire à la surface de Kummer une surface d'ordre* $2m$, *qui touche chacun des* m *plans de la configuration suivant une courbe d'ordre* m; *ces* m *courbes de contact sont sur la surface* S (¹).

Le dernier paragraphe (4°) de ce théorème résultera de nos recherches ultérieures (97).

De plus : *parmi les* $2m$ *plans tangents d'une configuration*, $2m-1$ *sont arbitraires.*

Exemple. — Il existe des *tétraèdres* formés par quatre plans tangents de la surface de Kummer, jouissant des propriétés suivantes : *Une même quadrique* S, *coupe chaque arête du tétraèdre en deux des points où cette arête perce la surface de Kummer, et passe en outre par les points de contact des quatre faces du tétraèdre avec la surface. Les douze points où* S

(¹) D'après cela, l'équation de la surface inscrite d'ordre $2m$ dont il s'agit est de la forme

$$S_m^2 - P_1 P_2 \ldots P_{2m} = 0;$$

$S_m = 0$ étant celle de S, et $P_i = 0$ celle d'un des $2m$ plans de la configuration.

coupe les arêtes du tétraèdre et les quatre points de contact des faces sont sur une même courbe C_8, *d'ordre* 8, *de la famille singulière; une des surfaces de Kummer inscrites à la surface de Kummer proposée le long de* C_8 *touche chaque face du tétraèdre le long de la conique suivant laquelle cette face est coupée par la quadrique* S.

En d'autres termes, les tétraèdres considérés sont des tétraèdres Göpel pour les surfaces de Kummer inscrites à la proposée.

97. Reprenons les deux fonctions φ et φ_1 du n° 95; on a la relation

$$(4)\quad \varphi^2-\varphi_1^2 = 4\,\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \times \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)\,\Theta(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta(-u-\lambda, -v-\mu),$$

qui peut être interprétée géométriquement comme il suit :

Soient

$$S_m(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation d'une quelconque des surfaces d'ordre m qui coupent la surface de Kummer suivant la courbe $\varphi(u, v) = 0$ (n° 95);

$$S_{2m} = 0$$

celle d'une des surfaces d'ordre $2m$ qui touchent la surface de Kummer le long de la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$, qui est d'ordre $4m$ et de la famille singulière;

$$A_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad A = 0$$

les équations de deux surfaces d'ordre m, coupant respectivement la surface de Kummer suivant les courbes univoques $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ et $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$ (n° 91).

L'identité (4) peut s'écrire, en désignant par $S_m(u, v)$, ..., $A(u, v)$ ce que deviennent les polynomes S_m, ..., A lorsqu'on y remplace les coordonnées x_1, ..., x_4 par leurs valeurs hyperelliptiques correspondant à un point u, v de la surface de Kummer,

$$S_{2m}(u, v) = S_m^2(u, v) - 4\,A_0(u, v)\,A(u, v),$$

d'où l'on conclut, pour un point *quelconque* de l'espace, l'identité nouvelle

$$\begin{aligned} &S_{2m}(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ &\quad = S_m^2(x_1, \ldots, x_4) - 4\,A_0(x_1, \ldots, x_4)\,A(x_1, \ldots, x_4) + K\,G(x_1, \ldots, x_4),\end{aligned}$$

$K(x_1, \ldots, x_4)$ étant toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer, et G désignant un polynome d'ordre $2m - 4$.

Si l'on pose

$$(5) \qquad \Sigma_{2m} = S_{2m} - KG,$$

il vient

$$(6) \qquad \Sigma_{2m} = S_m^2 - 4 A_0 A.$$

La surface $\Sigma_{2m} = 0$ est, d'après (5), une surface d'ordre $2m$ touchant la surface de Kummer le long de la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$.

L'identité (6) montre que les surfaces d'ordre m représentées par l'équation

$$(7) \qquad \omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0,$$

où ω est un paramètre variable, ont pour *enveloppe* la surface $\Sigma_{2m} = 0$. D'ailleurs, observons que la surface $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$ coupe la surface de Kummer suivant une courbe ayant pour équation hyperelliptique

$$\begin{aligned} 0 = \omega^2 \Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\, \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \omega\, \varphi(u, v) \\ + \Theta(u - \lambda, v - \mu)\, \Theta(-u - \lambda, -v - \mu), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, en remplaçant $\varphi(u, v)$ par sa valeur (2),

$$(8) \qquad \begin{aligned} &[\omega\, \Theta_0(u - \lambda, v - \mu) + \Theta(u - \lambda, v - \mu)] \\ &\times [\omega\, \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \Theta(-u - \lambda, -v - \mu)] = 0, \end{aligned}$$

La courbe ainsi définie est donc une *courbe univoque*, du même *ordre* et de la même *famille* que les deux courbes primitivement considérées et passant par les *points communs* à celles-ci.

Si nous remarquons enfin que, parmi les surfaces

$$\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0,$$

figurent les surfaces $A_0 = 0$ et $A = 0$, nous pouvons dire que :

Toute surface d'ordre m, passant par une courbe univoque d'ordre 4m, est inscrite (1) *à une surface d'ordre 2m qui touche la surface de Kummer suivant une courbe de la famille singulière.*

---

(1) Nous dirons, comme toujours, que deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre lorsqu'elles se touchent tout le long de leur intersection.

De plus : *Étant données deux surfaces d'ordre m, passant respectivement par deux courbes univoques d'ordre 4m et de la même famille, on peut toujours trouver une surface d'ordre 2m, Σ, inscrite aux deux précédentes et touchant la surface de Kummer le long d'une courbe (d'ordre 4m) de la famille singulière.*

Les courbes de contact de la surface d'ordre 2m avec les deux surfaces d'ordre m primitives sont sur une troisième surface d'ordre m.

Enfin, *la surface d'ordre 2m, Σ, admet un système de surfaces inscrites d'ordre m, parmi lesquelles figurent les deux surfaces primitives, et qui coupent toutes la surface de Kummer suivant des courbes univoques d'ordre 4m, d'une même famille, ayant $2m^2$ points communs* [1].

On peut ajouter que le lieu des points doubles de ces courbes univoques est la courbe d'ordre $4m$ de la famille singulière considérée plus haut.

La propriété (4°) des configurations signalées au n° 96 est une application immédiate du théorème précédent.

La *réciproque* de ce théorème est vraie, et s'énonce ainsi :

Si une surface d'ordre 2m, inscrite à la surface de Kummer le long d'une courbe (d'ordre 4m) de la famille singulière, est l'enveloppe de surfaces d'ordre m, dont l'équation renferme au second degré un paramètre variable, celles-ci coupent la surface de Kummer proposée suivant des courbes univoques, appartenant à la même famille, et passant toutes par les points communs *à deux d'entre elles.*

Soit, en effet, la surface d'ordre $2m$, $\Sigma_{2m} = 0$,

$$\Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0 A, \tag{9}$$

enveloppe des surfaces d'ordre m, $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$.

Si elle est inscrite, le long d'une courbe de la famille singulière, à la

---

[1] L'identité $\Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0 A$ montre que les points communs aux surfaces $S_m = 0$, $A_0 = 0$, $A = 0$ sont des points doubles de Σ_{2m}; or, parmi ces points figurent (n° 95) les *points communs* aux courbes univoques $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ et $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$. Donc :

La surface Σ a m^3 points doubles, parmi lesquels figurent les $2m^2$ points communs aux courbes univoques primitives.

surface de Kummer, en chaque point de celle-ci, on aura

$$\Sigma_{2m}(x_1, \ldots, x_4) = \varphi_1^2(u, v),$$

$\varphi_1(u, v)$ étant une fonction thêta *impaire*, d'ordre $2m$ et de caractéristique nulle. On a, d'ailleurs, en chaque point de la surface de Kummer,

$$S_m(x_1, \ldots, x_4) = \varphi(u, v),$$

φ étant une fonction d'ordre $2m$, de caractéristique nulle et *paire*.

L'expression (9) de Σ_{2m} donne ainsi, sur la surface de Kummer, la relation

$$(10) \qquad 4 A_0 A = \varphi^2 - \varphi_1^2 = (\varphi - \varphi_1)(\varphi + \varphi_1).$$

Or, sur la surface de Kummer, A_0 et A sont égaux à deux fonctions thêta, $\theta_0(u, v)$ et $\theta(u, v)$, paires, d'ordre $2m$ et de caractéristique nulle : d'après cela, $\theta_0(u, v)$ ne peut être égal à aucune des fonctions d'ordre $2m$, $\varphi - \varphi_1$ et $\varphi + \varphi_1$, qui ne sont pas paires, et de même pour $\theta(u, v)$. On en conclut nécessairement que $\theta_0(u, v)$ et $\theta(u, v)$ se décomposent chacun en un produit de deux fonctions thêta, d'ordre inférieur à $2m$

$$\theta_0(u, v) = \theta'_0 \theta''_0, \qquad \theta(u, v) = \theta' \theta''$$

et que l'on a

$$(11) \qquad 2\theta'_0 \theta'' = \varphi - \varphi_1, \qquad 2\theta''_0 \theta' = \varphi + \varphi_1.$$

Mais si l'on change u, v en $-u, -v$, θ_0 et θ ne changent pas, $\varphi - \varphi_1$ et $\varphi + \varphi_1$ sont permutés l'un dans l'autre : il en résulte bien facilement que θ'_0 et θ''_0, de même que θ' et θ'' se permutent quand on change les signes de u, v ; c'est-à-dire que θ_0 et θ sont de la forme

$$\theta_0(u, v) = \theta'_0(u, v)\, \theta'_0(-u, -v); \qquad \theta(u, v) = \theta'(u, v)\, \theta'(-u, -v),$$

θ'_0 et θ' étant des fonctions thêta d'ordre m.

On en conclut, d'après (11),

$$\varphi(u, v) = \theta'_0(u, v)\, \theta'(-u, -v) + \theta'_0(-u, -v)\, \theta'(u, v),$$

et pour que $\varphi(u, v)$ soit une fonction de caractéristique nulle, il faut que les fonctions θ'_0 et θ' aient les mêmes multiplicateurs (n° I), c'est-à-dire qu'on puisse les mettre sous la forme

$$\theta'_0(u, v) = \Theta_0(u - \lambda, v - \mu),$$
$$\theta'(u, v) = \Theta\,(u - \lambda, v - \mu).$$

λ et μ étant deux constantes et $\Theta_0(u, v)$, $\Theta(u, v)$ désignant deux fonctions thêta d'ordre m à caractéristique nulle.

Dès lors, la surface $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$ coupe la surface de Kummer suivant la courbe

$$\begin{aligned} 0 = \omega^2 \Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\, \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \omega \varphi(u, v) \\ + \Theta(u - \lambda, v - \mu)\, \Theta(-u - \lambda, -v - \mu), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 = [\omega \Theta_0(u - \lambda, v - \mu) + \Theta(u - \lambda, v - \mu)] \\ \times [\omega \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \Theta(-u - \lambda, -v - \mu)]; \end{aligned}$$

ce qui démontre la réciproque à établir.

98. Les propositions qu'on vient de faire connaître donnent une *définition géométrique des courbes univoques*, et rendent à peu près évidentes celles du n° 95. On voit que les courbes univoques sont découpées, sur la surface de Kummer, par des surfaces inscrites à celles qui touchent la surface de Kummer le long de courbes de la famille singulière.

Par exemple, les plus simples des courbes univoques après les sections par les plans tangents, c'est-à-dire *les courbes univoques de huitième ordre, sont découpées par les quadriques inscrites aux surfaces de Kummer qui touchent la proposée le long des courbes* C_8 *de la famille singulière*.

99. On peut, suivant une marche analogue à celle du n° 95, arriver à d'autres propriétés des courbes univoques.

Soit, en effet, $\mathfrak{S}_0(u, v)$ la fonction normale, d'ordre un, de caractéristique nulle; la fonction

$$\begin{aligned} f(u, v) = \mathfrak{S}_0(-u - \lambda', -v - \mu')\, \Theta_0(u - \lambda, v - \mu) \\ + \mathfrak{S}_0(u - \lambda', v - \mu')\, \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu), \end{aligned}$$

où λ' et μ' sont des constantes, est évidemment *paire;* elle sera une fonction thêta normale (d'ordre $m + 1$), et de caractéristique nulle, si l'on a

$$\lambda' = m\lambda, \qquad \mu' = m\mu.$$

En ce cas, la fonction

$$f_1(u, v) = \vartheta_0(-u-\lambda', -v-\mu')\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) - \vartheta_0(u-\lambda', v-\mu')\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)$$

sera une fonction thêta, d'ordre $m+1$, de caractéristique nulle, et *impaire*.

On peut maintenant reproduire, avec les fonctions f et f_1, les raisonnements faits plus haut avec φ et φ_1 : on arrive ainsi, sans difficulté, aux résultats suivants :

I. *Soit une courbe univoque quelconque d'ordre $8m'+4$. Par ses $(2m'+1)^2$ points doubles on peut mener une surface d'ordre $m'+1$, la coupant en outre en $4m'+2$ points, qui sont situés dans un même plan tangent de la surface de Kummer. Ce plan tangent reste fixe pour toutes les courbes univoques d'un même ordre et d'une même famille; son point de contact est également situé sur la surface d'ordre $m'+1$.*

Les $(2m'+1)^2$ points doubles, les $4m'+2$ points simples précédents sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une courbe d'ordre $4(m'+1)$ de la famille singulière tracée sur la surface de Kummer.

Toute surface d'ordre $2m'+1$, qui passe par une courbe univoque d'ordre $8m'+4$, est inscrite à une surface d'ordre $2m'+2$ qui touche elle-même la surface de Kummer le long d'une courbe de la famille singulière.

Exemple. — Les courbes univoques d'ordre douze sont découpées sur la surface de Kummer par les surfaces cubiques (sans point double) inscrites à l'une des surfaces de Kummer qui touchent la proposée le long des courbes C_8 de la famille singulière, et réciproquement.

II. *Soit une courbe univoque quelconque d'ordre $8m'$. Par ses $4m'^2$ points doubles et par une quelconque des coniques de la surface de Kummer on peut mener une surface d'ordre $m'+1$, coupant en outre la courbe proposée en $4m'$ points (non situés sur la conique choisie), qui sont dans un même plan tangent de la surface de Kummer. Ce plan tangent reste le même pour toutes les courbes univoques d'un même ordre et d'une même famille: son point de contact est également sur la surface d'ordre $m'+1$.*

Les $4m'^2$ points doubles, les $4m'$ points simples précédents sont situés,

avec le point de contact du plan tangent, sur une surface d'ordre $m' + 2$, passant par trois coniques de la surface de Kummer qui forment, avec celle primitivement choisie, un groupe de Rosenhain.

Si l'on choisit successivement les seize coniques de la surface de Kummer, les seize plans tangents qui figurent dans l'énoncé précédent se déduisent de l'un quelconque d'entre eux en augmentant u et v de demi-périodes; ils forment donc, ainsi que leurs points de contact, une configuration remarquable, étudiée par MM. Rohn et Klein, et sur laquelle nous n'insisterons pas.

100. Les deux propositions I et II sont également applicables aux courbes univoques décomposées en sections de la surface par des plans tangents; signalons, par exemple, comme conséquence de II, ce théorème :

Soit un couple de plans tangents de la surface de Kummer, et, sur l'arête de ce couple, un quelconque des deux couples de points conjugués du couple de plans : par les deux points du couple choisi et les points de contact des deux plans, on peut mener une sextique, passant par les dix points doubles de la surface de Kummer, qui ne sont pas situés dans un même plan singulier, quelconque d'ailleurs.

En transformant ce résultat par réciprocité (n° 78), ou à l'aide d'une démonstration directe facile, on arrive à cette nouvelle proposition, qui nous sera utile plus tard :

Les points de contact d'un couple de points tangents de la surface de Kummer et les deux points d'un des couples conjugués sont sur une même courbe d'ordre huit, de la famille singulière, ayant un point triple en un des seize points singuliers (arbitraire d'ailleurs) de la surface de Kummer.

Il serait aisé d'étendre encore les théorèmes qui précèdent en remplaçant la fonction $\Im_0(u, v)$ introduite au commencement du n° 99, par une fonction normale, à caractéristique nulle, d'ordre quelconque; ces applications de la méthode générale n'offrent aucune difficulté.

TROISIÈME PARTIE.

SURFACES HYPERELLIPTIQUES GÉNÉRALES.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

101. Nous abordons maintenant l'étude des surfaces hyperelliptiques générales, dont M. Picard a déjà fait connaître quelques propriétés importantes ([1]); nous donnerons d'abord des propositions géométriques applicables à l'ensemble de ces surfaces; nous insisterons ensuite avec plus de détails sur certaines catégories de surfaces ou sur certaines surfaces particulières.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique générale; nous savons (n° 2) que les coordonnées homogènes d'un de ces points, x_1, x_2, x_3, x_4, sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales d'un même ordre, h, et de caractéristique nulle; nous donnerons à ces fonctions (fonctions coordonnées) les notations $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$; $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$.

102. En général, c'est-à-dire si les quatre fonctions $x(u, v)$ sont arbitraires, à un point de $\mathfrak{S}$ ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul système de valeurs des paramètres u, v; nous dirons en ce cas que la *surface est représentable point par point sur le champ hyperelliptique*.

M. Picard a démontré qu'une telle surface est de genre un; l'intégrale double $\int\int du\,dv$ est en effet, sur la surface $\mathfrak{S}$, de la forme

$$\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy,$$

([1]) *Journal de Mathém.*: 4e série, t. I, p. 312 et suiv.; t. V, p. 223 et suiv.

où φ est une fonction rationnelle des coordonnées cartésiennes x, y, z, c'est-à-dire $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x^4}$, d'un point de $\mathfrak{S}$.

Il y a donc une intégrale de cette dernière forme qui reste finie sur toute la surface; il ne peut en exister une seconde, car toute intégrale $\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy$, quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs en u et v, prend la forme $\int\int \mathrm{F}(u, v)\, du\, dv$, où $\mathrm{F}(u, v)$ est une fonction quadruplement périodique uniforme de u, v, et cette intégrale ne peut rester finie que si $\mathrm{F}(u, v,)$ est une constante.

Il est à observer que la démonstration s'applique aussi au cas où à chaque point de $\mathfrak{S}$ correspondent les deux couples d'arguments u, v et $-u, -v$, comme cela se produit pour la surface de Kummer ([1]). En effet, x, y, z sont alors des fonctions quadruplement périodiques *paires* de u, v et toute fonction quadruplement périodique paire aux mêmes périodes pourra s'exprimer rationnellement en x, y, z : il en est ainsi, en particulier, de la fonction $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dy}{du}$, et comme on a

$$\int\int du\, dv = \int\int \frac{dx\, dy}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}},$$

on voit que l'intégrale

$$\int\int du\, dv$$

est bien de la forme

$$\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy,$$

φ étant rationnel. Il existe donc sur la surface une intégrale double rationnelle ne devenant pas infinie et l'on démontre comme plus haut qu'il n'en existe qu'une : la surface est encore de genre un.

103. Une intégrale double rationnelle qui reste finie en tous les points d'une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, d'ordre n, est, comme l'on

---

([1]) Nous verrons plus tard qu'on peut ramener à ce cas le cas plus général où, à chaque point de $\mathfrak{S}$, correspondent *deux* couples d'arguments, abstraction faite des multiples des périodes.

sait, de la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)}{S'_z}\,dx\,dy,$$

$D(x, y, z)$ étant un polynome d'ordre $n-4$; la surface $D=0$ est une *surface adjointe* de la surface $S=0$, c'est-à-dire que toute courbe multiple d'ordre l de la surface $S=0$ est multiple d'ordre $l-1$ sur $D=0$, et que tout point multiple d'ordre l sur $S=0$ est multiple d'ordre $l-2$ sur $D=0$.

Il résulte de là que la surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ admet une et une seule surface adjointe, de degré inférieur au sien de quatre unités.

Dans tout ce qui suit nous désignerons par $\mathfrak{D}$ cette surface adjointe: $D=0$ sera son équation, et $S=0$ sera l'équation de $\mathfrak{S}$.

D'après ce qui précède, on aura

$$\int\int \frac{D}{S'_z}\,dx\,dy = \int\int du\,dv;$$

d'où

$$\frac{D}{S'_z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1. \tag{1}$$

104. Une propriété fondamentale des surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique est, comme l'a montré M. Picard, de posséder deux intégrales de différentielles totales de première espèce: ce sont les intégrales $\int du$ et $\int dv$. Il est clair en effet qu'on a, en chaque point de $\mathfrak{S}$,

$$du = M\,dx + N\,dy, \qquad dv = M_1\,dx + N_1\,dy,$$

M, N, M_1, N_1 étant des fonctions rationnelles de x, y, z. M. Picard a fait voir que leur dénominateur commun est S', et qu'on peut écrire

$$du = \frac{B\,dx - A\,dy}{S'_z}, \qquad dv = \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{S'_z},$$

A, B, A_1, B_1 étant des polynomes entiers en x, y, z d'une forme particulière.

D'après cela on a, sur la surface $\mathfrak{S}$,

$$\int\int du\,dv = \int\int \frac{dx\,dy}{S'^2_z}(BA_1 - AB_1)$$

et, en comparant cette forme à celle du numéro précédent, on trouve

avec M. Picard

(2) $$DS_2' = BA_1 - AB_1.$$

Cette relation importante, vérifiée en tous les points de la surface $S = 0$, nous sera utile à chaque instant.

105. Revenons à l'expression des coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{S}$ à l'aide des fonctions thêta ([1]) : soit h l'ordre des quatre fonc-

---

([1]) On peut se demander si la surface $\mathfrak{S}$ est susceptible de plusieurs modes de représentation hyperelliptique, c'est-à-dire si, le tétraèdre de référence restant le même, les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent être proportionnelles à quatre autres fonctions thêta de caractéristique nulle $x'_1(u, v)$, $x'_2(u, v)$, ..., $x'_4(u, v)$, aux mêmes paires de périodes que $x_1(u, v)$, ..., $x_4(u, v)$. Cette question revient évidemment à cette autre : la surface $\mathfrak{S}$ admet-elle des transformations birationnelles en elle-même ? Soient alors (u, v) un point de $\mathfrak{S}$; (u', v') le point transformé ; on aura nécessairement, puisque du et dv sont les seules différentielles totales de première espèce sur la surface

$$du' = \alpha\, du + \beta\, dv,$$
$$dv' = \gamma\, du + \delta\, dv,$$

α, β, γ, δ étant des constantes. On en tire

$$u' = \alpha u + \beta v + \lambda,$$
$$v' = \gamma u + \delta v + \mu.$$

Pour que u' et v' aient les mêmes systèmes de périodes simultanées que u et v, il faut que α, β, γ, δ soient entiers ; si l'on suppose de plus, comme nous l'avons fait jusqu'ici, qu'il n'y a pas de relation linéaire à coefficients entiers entre les périodes a, b, c, $2\pi i$, on voit qu'il est nécessaire que β et γ soient nuls. Enfin, pour qu'à un point (u', v') corresponde un seul point (u, v), il faut que α et δ soient égaux simultanément à ± 1.

On a donc les deux types de transformation

$$u' = \pm u + \lambda,$$
$$v' = \pm v + \mu,$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

Il en résulte que la surface $\mathfrak{S}$ n'admet qu'un seul mode de représentation hyperelliptique, si l'on ne considère pas comme distinctes les représentations qui se déduisent de l'une d'elles en substituant u' et v' à u et v. Une telle substitution n'altère pas d'ailleurs, comme on le voit de suite, l'ordre h des fonctions $x_j(u, v)$ de la représentation ; la quantité h est donc un nombre lié à $\mathfrak{S}$: nous en verrons la signification géométrique au n° 145.

tions $x_j(u, v)$; si ces fonctions n'ont pas de zéro commun, c'est-à-dire si elles ne s'annulent simultanément pour aucun système de valeurs de u, v, le *degré* de $\mathfrak{S}$ sera égal à $2h^2$. En effet, une droite quelconque, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, coupe $\mathfrak{S}$ en des points dont les arguments sont les solutions communes aux équations

$$x_1(u, v) = 0, \qquad x_2(u, v) = 0,$$

et ces solutions sont au nombre de $2h^2$, d'après le théorème de M. Poincaré. Cela suppose, bien entendu, que $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.

Si les quatre fonctions $x_j(u, v)$ s'annulent simultanément pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des arguments u, v, le degré de $\mathfrak{S}$ devient inférieur à $2h^2$; nous reviendrons plus tard là-dessus, nous bornant à signaler ici les particularités intéressantes qui se présentent dans cette hypothèse.

Il est clair d'abord, et c'est là un résultat bien connu dans la théorie des surfaces représentables sur un plan, que si les quatre fonctions $x_j(u, v)$ s'annulent pour $u = u_0$, $v = v_0$, ainsi que toutes leurs dérivées partielles par rapport à u et v jusqu'à l'ordre k exclusivement, il correspond en général sur la surface $\mathfrak{S}$, au système d'arguments u_0, v_0, non pas un seul point, mais tous les points d'une courbe unicursale d'ordre k. On a en effet, en posant $u = u_0 + \varepsilon$, $v = v_0 + \eta$, ε et η étant très petits,

$$x_j(u, v) = a_j\varepsilon^k + b_j\varepsilon^{k-1}\eta + \ldots + l_j\eta^k + p_j\varepsilon^{k+1} + \ldots \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

a_j, b_j, ... désignant des constantes. Ces développements montrent que le point de $\mathfrak{S}$ qui correspond aux arguments $u_0 + \varepsilon$, $v_0 + \eta$ décrit la courbe unicursale définie par les équations

$$\rho x_j = a_j\lambda^k + b_j\lambda^{k-1} + \ldots + l_j,$$

λ désignant un paramètre variable.

Nous appellerons cette courbe *courbe unicursale singulière*.

Les courbes unicursales singulières (courbes ausgezeichnete de M. Nöther) jouent un rôle important dans la théorie des surfaces hyperelliptiques; M. Picard a démontré tout d'abord que la surface $\mathfrak{S}$ est coupée par son adjointe $\mathfrak{D}$ suivant ses courbes multiples et suivant les courbes unicursales singulières.

Nous présenterons cette démonstration de la manière suivante, afin de pouvoir lui donner une certaine extension.

106. Considérons en premier lieu la relation (1),

$$D(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = S'_z.$$

Elle montre que les points de $\mathfrak{S}$, non situés sur $S'_z = 0$, et dont les coordonnées annulent $D(x, y, z)$, rendent infinie la fonction

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Cette fonction peut s'écrire, si l'on remplace x et y par leurs valeurs $\frac{x_1}{x_4}$ et $\frac{x_2}{x_4}$,

$$\frac{1}{x_4^3}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{vmatrix};$$

elle devient infinie sur $\mathfrak{S}$ le long de la courbe $x_4 = 0$, et ne peut le devenir le long d'aucune autre courbe, les courbes unicursales singulières exceptées. Or la surface $D = 0$ ne passe pas par la courbe $x_4 = 0$, si le tétraèdre de référence a été choisi arbitrairement; elle ne peut donc couper $\mathfrak{S}$ que suivant des courbes unicursales singulières et des courbes situées sur la surface $S'_z = 0$. Mais celle-ci rencontre évidemment $\mathfrak{S}$: 1° suivant les courbes multiples; 2° suivant d'autres courbes dont la définition dépend du choix du tétraèdre de référence, et qui dès lors ne peuvent être sur $\mathfrak{D}$, si ce tétraèdre est quelconque : on voit ainsi que les surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ ne peuvent avoir en commun, en dehors des courbes multiples, que des courbes unicursales singulières.

Réciproquement soit une de ces dernières courbes, il s'agit d'établir qu'elle est sur $\mathfrak{D}$.

Reprenons à cet effet les relations (n° 104)

$$(3)\qquad S'_z\,du = B\,dx - A\,dy; \qquad S'_z\,dv = B_1\,dx - A_1\,dy;$$
$$BA_1 - AB_1 = DS'_z.$$

Le long d'une courbe unicursale singulière, u et v sont constants: du et dv sont donc nuls et par suite on a $BA_1 - AB_1 = 0$. La dernière relation montre alors que la courbe unicursale singulière est sur la surface $DS'_z = 0$, c'est-à-dire sur l'une au moins des surfaces $D = 0$,

$S'_z = 0$. Or elle ne peut être sur $S'_z = 0$, le tétraèdre des coordonnées étant quelconque, que si elle est une ligne multiple de $\mathfrak{S}$, et en ce cas nous savons qu'elle est encore sur $\mathfrak{D}$. La proposition est donc démontrée.

107. Il est à observer que cette dernière partie de la démonstration suppose essentiellement que $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique, les formules (3) n'étant valables que dans cette hypothèse ; *si nous supposons qu'à un point de* $\mathfrak{S}$ *correspondent les couples d'arguments* u, v et $-u$, $-v$, on doit la modifier comme il suit.

Les coordonnées x, y, z d'un point de $\mathfrak{S}$ sont alors des fonctions quadruplement périodiques paires de u, v; dès lors leurs dérivées premières par rapport à u et v sont impaires.

On a d'ailleurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Pour tirer du et dv de ces équations, multiplions les deux membres de chacune d'elles par une même fonction quadruplement périodique, *impaire* $F(u, v)$: le carré de cette fonction sera une fonction rationnelle, $\frac{P}{Q}$, de x, y, z, et de même les produits de $F(u, v)$ par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ étant des fonctions quadruplement périodiques *paires*, seront rationnels en x, y, z. On a ainsi, en tous les points de la surface $\mathfrak{S}$, *pour lesquels la fonction* $F(u, v)$ *n'est ni nulle ni infinie*,

$$dx\sqrt{\frac{P}{Q}} = M\,du + N\,dv,$$

$$dy\sqrt{\frac{P}{Q}} = M_1\,du + N_1\,dv,$$

M, N, M_1, N_1 étant rationnels en x, y, z. On en tire

$$du = \sqrt{\frac{P}{Q}}(G\,dx + H\,dy),$$

$$dv = \sqrt{\frac{P}{Q}}(G_1\,dx + H_1\,dy),$$

G, H, G_1, H_1 étant également rationnels. Cela posé, le long d'une

courbe unicursale singulière,

$$du = 0, \qquad dv = 0,$$

et par suite, en éliminant dx et dy,

$$\frac{P}{Q}(GH_1 - HG_1) = 0.$$

Nous savons d'ailleurs qu'on a, sur la surface $\mathfrak{S}$,

$$\frac{D}{S'_z} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{P}{Q}(GH_1 - HG_1),$$

ce qui montre que $D(x, y, z)$ s'annule en tous les points des courbes unicursales singulières, comme dans le cas général.

Il n'y a d'exception à ce raisonnement que si la fonction $F(u, v)$ est nulle ou infinie le long d'une courbe unicursale singulière, c'est-à-dire si $F(u_0, v_0)$ est nul ou infini, en désignant toujours par u_0, v_0 les valeurs des arguments qui correspondent à tous les points de la courbe. Or $F(u, v)$ est une fonction impaire *quelconque*, quadruplement périodique; elle est toujours nulle ou infinie pour les seize demi-périodes, comme on le voit sans difficulté; il est clair d'ailleurs que les fonctions quadruplement périodiques impaires ne deviennent *toutes* nulles ou infinies pour aucun autre système de valeurs, u_0, v_0, de u et de v; notre analyse établit donc que *la surface* $D(x, y, z) = 0$ *passe par toutes les courbes unicursales singulières de* $\mathfrak{S}$, *celles qui correspondent à des demi-périodes exceptées.*

Nous rencontrerons plus tard des exemples de l'exception intéressante indiquée ici.

108. Dans tout ce qui suit, nous supposerons, sauf avis contraire, que la surface $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.

Toutes les surfaces $\mathfrak{S}$, dont les coordonnées des points s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques uniformes aux mêmes périodes, se correspondent point par point, de telle sorte qu'à une courbe $\Theta(u, v) = 0$, tracée sur l'une, correspondent sur les autres les courbes représentées par la même équation $\Theta(u, v) = 0$. Il résulte de cette remarque que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ jouira d'un certain nombre de propriétés indépendantes de la définition de la surface hypelliptique

sur laquelle on la suppose tracée : telles seront les propriétés qui se rattachent à la notion de genre, et qui possèdent le caractère d'invariance dans les transformations birationnelles. On peut constituer ainsi une *Géométrie des courbes algébriques dans le champ hyperelliptique*, et c'est cette étude que nous allons tout d'abord esquisser.

CHAPITRE II.

GÉOMÉTRIE DES COURBES DANS LE CHAMP HYPERELLIPTIQUE.

109. Nous appellerons *courbe algébrique* du champ hyperelliptique toute courbe tracée sur une surface hyperelliptique représentable, point par point, sur le champ (n° 102), et qui n'est ni une ligne multiple, ni une courbe unicursale singulière de la surface.

La propriété caractéristique des courbes algébriques ainsi définies est de posséder deux intégrales abéliennes de première espèce, $\int du$ et $\int dv$, n'ayant que quatre paires de périodes simultanées; il est clair, en effet, puisque $\int du$ et $\int dv$ sont, sur la surface hyperelliptique, des intégrales de différentielles totales de première espèce, qu'elles seront des intégrales abéliennes de première espèce le long de toute courbe, non multiple, tracée sur la surface. Nous disons non multiple parce qu'à un point d'une courbe multiple correspondent plusieurs systèmes de valeurs de u et de v, et que du et dv peuvent, dès lors, n'être plus des différentielles abéliennes. Il est également évident que les courbes unicursales singulières doivent être exclues de la catégorie des courbes du champ hyperelliptique.

Cela posé, rappelons (n° 8) que, sur une surface hyperelliptique, l'équation d'une courbe algébrique peut toujours se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où λ et μ sont des constantes, et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta de caractéristique nulle.

Introduisons de plus, pour simplifier le langage, les définitions suivantes :

Nous appellerons *courbes de même ordre*, dans le champ hyperellip-

tique, l'ensemble des courbes dont les équations sont de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta d'un ordre donné; parmi les courbes d'un même ordre, nous appellerons *courbes d'une même famille* celles dont l'équation peut être mise sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction à caractéristique nulle, d'un ordre donné, et où λ et μ sont des constantes données (¹).

Si les équations de deux courbes s'obtiennent respectivement en égalant à zéro deux fonctions Θ, d'ordre m et n, la première sera dite *d'ordre supérieur ou inférieur* à l'ordre de la seconde, selon que m sera plus grand ou plus petit que n.

110. *Remarque I.* — Il convient d'observer que, sur une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$, les courbes dont l'équation est de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

$\Theta(u, v)$ désignant une fonction thêta quelconque, d'ordre m, seront de même ordre, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire de même degré. En effet, si les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de $\mathfrak{S}$ sont des fonctions thêta (à caractéristique nulle), d'ordre h, le degré de la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ sera égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$x_j(u, v)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

c'est-à-dire à $2mh$. Toutefois, si les quatre coordonnées $x_j(u, v)$ ont des zéros communs u_0, v_0; u_1, v_1; ..., la courbe précédente sera d'ordre inférieur à $2mh$ quand la fonction $\Theta(u-\lambda, v-\mu)$ s'annulera pour un ou plusieurs des systèmes de valeurs u_0, v_0; ...; mais $2mh$ sera toujours le degré de la courbe obtenue en égalant à zéro la fonction thêta la plus générale d'ordre m.

(¹) Ces définitions concordent avec celles que nous avons données des courbes d'un même ordre et d'une même famille — univoques ou non — sur la surface de Kummer.

111. *Remarque II.* — D'après la remarque faite au n° 11, si $\Theta(u, v)$ et $\Theta_0(u, v)$ désignent deux fonctions quelconques d'ordre m, à caractéristique nulle, les deux courbes du même ordre

$$\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$$

appartiendront à la même famille, si les constantes λ, μ, λ_0, μ_0 vérifient les relations

$$m(\lambda-\lambda_0)\equiv 0, \qquad m(\mu-\mu_0)\equiv 0 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

112. *Remarque III.* — Soient $\Theta_1(u, v)$, $\Theta_2(u, v)$, ..., $\Theta_\rho(u, v)$ des fonctions thêta de caractéristique nulle et d'ordres respectifs m_1, m_2, ..., m_ρ. La fonction

$$\Theta_1(u-\lambda_1, v-\mu_1)\,\Theta_2(u-\lambda_2, v-\mu_2)\ldots\Theta_\rho(u-\lambda_\rho, v-\mu_\rho)$$

où les λ_i, μ_i sont des constantes, pourra, comme on le voit de suite en écrivant les relations auxquelles elle satisfait quand on augmente u et v de périodes simultanées, se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu),$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction de caractéristique nulle, d'ordre $m_1+m_2+\ldots+m_\rho$ et où les constantes λ et μ vérifient les relations

$$\lambda(m_1+m_2+\ldots+m_\rho)=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\ldots+m_\rho\lambda_\rho,$$
$$\mu(m_1+m_2+\ldots+m_\rho)=m_1\mu_1+m_2\mu_2+\ldots+m_\rho\mu_\rho.$$

113. Les deux courbes

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta(u-\lambda', v-\mu')=0$$

se correspondent point par point (n° 91); on peut, pour étudier, dans le champ hyperelliptique, les propriétés des courbes d'un même ordre et d'une même famille, faire choix d'une famille particulière; nous choisirons, dans ce qui suit, celle qui correspond à $\lambda=0$, $\mu=0$; mais nos raisonnements, absolument généraux, s'étendront à toutes les courbes et à toutes les familles de courbes du champ hyperelliptique.

114. Nous savons que $\int du$ et $\int dv$ sont des intégrales abéliennes de première espèce le long d'une courbe quelconque du champ hyperel-

liptique; il est aisé de trouver l'expression des autres intégrales de première espèce appartenant à cette courbe.

Soit, en effet, $\Theta_0(u, v) = 0$ l'équation de la courbe considérée, Θ_0 désignant une fonction thêta d'ordre m, de caractéristique nulle; désignons par $\Theta(u, v)$ une autre fonction, quelconque d'ailleurs, de même ordre et de même caractéristique, l'intégrale

$$(4)\qquad \int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

prise le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, est une intégrale abélienne de première espèce.

Elle est abélienne comme l'établit le raisonnement fait au n° 92, répété mot pour mot; elle est de première espèce, car elle ne peut devenir infinie qu'aux points de la courbe qui annulent $\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}$. Or la relation

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial u} du + \frac{\partial \Theta_0}{\partial v} dv = 0$$

montre que l'intégrale ne deviendra infinie que s'il existe sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ des points dont les arguments vérifient les équations

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta_0}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire des points doubles, ou plus généralement des points *singuliers* d'un ordre quelconque.

Si donc la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ n'a pas de tels points singuliers, l'intégrale ci-dessus est de première espèce. Or les fonctions $\Theta(u, v)$, d'ordre m et de caractéristique nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de m^2 d'entre elles, parmi lesquelles figure la fonction $\Theta_0(u, v)$: il en résulte qu'on obtient, sous la forme (4), $m^2 - 1$ intégrales abéliennes de première espèce linéairement distinctes, ce qui donne en tout, avec $\int du$ et $\int dv$, $m^2 + 1$ intégrales de première espèce.

Il est aisé de voir qu'on a obtenu ainsi *toutes* les intégrales de cette nature linéairement distinctes, c'est-à-dire que le genre p de la courbe proposée est égal à $m^2 + 1$. En effet, les deux courbes

$$\Theta_0(u, v) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta(u, v) = 0$$

ont $2m^2$ points communs, qui varient tous avec $\Theta(u, v)$; d'un autre côté, on sait qu'une différentielle abélienne de première espèce appartenant à une courbe de genre p s'annule en $2(p-1)$ points de celle-ci. On a donc, d'après la forme (4) de l'intégrale,

$$2(p-1) = 2m^2, \qquad \text{d'où} \qquad p = m^2 + 1.$$

Nous pouvons énoncer maintenant ce théorème :

Dans le champ hyperelliptique, les courbes d'un même ordre et d'une même famille, sans point singulier, découpent l'une sur l'autre des groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$.

Dans cet énoncé et dans toutes les recherches qui vont suivre, quand nous parlons de systèmes de courbes dans le champ hyperelliptique, il s'agit de courbes tracées sur une *même* surface hyperelliptique quelconque d'ailleurs; les points communs à deux courbes sont ceux dont les arguments u, v vérifient les équations de ces courbes.

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie; il y a, sur une courbe du champ hyperelliptique, à cause de l'existence des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, d'autres groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ que ceux découpés par les courbes du même ordre et de la même famille.

115. *Remarque.* — Il importe d'observer, pour appliquer le théorème ci-dessus, que tous les *points multiples* d'une courbe algébrique tracée sur une surface hyperelliptique ne sont pas nécessairement des *points singuliers* dans l'acception indiquée plus haut. Ainsi, par exemple, une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ a généralement une courbe double, et toute section plane $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ de $\mathfrak{S}$ a des points doubles aux points où elle coupe la courbe double; mais, dans le champ hyperelliptique, ces points ne sont pas singuliers si les fonctions $x_j(u, v)$, qui définissent les coordonnées d'un point de $\mathfrak{S}$, ne sont soumises à aucune condition particulière.

116. On peut donner quelques propositions simples, relativement aux groupes de points découpés sur une courbe du champ hyperelliptique sans point singulier, par certains systèmes de courbes mobiles.

Observons d'abord que sur une courbe fixe, $\Theta_0(u, v) = 0$, les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent des groupes équi-

valents, car, si

$$\rho_1 \theta_1(u-\lambda, v-\mu) + \rho_2 \theta_2(u-\lambda, v-\mu) + \ldots = 0$$

est l'équation générale des courbes sécantes, λ et μ désignant des constantes fixes et ρ_1, ρ_2, ... des constantes variables d'une courbe à l'autre, il est clair que la somme des valeurs que prend une différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe fixe $\Theta_0 = 0$, aux points communs à cette courbe et à l'une des courbes mobiles, est de la forme

$$A_1\, d\rho_1 + A_2\, d\rho_2 + \ldots,$$

les A étant des fonctions rationnelles de ρ_1, ρ_2, ... Pour que cette dernière expression reste finie, il est nécessaire que $A_1 = A_2 = \ldots = 0$. Par suite (n° 85), les groupes formés par les points communs à la courbe fixe et à l'une des courbes sécantes sont équivalents entre eux.

Étudions, en particulier, les groupes de points déterminés sur une courbe du champ hyperelliptique sans point singulier, $\Theta_0(u, v) = 0$, par les courbes ayant pour équation générale

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\rho_1 \Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') \\ &+ \rho_2 \Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots + \rho_{n^2} \Theta'_{n^2}(u-\lambda', v-\mu') = 0, \end{aligned}$$

où $\Theta'_1(u, v)$, ..., $\Theta'_{n^2}(u, v)$ désignent les n^2 fonctions thêta d'ordre n et de caractéristique nulle, à l'aide desquelles on peut exprimer linéairement toutes les fonctions de même nature. Nous supposerons que n est *inférieur* à l'ordre, m, de $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire que les courbes sécantes sont d'ordre inférieur à celui de la courbe fixe.

Il est aisé de démontrer que les courbes représentées par l'équation (5), où λ', μ' sont supposées fixes, et ρ_1, ρ_2, ..., variables d'une courbe à l'autre, découpent sur la proposée des groupes appartenant à un *système spécial :* soient en effet

$$\Theta''_1(u, v), \quad \Theta''_2(u, v), \quad \ldots, \quad \Theta''_{(m-n)^2}(u, v),$$

$(m-n)^2$ fonctions thêta, linéairement distinctes d'ordre $m-n$ et de caractéristique nulle; désignons par λ'', μ'' deux constantes, liées à λ' et μ' par les relations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} n\lambda' + (m-n)\lambda'' &\equiv 0 \\ n\mu' + (m-n)\mu'' &\equiv 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{(mod. périodes).}$$

La courbe qui a pour équation

$$\begin{aligned} 0 = & [\rho_1 \Theta'_1(u - \lambda', v - \mu') + \rho_2 \Theta'_2(u - \lambda', v - \mu') + \ldots] \\ & \times [\sigma_1 \Theta''_1(u - \lambda'', v - \mu'') + \sigma_2 \Theta''_2(u - \lambda'', v - \mu'') + \ldots], \end{aligned}$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont des constantes quelconques, est, d'après les remarques des nos 111 et 112, une courbe du même ordre et de la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$; elle détermine donc (no 114) sur cette dernière, quand on fait varier $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ des groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$. Or chacune des deux familles de courbes

$$(5) \qquad \rho_1 \Theta'_1(u - \lambda', v - \mu') + \rho_2 \Theta'_2(u - \lambda', v - \mu') + \ldots = 0,$$

$$(5\ bis) \qquad \sigma_1 \Theta''_1(u - \lambda'', v - \mu'') + \sigma_2 \Theta''_2(u - \lambda'', v - \mu'') + \ldots = 0$$

découpe, sur la courbe de genre p, $\Theta_0(u, v) = 0$, des groupes équivalents qui appartiennent respectivement à deux systèmes de groupes, Σ' et Σ''; les groupes de l'un des deux systèmes contiennent moins de p points, puisque l'ensemble d'un groupe de Σ' et d'un groupe de Σ'' comprend $2(p-1)$ points. On en conclut (no 85) que l'un des deux systèmes est spécial, et l'autre l'est également, en vertu du théorème de Riemann-Roch. Donc :

Dans le champ hyperelliptique, les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent, sur une courbe quelconque du champ sans point singulier et d'ordre supérieur à l'ordre des courbes sécantes, des groupes de points qui appartiennent à un système spécial.

La démonstration de ce théorème nous fait de plus connaître une seconde famille de courbes d'un même ordre, découpant sur la courbe fixe des groupes qui appartiennent au système spécial complémentaire du précédent.

117. Ces résultats auxquels nous sommes parvenus si simplement vont nous conduire à des propriétés géométriques intéressantes des courbes du champ hyperelliptique, propriétés qui n'appartiennent pas aux courbes algébriques générales.

Supposons d'abord que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ soit *d'ordre pair*, c'est-à-dire que l'ordre, m, de $\Theta_0(u, v)$ soit égal à $2q$: nous pourrons alors choisir n de façon que les courbes (5) et (5 *bis*) soient du même ordre ; il suffit pour cela de faire $n = q$. Si de plus on choisit λ' et μ' de façon

que l'on ait $\lambda' = \lambda''$, $\mu' = \mu''$, ce qui entraîne, d'après

(6) $$2q\lambda' \equiv 0, \qquad 2q\mu' \equiv 0 \qquad \text{(mod périodes)},$$

les deux familles de courbes (5) et (5 *bis*) seront identiques. A chaque système de valeurs de λ', μ' vérifiant les congruences précédentes correspond ainsi une famille de courbes représentée par l'équation (5); cherchons combien nous obtiendrons, par cette méthode, de familles différentes.

Soient $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}'_0$ et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ deux couples de périodes simultanées; nous aurons pour λ', μ' les solutions

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{2q}, \quad \frac{\mathfrak{P}'_0}{2q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathfrak{P}}{2q}, \quad \frac{\mathfrak{P}'}{2q};$$

pour que les courbes représentées par l'équation (5), où l'on remplace successivement λ' et μ' par ces valeurs, appartiennent à deux familles distinctes, il faut, d'après ce qui a été dit au n° 111, et puisque les fonctions Θ' sont d'ordre q, que les quantités,

$$q\left(\frac{\mathfrak{P}_0}{2q} - \frac{\mathfrak{P}}{2q}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}_0}{2} - \frac{\mathfrak{P}}{2},$$

et

$$q\left(\frac{\mathfrak{P}'_0}{2q} - \frac{\mathfrak{P}'}{2q}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}'_0}{2} - \frac{\mathfrak{P}'}{2},$$

ne soient pas égales à des périodes simultanées, et, par suite, que les couples de demi-périodes $\frac{\mathfrak{P}_0}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_0}{2}$, et $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}$ soient différents, à des périodes près. Il en résulte qu'il y aura autant de familles différentes de courbes (5) répondant au problème qu'il y a de couples distincts de demi-périodes, c'est-à-dire *seize*.

Deux courbes quelconques d'une de ces seize familles découpent sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ deux groupes de points dont l'ensemble forme un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$; en particulier, si les deux courbes considérées coïncident, on obtient, sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, un groupe particulier $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, formé de points deux à deux confondus. L'équation (5) renfermant $n^2 - 1$, ici $q^2 - 1$, paramètres, il y aura un nombre $q^2 - 1$ fois infini de ces groupes particuliers.

Or il est à remarquer que, sur une courbe algébrique quelconque, il n'existe qu'un nombre fini de tels groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$: on sait en effet que,

parmi les courbes d'ordre $N-3$ adjointes à une courbe plane d'ordre N et de genre p, le nombre de celles qui touchent la courbe plane en tous leurs points non singuliers de rencontre avec elle, est égal, en général, à $2^{p-1}(2^p-1)$; c'est seulement pour des courbes particulières que ce nombre pourra devenir infini. Nous avons ainsi trouvé, pour les courbes du champ hyperelliptique, une propriété géométrique qu'on peut énoncer ainsi :

Soit C_0 *une courbe du champ hyperelliptique, sans point singulier, obtenue en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre pair,* $2q$ [1]*; désignons par* C'_0 *sa projection sur un plan quelconque, et, plus généralement, une courbe plane qui lui corresponde point par point; soit* N *le degré de* C'_0 : *il existe seize familles de courbes* $N-3$, *adjointes à* C'_0, *et touchant cette courbe en tous leurs points mobiles de rencontre avec elle; l'équation des courbes d'une même famille dépend de* q^2-1 *paramètres arbitraires.*

Les points de contact des courbes d'une famille forment des groupes équivalents de $4q^2$ *points qui appartiennent à un système spécial, et par les points de deux de ces groupes, on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre* $N-3$.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui qui précède, on établit la proposition plus générale suivante :

Si l'équation de la courbe C_0 *du champ hyperelliptique s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre* rq, *il existe* r^4 *familles de courbes d'ordre* $N-3$ *adjointes à* C'_0 *et ayant avec cette dernière courbe un contact d'ordre* $r-1$ *en chacun de leurs points mobiles de rencontre avec elle; l'équation des courbes d'une même famille dépend de* q^2-1 *paramètres arbitraires.*

Les points de contact des courbes d'une famille forment des groupes équivalents de $2rq^2$ *points qui appartiennent à un système spécial, et par les points de* r *de ces groupes on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre* $N-3$.

En particulier, et cette proposition s'applique à toutes les courbes

---

[1] Le genre de C_0 est (n° 114) égal à $4q^2+1$; réciproquement une courbe du champ hyperelliptique, sans point singulier, de genre $4q^2+1$, s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre $2q$.

sans point singulier du champ hyperelliptique : *si l'équation de* C_0 *s'obtient en annulant une fonction thêta d'ordre* m, *c'est-à-dire si* C'_0 *est de genre* m^2+1, *il existe* m^2 *courbes d'ordre* $N-3$, *adjointes à* C'_0, *et ayant avec cette dernière courbe un contact d'ordre* $m-1$ *en chacun de leurs points (non multiples) de rencontre avec elle.*

Les $2m$ points de contact d'une de ces courbes avec C'_0 correspondent aux points déterminés sur la courbe C_0, c'est-à-dire $\Theta_0(u, v)=0$, par les courbes

$$\vartheta_0(u-\lambda', v-\mu')=0,$$

où λ' et μ' sont définis par les congruences

$$m\lambda'\equiv 0, \qquad n\mu'\equiv 0 \qquad (\text{mod périodes}),$$

et où $\vartheta_0(u, v)$ désigne toujours la fonction thêta d'ordre un, de caractéristique nulle.

Cette dernière propriété n'appartient pas non plus aux courbes algébriques générales, car soit $p=m^2+1$ le genre d'une de ces courbes, supposée plane et d'ordre E : pour trouver une courbe adjointe d'ordre $N-3$ ayant avec elle en $2m$ points un contact d'ordre $m-1$, il faut satisfaire à $2m(m-1)$ conditions; or $2m(m-1)$ est supérieur au nombre de paramètres, $p-1$ ou m^2, dont dépend l'équation des courbes adjointes d'ordre $N-3$, dès que m dépasse 2.

118. *Remarque.* — Les théorèmes ci-dessus s'étendent d'eux-mêmes aux courbes univoques tracées sur la surface de Kummer, lorsque ces courbes n'ont pas d'autres points multiples que les points doubles qui leur appartiennent nécessairement en vertu de leur définition.

On peut en ce cas donner à nos résultats une forme géométrique simple.

Soit en effet $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$ l'équation d'une courbe univoque de la surface de Kummer; si $\Theta_0(u, v)$ est d'ordre m, cette courbe, d'ordre $4m$, est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m, touchant la précédente en m^2 points (n° 91); par suite les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ et les groupes spéciaux sont découpés (n° 80) sur elle par des surfaces d'ordre m passant par les m^2 points doubles.

Cette remarque permet, par exemple, d'énoncer ainsi le dernier théorème du numéro précédent :

Par les m^2 *points doubles d'une courbe univoque d'ordre* $4m$ *tracée sur*

la surface de Kummer, on peut faire passer m^4 surfaces d'ordre m, ayant avec la courbe proposée un contact d'ordre $m-1$ en chacun de leurs $2m$ points (non multiples) de rencontre avec elle.

Les $2m$ points de contact d'une de ces surfaces et de la courbe sont dans un même plan tangent de la surface de Kummer.

Lorsque m dépasse 4, on doit entendre qu'il y a m^4 *systèmes* de surfaces d'ordre m répondant à la question, les surfaces d'un même système coupant la surface de Kummer suivant la même courbe; mais il n'y a jamais que m^4 groupes de points de contact.

119. Arrivons maintenant aux courbes du champ hyperelliptique douées de points singuliers, c'est-à-dire aux courbes représentées par une équation $\Theta_0(u, v) = 0$, telles que les trois équations $\Theta_0(u, v) = 0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v} = 0$ aient un ou plusieurs systèmes de solutions communes en u et v.

Soit u_0, v_0 un quelconque de ces systèmes; il est clair qu'on obtiendra une intégrale de première espèce, appartenant à la courbe $\Theta_0 = 0$, par l'expression

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} du \tag{4}$$

où $\Theta(u, v)$ désigne une fonction de même ordre et de même famille que $\Theta_0(u, v)$, telle que l'intégrale précédente reste finie en tout point singulier u_0, v_0. Si u_0, v_0, est un point double, c'est-à-dire si les dérivées secondes de $\Theta_0(u, v)$ ne s'y annulent pas, il faut et il suffit, pour que l'intégrale (4) reste finie, que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ passe par ce point; si u_0, v_0 est un point multiple d'ordre k, c'est-à-dire si toutes les dérivées de $\Theta_0(u, v)$ par rapport à u et v s'annulent en ce point jusqu'à l'ordre k, exclusivement, la courbe $\Theta(u, v) = 0$ devra avoir au même point un point multiple d'ordre $k-1$. On le démontre par un raisonnement identique à celui que l'on connaît pour les points singuliers des courbes algébriques planes: sur une courbe plane, $f(x, y) = 0$, les propriétés d'un point multiple x_0, y_0 dépendent en effet uniquement d'un certain nombre des premiers termes du développement de $f(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, $y - y_0$, et ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes aux points singuliers d'une courbe

$\Theta_0(u, v) = 0$ du champ hyperelliptique, puisque $\Theta_0(u, v)$ est toujours développable en série convergente suivant les puissances croissantes de $u - u_0, v - v_0$.

D'après cela, et d'une manière générale, si la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a, en un point u_0, v_0, une singularité σ_0, il faudra, pour que l'intégrale (4) reste finie en ce point, que la courbe $\Theta = 0$ possède en u_0, v_0 une singularité bien déterminée σ'_0 : nous dirons que la singularité σ'_0 est *adjointe* de σ_0.

Si l'on considère, dans le développement de $\Theta_0(u, v)$, suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$, les termes (dont les coefficients peuvent être nuls) qui caractérisent la singularité σ_0, il est clair qu'une courbe algébrique plane $f(u, v) = 0$, telle que le développement de $f(u, v)$ commence par les mêmes termes, les autres termes étant quelconques, aura, au point u_0, v_0, la singularité σ_0, et les courbes adjointes à $f(u, v) = 0$ auront, en ce même point, la singularité adjointe σ'_0. On ramène ainsi la recherche de la singularité σ'_0 au problème analogue pour une courbe algébrique plane.

Une courbe possédant, en chaque singularité de la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, la singularité adjointe sera dite *adjointe* à la proposée.

Cela posé, nous allons établir que les intégrales abéliennes de première espèce relatives à une courbe quelconque $\Theta_0(u, v) = 0$ du champ hyperelliptique, sont, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\dfrac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v) = 0$ est une courbe du même ordre et de la même famille que $\Theta_0(u, v) = 0$, et adjointe à celle-ci.

120. Observons d'abord que, si deux courbes ont en un même point deux singularités, σ_1, σ_2, elles ont, en ce point, un certain nombre d'intersections confondues : ce nombre ne dépend évidemment que des termes qui caractérisent les singularités σ_1 et σ_2 dans les développements des premiers membres des équations des deux courbes; il est égal au nombre analogue relatif à deux courbes planes qui auraient en un point les singularités σ_1 et σ_2; nous le désignerons par $I(\sigma_1, \sigma_2)$.

En particulier, le nombre $I(\sigma_0, \sigma'_0)$ des intersections, réunies en un

point singulier, d'une courbe et d'une quelconque de ses courbes adjointes ne dépend que de la singularité σ_0; il jouit de plusieurs propriétés importantes que nous allons exposer.

Tout d'abord, dans le champ hyperelliptique comme dans le plan, le nombre $I(\sigma_0, \sigma'_0)$ est double du nombre qui exprime l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0.

Soit en effet $\Theta_0(u, v)$ une fonction thêta d'ordre m, supposons que la courbe $\Theta_0 = 0$ n'ait qu'une seule singularité, σ_0, et désignons par $\Theta(u, v) = 0$ la courbe adjointe la plus générale, du même ordre et de la même famille que la proposée. La différentielle

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} du$$

étant, par hypothèse, abélienne et de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, s'annulera en $2(p-1)$ points, non fixes, de cette courbe, p désignant le genre de $\Theta_0 = 0$. En d'autres termes, le nombre des points, distincts du point singulier, où les deux courbes $\Theta_0 = 0$ et $\Theta = 0$ se rencontrent, est égal à $2(p-1)$, et l'on a

$$2(p-1) = 2m^2 - I(\sigma_0, \sigma'_0);$$

d'où

$$p = m^2 + 1 - \frac{1}{2} I(\sigma_0, \sigma'_0), \tag{7}$$

ce qui démontre la proposition à établir

En second lieu, le nombre $\frac{1}{2} I(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal au nombre des conditions auxquelles équivaut la singularité σ'_0. Ce théorème est évident dans le plan : soit en effet c'_0 le nombre de conditions dont il s'agit; pour une courbe plane d'ordre n sans points singuliers, les courbes adjointes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, sont en nombre égal à $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, puisque toute courbe d'ordre $n-3$ est adjointe à la proposée. Si la courbe a une singularité σ_0, le nombre des courbes adjointes d'ordre $n-3$ est diminué de c'_0 par définition, et par suite c'_0 est égal à l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} I(\sigma_0, \sigma'_0)$.

La proposition subsiste dans le champ hyperelliptique, puisque les

nombres $I(\sigma_0, \sigma'_0)$ et c'_0 ne dépendent que de la nature de la singularité σ_0; il en résulte que, dans le développement suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$, du premier nombre de l'équation d'une courbe supposée adjointe à une autre courbe, douée en u_0, v_0 de la singularité σ_0, les coefficients doivent satisfaire à $\frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0)$ équations, et ces équations sont linéaires comme dans le cas du plan. Toutefois on pourrait objecter qu'en raison de la nature spéciale des fonctions thêta, un certain nombre des équations précédentes peuvent être des conséquences nécessaires des autres; le nombre c_0 des conditions cherchées serait donc inférieur à $\frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0)$.

Nous allons montrer que cette hypothèse est à écarter.

Supposons toujours que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ n'ait pas d'autre singularité que σ_0; le nombre des courbes adjointes linéairement distinctes du même ordre et de la même famille est égal à $m^2 - c'_0$, et si l'on retranche la courbe $\Theta_0 = 0$ elle-même, il reste $m^2 - c'_0 - 1$ de ces courbes, fournissant par la formule (4) autant d'intégrales abéliennes de première espèce, sur $\Theta_0 = 0$. Si l'on ajoute les intégrales $\int du$ et $\int dv$, on voit que le genre, p, de la courbe $\Theta_0 = 0$ est au moins égal à $m^2 - c'_0 + 1$,

$$p \geqq m^2 - c'_0 + 1.$$

Or on a

$$(7) \qquad p = m^2 + 1 - \frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0);$$

d'où l'on tire

$$c'_0 \geqq \frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0)$$

et par suite, comme c'_0 ne peut dépasser $\frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0)$, d'après ce qui a été dit plus haut, on a nécessairement

$$c'_0 = \frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0).$$

Donc :

Pour une courbe du champ hyperelliptique possédant en un point une singularité σ_0, le nombre $\frac{1}{2}I(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal : 1° au nombre des conditions linéaires auxquelles équivaut la singularité adjointe σ'_0; 2° au nombre qui exprime l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0.

121. Nous sommes maintenant en mesure d'établir la proposition que nous avions en vue relativement aux intégrales abéliennes de première espèce qui appartiennent à une courbe du champ hyperelliptique.

Soit $\Theta_0 = 0$ cette courbe; supposons qu'elle ait en des points u_1, v_1; u_2, v_2; ... des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, soit p son genre, désignons par m l'ordre de $\Theta_0(u, v)$.

On a, d'après le raisonnement du numéro précédent,

$$2(p-1) = 2m^2 - \Sigma\, \mathrm{I}(\sigma, \sigma')$$

ou

$$(8) \qquad p = m^2 + 1 - \frac{1}{2}\Sigma\, \mathrm{I}(\sigma, \sigma'),$$

la somme s'étendant à toutes les singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$.

D'un autre côté, les courbes du même ordre et de la même famille que $\Theta_0 = 0$, adjointes à celles-ci et linéairement distinctes, sont en nombre *au moins* égal à

$$m^2 - \frac{1}{2}\Sigma\, \mathrm{I}(\sigma, \sigma'),$$

puisque chaque singularité σ', adjointe d'une singularité σ, équivaut à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma, \sigma')$ conditions. Nous disons *au moins* parce que les conditions imposées par les diverses singularités σ' pourraient ne pas être indépendantes. En retranchant des courbes adjointes qui précèdent la courbe $\Theta_0 = 0$ elle-même, il reste au moins $m^2 - 1 - \frac{1}{2}\Sigma\, \mathrm{I}(\sigma, \sigma')$ courbes distinctes, donnant par la formule (4) *au moins* autant d'intégrales de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$; en ajoutant maintenant les deux intégrales $\int du$ et $\int dv$, on arrive à l'inégalité

$$p \geqq m^2 + 1 - \frac{1}{2}\Sigma\, \mathrm{I}(\sigma, \sigma')$$

et, en comparant à la relation (8), on voit qu'on doit prendre le signe $=$, et par suite la restriction *au moins* doit être supprimée.

Il en résulte :

1° *Que les conditions imposées aux courbes du même ordre et de la même famille qu'une courbe donnée, par les singularités adjointes des singularités de cette courbe, sont indépendantes les unes des autres;*

2° *Que toutes les intégrales de première espèce appartenant à une courbe*

du champ hyperelliptique sont, à part $\int du$ *et* $\int dv$, *comprises dans le type* (4)(¹).

Nous voyons ainsi qu'une courbe de genre p admet $p-1$ courbes adjointes, linéairement distinctes, du même ordre et de la même famille qu'elle, parmi lesquelles figure d'ailleurs cette courbe même.

122. M. Guccia a démontré, pour les courbes algébriques planes, le théorème suivant, qui s'étend aussi, en vertu des explications que nous venons de donner, aux courbes du champ hyperelliptique [2].

« *Le nombre des conditions auxquelles équivaut, pour une courbe, une singularité donnée en un point donné, est égal au nombre des intersections, réunies en ce point, de deux courbes quelconques douées de cette singularité, diminué du nombre qui exprime l'abaissement du genre que celle-ci produit* [3]. »

Nous aurons l'occasion d'appliquer cette belle et importante proposition, ainsi que la suivante, due au même auteur et que nous énonçons tout de suite pour le champ hyperelliptique.

Soit un système linéaire de courbes, du même ordre et de la même famille,

$$0 = \lambda_1 \Theta_1^{(1)}(u, v) + \lambda_2 \Theta_2^{(1)}(u, v) + \ldots + \lambda_2 \Theta_\alpha^{(1)}(u, v) + \ldots$$

tel que la courbe mobile du système possède en un point une singularité σ_1; soient de même d'autres systèmes linéaires

$$0 = \Sigma_\beta \mu_\beta \Theta_\beta^{(2)}(u, v) = 0;$$
$$0 = \Sigma_\gamma \nu_\gamma \Theta_\gamma^{(3)}(u, v),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$0 = \Sigma_\delta \sigma_\delta \Theta_\delta^{(\rho)}(u, v),$$

(¹) Cette seconde conséquence était évidente *a priori*; la proposition a été en effet démontrée pour les courbes sans point singulier, et il est clair qu'elle subsiste quand on fait varier les coefficients de l'équation d'une courbe sans point singulier de manière à lui faire acquérir un ou plusieurs de ces points.

(²) *Comptes rendus*, 4 octobre 1886.

(³) On suppose dans cet énoncé que si les deux courbes $\Theta_0 = 0$, $\Theta = 0$ ont en un point la singularité considérée, les courbes du système $\lambda_0\Theta_0 + \lambda_1\Theta_1 = 0$ ont en ce point la même singularité.

dont les courbes mobiles possèdent un même point des singularités respectives $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\rho$.

On appellera *singularité composée* $(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\rho)$ la singularité bien déterminée que possède au point considéré, quelles que soient les constantes a, toute courbe représentée par l'équation

$$o = \Sigma a_{\alpha, \beta, \ldots, \delta} \Theta_\alpha^{(1)} \Theta_\beta^{(2)} \ldots \Theta_\delta^{(\rho)},$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \delta$.

Cela posé, on a ce théorème (¹) :

Le nombre de conditions auxquelles équivaut la singularité $(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\rho)$ *en un point donné est égal à la somme des nombres analogues relatifs aux singularités* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$, *augmenté de la somme des intersections deux à deux des mêmes singularités, c'est-à-dire de la somme des nombres* $I(\sigma_i, \sigma_j)$ $[i \gtrless j]$.

Il est à remarquer que M. Guccia n'a pas établi les théorèmes qui précèdent en partant des développements dans le domaine du point singulier; mais les résultats sont applicables aux courbes du champ hyperelliptique puisqu'ils ne dépendent en réalité que des termes caractéristiques de ces développements. D'ailleurs M. Nöther a indiqué une méthode pour déduire les propositions de M. Guccia de l'équation même des courbes au voisinage des points multiples (²).

Il est aisé de voir, à l'aide des principes qui viennent d'être posés relativement aux courbes adjointes, dans quelle mesure les propositions établies plus haut pour les courbes du champ hyperelliptique sans point singulier s'appliquent aux courbes possédant des singularités; nous n'insisterons pas sur ces extensions qui n'offrent aucune difficulté dans chaque cas particulier, et que nous présenterons d'ailleurs sous une autre forme en exposant les propriétés des surfaces adjointes aux surfaces hyperelliptiques générales.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES SURFACES ADJOINTES.

123. Reprenons la surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ dont les coordonnées

---

(¹) *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. III, p. 241.

(²) *Ibid.*, t. IV, p. 300.

d'un point x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles à quatre fonctions thêta d'ordre h et de caractéristique nulle $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$. Nous supposerons que, dans le champ hyperelliptique, c'est-à-dire sur une surface hyperelliptique choisie à volonté, les quatre courbes $x_j(u, v) = 0$, ou, d'une manière plus précise, les courbes

$$(1) \qquad 0 = \lambda_1 x_1(u, v) + \lambda_2 x_2(u, v) + \lambda_3 u_3(u, v) + \lambda_4 x_4(u, v),$$

où les λ sont des constantes quelconques, ont un certain nombre de singularités communes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ aux points u_1, v_1; u_2, v_2; ..., u_ρ, v_ρ.

Dans cette hypothèse tout à fait générale, nous allons établir, entre les surfaces *adjointes* de $\mathfrak{S}$ et les fonctions thêta, une liaison importante qui est la généralisation de notre théorème fondamental pour la surface de Kummer et qui se prêtera à de nombreuses applications géométriques.

La surface $\mathfrak{S}$ définie plus haut étant toujours supposée représentable point par point sur le champ hyperelliptique, on obtiendra son degré n, en cherchant le nombre des solutions non fixes communes aux deux équations

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v) = 0,$$
$$(2) \qquad \mu_1 x_1(u, v) + \ldots + \mu_4 x_4(u, v) = 0,$$

où les λ et les μ sont des constantes quelconques. Ce nombre est égal à $2h^2$ diminué de la somme des intersections des deux courbes (1) et (2) réunies aux points singuliers u_1, v_1; u_2, v_2, ..., u_ρ, v_ρ; c'est-à-dire, d'après la notation du n° 120, de la somme des nombres $I(\sigma_k, \sigma_k)$.

Donc :

$$n = 2h^2 - \Sigma_k I(\sigma_k, \sigma_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Si le point u_k, v_k est un point multiple d'ordre k à branches séparées pour les courbes (1) et si en ce point ces courbes n'ont aucune branche commune, $I(\sigma_k, \sigma'_k)$ est égal à k^2.

Le genre, p, des sections planes de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire des courbes (1), est donné par la formule du n° 121 :

$$p = h^2 + 1 - \frac{1}{2} \Sigma_k I(\sigma_k, \sigma'_k),$$

σ'_k désignant toujours la singularité adjointe de σ_k.

Dans le cas où u_k, v_k est un point multiple d'ordre k de la nature indiquée tout à l'heure, $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$ est égal à $\frac{k(k-1)}{2}$.

124. Arrivons maintenant à l'étude des surfaces adjointes à $\mathfrak{S}$ et d'ordre $n-3$; soit posé

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ étant des constantes. La surface $\mathrm{F} = 0$ est un plan qui détermine sur la surface $\mathfrak{S}$ une section $\mathcal{S}$.

La fonction de u et v

$$\mathrm{F}(u, v) = \mathrm{F}[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)] = \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v)$$

est une fonction thêta, d'ordre h, ayant en chaque point singulier u_k, v_k la singularité σ_k : désignons par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_{p-1}(u, v)$ les premiers membres des $p-1$ courbes, linéairement distinctes, du même ordre et de la même famille que $\mathcal{S}$, et adjointes à cette courbe (remarque finale du n° 121), parmi lesquelles figure d'ailleurs la courbe $\mathrm{F}(u, v) = 0$ elle-même; les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe considérée seront, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$(4) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v)$ est l'une quelconque des fonctions $\Theta_1, \ldots, \Theta_{p-1}$.

L'intégrale $\mathfrak{J}$ peut être mise sous une autre forme qui conduit à des conséquences importantes, relativement aux surfaces adjointes. Représentons en effet comme d'habitude par x, y, z les rapports $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, on a (n° 104) sur $\mathfrak{S}$

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathrm{S}'_z du = \mathrm{B}\, dx - \mathrm{A}\, dy, \\ \mathrm{S}'_z dv = \mathrm{B}_1 dx - \mathrm{A}_1 dy, \end{cases}$$

$$(5\ bis) \qquad \mathrm{DS}'_z = \mathrm{BA}_1 - \mathrm{AB}_1,$$

$\mathrm{S} = 0$ étant toujours l'équation de $\mathfrak{S}$ et $\mathrm{D} = 0$ celle de la surface adjointe d'ordre $n-4$.

Or, le long de la courbe $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{S} = 0$, on a

$$dx\,\mathrm{F}'_x + dy\,\mathrm{F}'_y + dz\,\mathrm{F}'_z = 0,$$
$$dx\,\mathrm{S}'_x + dy\,\mathrm{S}'_y + dz\,\mathrm{S}'_z = 0;$$

d'où

$$\frac{du}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{dy}{S'_z F'_x - S'_x F'_z} = \frac{dz}{S'_x F'_y - S'_y F'_x},$$

étant posé, bien entendu,

$$F(x, y, z) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4.$$

De ces relations et des relations (5), on tire, le long de la courbe $\mathfrak{S}$,

$$\text{(6)} \qquad \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{S'_z\, du}{B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)},$$

ce qui donne la valeur de du, en fonction de dx.

Reste à calculer, pour transformer l'intégrale (4), la valeur de $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)$, en fonction de x, y, z; or on a

$$F(x_1, x_2, x_3, u_4) = x_4 F(x, y, z);$$

d'où, le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$,

$$\text{(6 bis)} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Les relations (5), résolues par rapport à dx et dy, donnent, en tenant compte de (5 *bis*),

$$D\, dx = A_1\, du - A\, dv,$$
$$D\, dy = B_1\, du - B\, dv;$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{A}{D}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{B}{D},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{S'_x}{S'_z} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{S'_y}{S'_z} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{AS'_x + BS'_y}{S'_z}.$$

Portant ces valeurs de $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ dans (6 *bis*), il vient

$$\text{(6 ter)} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4 [B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)] \frac{1}{DS'_z};$$

d'où, finalement, en remplaçant dans (4) du et $\frac{\partial F}{\partial v}$ par leurs valeurs tirées de (6) et (6 *ter*),

$$\mathfrak{J} = \int \frac{\Theta(u, v)\, D(x, y, z)}{x_4} \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}.$$

Supposons que le plan $F=0$ soit le plan $z=z_0$, qui est évidemment un plan arbitraire de l'espace; il restera

$$\mathfrak{J}=\int \frac{\Theta(u,v)\,D(x,y,z_0)}{x_4(u,v)}\,\frac{dx}{S'_y}.$$

Puisque cette intégrale reste finie en tous les points de la courbe plane d'ordre n, $S(x,y,z_0)=0$, il est nécessaire que la fonction

$$\frac{\Theta(u,v)}{x_4(u,v)}\,D(x,y,z_0)$$

soit égale, le long de cette courbe, à un polynome entier d'ordre $n-3$ en x et y, $C(x,y)$, dont les coefficients sont d'ailleurs fonctions de z_0. De plus, la courbe $C=0$ sera adjointe à la courbe

$$S(x,y,z_0)=0.$$

En d'autres termes, la fonction $\frac{\Theta(u,v)}{x_4(u,v)}D(x,y,z)$, qui est, en chaque point de la suface $\mathfrak{S}$, une fonction quadruplement périodique de u, v, et par suite une fonction rationnelle de x, y, z, doit être une fonction entière de x et de y : on verrait de même qu'elle est une fonction entière de x et de z, et par suite de x,y,z. On a ainsi, en chaque point de $\mathfrak{S}$,

(7) $$\frac{\Theta(u,v)}{x_4(u,v)}=\frac{C(x,y,z)}{D(x,y,z)},$$

C désignant un polynome entier. D'après ce qui précède, le degré de C est $n-3$ par rapport à deux quelconques des variables x, y, z : le tétraèdre de référence étant arbitraire, il en résulte nécessairement que C est d'ordre $n-3$, par rapport à l'ensemble des trois variables.

De plus, la courbe commune à la surface $C=0$ et au plan $z=z_0$, qui est un plan arbitraire de l'espace, étant, comme on l'a vu, adjointe à la section de $\mathfrak{S}$ par le même plan, cette surface $C=0$ aura pour courbe multiple d'ordre $l-1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$.

La relation (7), qui peut s'écrire, en revenant aux coordonnées homogènes,

(8) $$\Theta(u,v)=\frac{C(x_1,x_2,x_3,x_4)}{D(x_1,x_2,x_3,x_4)},$$

mettait d'ailleurs ce dernier résultat en évidence, car le premier

membre restant fini pour toutes les valeurs de u et de v, il faut, pour que le second membre soit également fini, que la surface $C = 0$ passe par les courbes communes aux surfaces $D = 0$ et $S = 0$, les courbes unicursales singulières pouvant toutefois être exceptées, puisque le long des courbes $x_1, \ldots, x_4$ s'annulent. On en déduit que toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, qui est multiple d'ordre $l-1$ sur la surface adjointe $\mathfrak{D}$, doit être aussi multiple d'ordre $l-1$ sur $C = 0$. Si cette courbe multiple était *en même temps* une courbe unicursale singulière, le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus, mais nous venons de voir, par une autre voie, que la proposition subsiste encore.

125. La relation (8) montre également comment se comporte la surface $C = 0$ aux points multiples (isolés) de la surface $\mathfrak{S}$.

M. Picard a fait voir que la surface $D = 0$ passe par les points doubles de $\mathfrak{S}$, et qu'elle a pour point multiple d'ordre au moins égal à $l-2$ tout point multiple d'ordre l de cette même surface; de plus, si l'ordre de multiplicité est $l-2$, les termes de degré $l-2$ dans D ne sont pas complètement arbitraires.

Dès lors, pour que la fonction $\Theta(u, v)$, ou $\frac{C}{D}$, reste finie en un point multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, il est nécessaire que la surface $C = 0$ ait en ce point un point multiple du même ordre que la surface $D = 0$; et l'on voit ainsi que la surface $C = 0$ est une surface (d'ordre $n-3$) adjointe à $\mathfrak{S}$, et qu'elle se comporte comme la surface $D = 0$, aux points multiples isolés.

Il est également à observer que si la surface $D = 0$, en un point multiple isolé, avait le même cône des tangentes que la surface $\mathfrak{S}$, la surface $C = 0$ jouirait de la même propriété. Cette condition est en effet nécessaire pour que la fonction $\frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$ reste finie quand le point (x, y, z) s'approche du point multiple en restant sur $\mathfrak{S}$.

126. A chacune des $p-1$ fonctions linéairement distinctes Θ_1, $\Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$, correspond ainsi par la relation (8) une surface d'ordre $n-3$ adjointe à $\mathfrak{S}$: les $p-1$ surfaces obtenues sont distinctes linéairement; sinon, en vertu de la relation (8), les $p-1$ fonctions Θ ne le seraient pas.

Réciproquement, nous allons établir que, si $C = 0$ est l'équation d'une

surface d'ordre $n-3$ *adjointe* à $\mathfrak{S}$, la fonction

$$\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

est égale, en chaque point de $\mathfrak{S}$, à une fonction linéaire et homogène de $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$.

Nous admettrons d'abord, non seulement que la surface $C = 0$ est adjointe à $\mathfrak{S}$ dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire qu'elle a pour courbe multiple d'ordre $l-1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, et pour point multiple d'ordre au moins égal à $l-2$ tout point multiple d'ordre l de cette surface; mais encore que l'expression

$$x_4(u, v)\frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$$

reste finie, sur la surface $\mathfrak{S}$, pour toutes les *valeurs de* u, v *qui correspondent à des points multiples isolés*.

Nous reviendrons ensuite sur cette restriction, pour nous en débarrasser, ou tout au moins pour lui donner un énoncé géométrique simple et précis.

127. Soient $C(x, y, z) = 0$ une surface d'ordre $n-3$ adjointe à $\mathfrak{S}$, $F(x, y, z) = 0$ le plan $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 = 0$; l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int C(x, y, z)\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

est évidemment, d'après l'hypothèse et la théorie générale des intégrales abéliennes, une intégrale de première espèce le long de la courbe plane $S = 0$, $F = 0$, du moins tant que les λ restent quelconques, c'est-à-dire tant que le plan $F = 0$ ne touche pas $\mathfrak{S}$ ou ne passe pas par un des points multiples isolés de cette surface.

Si maintenant on refait en sens inverse les calculs du n° 124, on met $\mathfrak{J}$ sous la forme

$$\mathfrak{J} = \int \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}\,\frac{du}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

étant toujours posé

$$F(u, v) = \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v).$$

On voit ainsi que la fonction de u et v

$$\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_2, x_4)}$$

reste finie en tous les points de la courbe $F(u, v) = 0$, considérée dans le champ hyperelliptique; on en déduit, en faisant varier les λ, qu'elle reste finie en tous les points de $\mathfrak{S}$, les points multiples isolés pouvant seuls être exceptés. Mais cette restriction est inutile, car nous avons admis *a priori* que $\frac{C}{D}$ restait fini en chacun de ces points. Soit alors $\Theta(u, v)$ la fonction $\frac{C}{D}(u, v)$; on a évidemment, puisque les $x_j(u, v)$ sont des fonctions thêta d'ordre h, à caractéristique nulle, et que le degré de $C(x_1, \ldots, x_4)$ surpasse d'une unité celui de $D(x_1, \ldots, x_4)$,

$$\begin{aligned}
\Theta(u + 2\pi i, v) \quad &= \Theta(u, v + 2\pi i) = \Theta(u, v), \\
\Theta(u + a, v + b) &= e^{-hu - h\frac{a}{2}}\,\Theta(u, v), \\
\Theta(u + b, v + c) &= e^{-hv - h\frac{c}{2}}\,\Theta(u, v),
\end{aligned}$$

ce qui montre, puisque $\Theta(u, v)$ est une fonction entière, que c'est aussi une fonction thêta, d'ordre h, de caractéristique nulle.

Enfin l'intégrale $\mathfrak{J}$ restant finie tout le long de la courbe $F(u, v) = 0$, il est nécessaire (n° 121) que $\Theta(u, v)$ soit une combinaison linéaire des $p - 1$ fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$, et c'est là précisément la réciproque qu'il s'agissait d'établir.

128. Supposons maintenant que $C = 0$ soit l'équation d'une surface d'ordre $n - 3$ ayant pour courbe multiple d'ordre $l - 1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, *sans aucune condition relative aux points multiples isolés;* la démonstration précédente établit que la fonction de u et v

$$\frac{C(x_1, \ldots, x_4)}{D(x_1, \ldots, x_4)}$$

reste finie en tous les points de $\mathfrak{S}$, les points multiples isolés pouvant seuls être exceptés.

Deux cas sont à distinguer suivant la nature analytique du point multiple :

En premier lieu, et c'est le cas le plus intéressant, il peut arriver qu'à

un point multiple, O, de $\mathfrak{S}$, corresponde *une infinité* de systèmes de valeurs des paramètres u et v.

Supposons par exemple, ce que nous pouvons toujours admettre, que O soit le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; pour que le cas indiqué se présente, il faut que les trois équations $x_1(u, v) = 0$; $x_2(u, v) = 0$; $x_3(u, v) = 0$ aient une infinité de solutions communes et, par suite, il est nécessaire que les fonctions $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, u)$ soient divisibles par une même fonction thêta, $\theta(u, v)$.

La surface $\mathfrak{S}$ est alors définie par des relations de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta(u, v)\,\theta_1(u, v), \\ x_2 &= \theta(x, v)\,\theta_2(u, v), \\ x_3 &= \theta(u, v)\,\theta_3(u, v), \\ x_4 &= \Theta_4(u, v), \end{aligned}$$

les θ et Θ étant des fonctions thêta.

Inversement, on vérifie sans difficulté qu'une surface ainsi définie admet le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ pour point multiple, et à ce point correspondent les couples d'arguments vérifiant l'équation

$$\theta(u, v) = 0.$$

Soit u_0, v_0 un de ces couples; si u et v s'approchent respectivement de u_0 et v_0, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) s'approche de O, dans la direction définie par les relations

$$\frac{x_1}{\theta_1(u_0, v_0)} = \frac{x_2}{\theta_2(u_0, v_0)} = \frac{x_3}{\theta_3(u_0, v_0)}.$$

Nous appellerons *point multiple de première catégorie* un point multiple de cette nature.

Reprenons maintenant les deux surfaces $C = 0$, $D = 0$; *si la première a au point* O *un point multiple du même ordre que la surface* $D = 0$, le quotient $x_4 \dfrac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$ reste évidemment fini, quand x, y, z s'approche de O en restant sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire en suivant une des directions tangentes à $\mathfrak{S}$ en ce point. Il n'y a d'exceptions que pour les directions tangentes simultanément aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$; en d'autres termes, le quotient

$$x_4 \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)} \quad \text{ou} \quad \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

considéré comme fonctions de u, v, reste fini pour tous les systèmes de valeurs de u, v qui correspondent au point multiple, sauf peut-être pour certains systèmes *en nombre limité*. Ces systèmes de valeurs ne pourraient être en nombre infini qui si les cônes formés par les tangentes en O aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ avaient une partie commune ; c'est là un cas d'exception sur lequel nous reviendrons.

En second lieu, à un point multiple de $\mathfrak{S}$ peut ne correspondre qu'un nombre limité de systèmes de valeurs de u, v; nous n'avons rien à dire de spécial sur ce cas particulier.

Cela posé, nous savons que le quotient $\frac{C}{D}$ reste fini en tous les points (non multiples) de $\mathfrak{S}$, dès que la surface $C = 0$ a pour ligne d'ordre $l - 1$ toute ligne d'ordre l de $\mathfrak{S}$; si de plus cette surface a en chacun des points multiples de $\mathfrak{S}$ un point multiple de même ordre que la surface $\mathfrak{D}$, le quotient $\frac{C}{D}$ considéré comme fonction de u et de v ne pourra devenir infini que pour un nombre limité de systèmes de valeurs de u et de v.

On en conclut alors qu'il reste fini pour toutes les valeurs de u, v.

En effet, la fonction thêta $D[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]$ s'annule pour une infinité de systèmes de valeurs de u et v; si le quotient $\frac{C}{D}$ ne devient infini que pour un nombre limité de ces systèmes, il faut que les deux équations $C(u, v) = 0$ et $D(u, v) = 0$ aient une infinité de solutions communes, ce qui ne peut se présenter que si $C(u, v)$ est divisible par $D(u, v)$, ou par une fonction thêta divisant D. Dans cette dernière hypothèse on pourrait poursuivre le même raisonnement, et l'on arrive ainsi à établir que $C(u, v)$ est divisible par $D(u, v)$, le quotient étant une fonction thêta.

En d'autres termes, le quotient $\frac{C}{D}$ reste fini en *tous* les points de $\mathfrak{S}$, *sans exception*.

Reste à examiner le cas spécial signalé plus haut, celui où les cônes formés par les tangentes aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ en un point multiple, auraient en commun un cône γ : en ce cas, pour que $\frac{C}{D}$ reste fini au point considéré, il faut que la surface $C = 0$ y ait un point multiple du même ordre que la surface $D = 0$ et que les génératrices du cône γ touchent également en ce point la surface $C = 0$. On démontre par la méthode suivie plus haut que la condition est nécessaire et suffisante.

129. Voici la conclusion de cette analyse :

Appelons *surface adjointe* à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ une surface qui a pour ligne multiple d'ordre $l-1$ toute ligne multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, et qui, en tout point multiple isolé de $\mathfrak{S}$, se comporte comme la surface adjointe $\mathfrak{D}$ d'ordre $n-4$.

Le sens de l'expression *se comporte* est donné par l'analyse précédente; en général il suffira que la surface adjointe ait, au point multiple, un point multiple du même ordre que $\mathfrak{D}$; si le cône des tangentes de $\mathfrak{D}$ en ce point est le même que celui des tangentes de $\mathfrak{S}$, ou s'il comprend une partie de ce dernier cône, la surface adjointe devra jouir de la même propriété que $\mathfrak{D}$.

Sous le bénéfice de cette explication, nous pouvons énoncer la proposition géométrique suivante, résultat des recherches des numéros précédents.

130. Théorème I. — *Le nombre de surfaces d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, adjointes à une surface hyperelliptique quelconque $\mathfrak{S}$, d'ordre n, est égal au genre des sections planes de cette surface, diminué d'une unité.*

Si les coordonnées d'un point de la surface hyperelliptique proposée sont proportionnelles à des fonctions thêta, de caractéristique nulle et d'ordre h, ayant en des points $u_1, v_1; \ldots; u_k, v_k; \ldots$, des singularités communes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$, les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ découperont sur la proposée $\mathfrak{S}$ le système linéaire de courbes ayant pour équation

$$\lambda_1 \Theta_1(u, v) + \lambda_2 \Theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{p-1} \Theta_{p-1}(u, v) = 0,$$

$\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$ désignant les $p-1$ fonctions thêta, linéairement distinctes, de caractéristique nulle et d'ordre h, qui ont en chaque point u_k, v_k la singularité σ'_k adjointe de la singularité σ_k.

131. Une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée est applicable à la détermination des surfaces adjointes d'un ordre quelconque, $n+q-4$ l'expression *surfaces adjointes* ayant toujours la signification indiquée au n° 129.

Considérons en effet une surface d'ordre q, quelconque :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0; \qquad \text{ou} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

La fonction de u et v, $F[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]$ est une fonction thêta de caractéristique nulle, d'ordre hq, ayant en tout point singulier u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$ (n° 122). Il en résulte que les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe

$$F[x_1(u, v), \ldots] = 0$$

seront, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$\mathfrak{J} = \int \theta(u, v) \frac{du}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

$\theta(u, v)$ désignant une fonction thêta de caractéristique nulle d'ordre hq, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, adjointe de la singularité $(q\sigma_k)$.

Cette intégrale peut être transformée comme au n° 124.

Considérons la courbe algébrique intersection des surfaces

$$S(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

On a, le long de cette courbe,

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{dy}{S'_z F'_x - S'_x F'_z}$$

et

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{S'_z\, du}{B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)}.$$

D'ailleurs,

$$(9) \qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^q F(x, y, z),$$

et par suite, le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$,

$$(10) \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

d'où, par les calculs du n° 124,

$$\frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q [B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)] \frac{1}{DS'_z},$$

ce qui donne pour l'intégrale $\mathfrak{J}$ la forme définitive

$$(11) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{\theta(u, v)\, D(x, y, z)}{x_4^q} \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}.$$

On a ainsi ramené l'intégrale $\mathfrak{J}$, qui est prise le long de la courbe gauche $S=0$, $F=0$, à une forme simple; pour qu'elle soit de première espèce, il faut d'abord que, en chaque point de cette courbe, la fonction

$$\frac{\theta(u, v)\,D(x, y, z)}{x_4^q}$$

soit égale à un polynome entier d'ordre $n+q-4$, $C(x, y, z)$. Or cette fonction, étant quadruplement périodique en u et v, est en chaque point de $\mathfrak{S}$ une fonction rationnelle de x, y, z; la surface $F=0$ étant quelconque, on voit qu'il est nécessaire qu'*en chaque point de* $\mathfrak{S}$ la fonction rationnelle précédente soit entière, et l'on a ainsi

$$\frac{\theta(u, v)\,D(x, y, z)}{x_4^q}=C(x, y, z),$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$(12)\qquad \theta(u, v)=\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

De plus, la surface $C=0$ doit être adjointe à la surface $\mathfrak{S}$: on le voit, soit à l'aide de la relation qui précède, soit en exprimant directement que l'intégrale

$$\int C(x, y, z)\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

est finie aux points où la surface $F=0$ coupe les lignes multiples de $\mathfrak{S}$.

La réciproque de cette proposition se démontre sans difficulté, en suivant la marche inverse, comme au n° 127.

Si en effet $C=0$ est l'équation d'une surface adjointe à $\mathfrak{S}$, d'ordre $n+q-4$, l'intégrale

$$\mathfrak{J}=\int C(x, y, z)\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

prise le long de la courbe $S=0$, $F=0$, peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{C(x_1, u_2, u_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}\,\frac{du}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)}.$$

Comme $\mathfrak{J}$, d'après la première forme, est une intégrale abélienne de première espèce, on voit que la fonction $\dfrac{C[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]}{D[x_1(u, v), \ldots]}$ reste

finie le long de la courbe considérée et par suite (nos 127-128) en tout point de $\mathfrak{S}$; $\frac{C}{D}$ est donc une fonction entière de u, v, et, en vertu de son expression même, c'est une fonction thêta, d'ordre qh, et de caractéristique nulle, $\theta(u, v)$. La courbe $\theta(u, v) = 0$ doit d'ailleurs avoir en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, pour que l'intégrale reste finie en ce point. Donc :

THÉORÈME II. — *Les surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$ déterminent sur la surface $\mathfrak{S}$ le système de courbes ayant pour équation générale*

$$\lambda_1 \theta_1(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots = 0, \tag{13}$$

les θ étant des fonctions d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$; réciproquement toute courbe (13) *est sur une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$.*

132. Calculons maintenant le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n + q - 4$.

D'après ce qui précède, il est égal au nombre des fonctions $\theta(u, v)$, linéairement distinctes; toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on obtiendra d'autres surfaces adjointes par l'équation

$$SQ = 0,$$

où Q est un polynome quelconque d'ordre $q - 4$, renfermant

$$\frac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1)$$

coefficients arbitraires, et l'on devra ainsi ajouter au nombre des fonctions $\theta(u, v)$ distinctes le nombre

$$\frac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1).$$

Les fonctions thêta linéairement distinctes d'ordre hq et de caractéristique nulle sont en nombre égal à $h^2 q^2$; il faut chercher combien, parmi elles, ont en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)'$.

Nous allons d'abord démontrer que les conditions imposées à une fonction thêta d'ordre hq et de caractéristique nulle par les singularités $(q\sigma_k)'$ sont indépendantes entre elles; le nombre cherché des fonctions $\theta(u, v)$ sera donc égal à $h^2 q^2$ diminué de la somme des

nombres des conditions auxquelles équivaut *chacune* des singularités considérées.

Il a été en effet établi au n° 121 que, si une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a en des points u_1, v_1; u_2, v_2; ... des singularité $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, les conditions imposées par les singularités adjointes $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$, aux courbes du même ordre et de la même famille que $\Theta_0(u, v) = 0$ sont indépendantes; or si $\Theta(u, v)$ est un polynome arbitraire d'ordre q en $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$, la courbe $\Theta_0 = 0$ n'a pas d'autres singularités que la singularité $(q\sigma_k)$, en chaque point u_k, v_k, et par suite les singularités $(q\sigma_k)'$ sont indépendantes, comme nous voulions l'établir, pour les courbes dont l'équation générale s'obtient en annulant une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle.

Cherchons maintenant à combien de conditions équivaut la singularité $(q\sigma_k)'$.

Soient :

C_{kq}, le nombre de conditions auxquelles équivaut la singularité $(q\sigma_k)$;
c_k, le nombre analogue pour la singularité σ_k;
C'_{kq}, le nombre analogue pour la singularité $(q\sigma_k)'$;

on a, d'après le premier théorème de M. Guccia (n° 122) et celui du n° 120,

$$C_{kq} = I(q\sigma_k, q\sigma_k) - C'_{kq};$$

le second théorème de M. Guccia (n° 122) donne

$$C_{kq} = qc_k + \frac{q(q-1)}{2} I(\sigma_k, \sigma_k).$$

Enfin l'on a

$$c_k = I(\sigma_k, \sigma_k) - \frac{1}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k),$$

en vertu du premier théorème de M. Guccia et de celui du n° 120. Égalant les deux valeurs de C_{kq}, et éliminant c_k, on obtient la valeur cherchée de C'_{kq},

$$C'_{kq} = I(q\sigma_k, q\sigma_k) - \frac{1}{2} q(q+1) I(\sigma_k, \sigma_k) + \frac{q}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k).$$

On a d'ailleurs évidemment, d'après la définition même de la singularité $(q\sigma_k)$ (¹),

$$I(q\sigma_k, q\sigma_k) = q^2 I(\sigma_k, \sigma_k),$$

(¹) *Voir* Guccia, *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. III, p. 259.

et, par suite,

$$C'_{kq} = \frac{1}{2} q(q-1) I(\sigma_k, \sigma_k) + \frac{q}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k).$$

Il est à remarquer que la somme des nombres C'_{kq}, pour tous les points u_k, v_k, est indépendante des quantités $I(\sigma_k, \sigma_k)$ et $I(\sigma_k, \sigma'_k)$; on a en effet (n° 123)

$$(14) \qquad \begin{cases} n = 2h^2 - \Sigma I(\sigma_k, \sigma_k), \\ p = h^2 + 1 - \frac{1}{2} \Sigma I(\sigma_k, \sigma'_k); \end{cases}$$

d'où

$$\Sigma C'_{kq} = \frac{q(q-1)}{2}(2h^2 - n) + q(h^2 + 1 - p).$$

Le nombre des fonctions $\theta(u, v)$ est ainsi égal à

$$h^2 q^2 - \Sigma C'_{kq} = \frac{q(q-1)}{2} n + q(p-1).$$

Dans cette expression figurent seulement n, p, q.

133. Nous pouvons maintenant énoncer ce théorème :

Théorème III. — *Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, adjointes à une surface hyperelliptique d'ordre n et dont les sections planes sont de genre p, est égal à*

$$N_q = \frac{1}{2} q(q-1)n + q(p-1) + \frac{1}{6}(q-1)(p-2)(p-3) \quad (^1).$$

Dans cette formule, q est supposé au moins égal a un. Donc aussi :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ découpent sur la proposée une série linéaire de courbes, dont l'équation renferme $\frac{1}{2}(q-1)n + q(p-1) - 1$ paramètres arbitraires.

134. *Remarque.* — Le nombre N_q des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ peut aussi être trouvé sans faire usage des formules de M. Guccia, par la voie géométrique suivante :

---

(1) Le terme complémentaire $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$ ne doit figurer que si q est au moins égal à quatre; mais comme il s'annule pour $q=1$, 2, 3, la formule subsiste pour $q \geqq 1$.

Il résulte des raisonnements faits aux nos 119-121 que le nombre des fonctions $\theta(u, v)$ est égal au nombre des intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe $F = 0$, $S = 0$, diminué de deux unités à cause des intégrales $\int du$ et $\int dv$, et augmenté d'une unité, puisque parmi les fonctions $\theta(u, v)$ figure la fonction

$$F[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)].$$

Soit ϖ le genre de la courbe $F = 0$, $S = 0$, c'est-à-dire le nombre de ses intégrales abéliennes de première espèce; il est toujours entendu que la surface d'ordre q, $F = 0$, est quelconque, c'est-à-dire n'a aucune relation particulière avec $\mathfrak{S}$.

Pour calculer ϖ, cherchons en combien de points, distincts de ses points multiples, la courbe est coupée par une des surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$; on obtient évidemment une telle surface en combinant la surface $\mathfrak{D}$, d'ordre $n - 4$ adjointe a $\mathfrak{S}$, et une surface quelconque d'ordre q; cette dernière coupe la courbe en $q^2 n$ points, et l'on a ainsi

$$2(\varpi - 1) = q^2 n + R_q,$$

R_q étant le nombre des points, situés en dehors des courbes multiples de $\mathfrak{S}$, où la courbe considérée coupe la surface $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire le nombre des points où la surface $F = 0$ coupe les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$.

Pour $q = 1$, la surface $F = 0$ est un plan; ϖ est alors égal à p, et il vient

$$2(p - 1) = n + R_1.$$

Il est clair d'ailleurs que $R_q = qR_1$; si donc on élimine R_q et R_1, on trouve pour ϖ

$$\varpi = \frac{1}{2} q(q - 1)n + q(p - 1) + 1.$$

Par suite, le nombre, $\varpi - 1$, des fonctions $\theta(u, v)$ linéairement distinctes, est égal à

$$\frac{1}{2} q(q - 1)n + q(p - 1),$$

comme nous l'avions démontré par une voie purement analytique.

135. Parmi les surfaces adjointes, celles qui passent par toutes les courbes unicursales singulières offrent un intérêt spécial.

Soit $C = 0$ une de ces surfaces, d'ordre $n+q-4$; reprenons la relation

$$\frac{\theta(u, v)}{x_4^q} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)} \tag{12}$$

vérifiée en tout point de $\mathfrak{S}$. La surface $C = 0$ passant par les courbes unicursales singulières, la fonction $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de x, y, z, reste finie en un point quelconque d'une de ces courbes, pourvu toutefois que ce point ne soit pas à l'infini, c'est-à-dire dans le plan $x_4 = 0$.

Il en résulte que $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de u et v, ne devient pas infinie quand on y remplace u et v par les valeurs u_k, v_k des paramètres u, v qui correspondent à la courbe unicursale considérée; la fonction $\frac{\theta(u, v)}{x_4^q}$ jouira d'après (12) de la même propriété, et par suite la courbe $\theta(u, v) = 0$ aura, en chaque point (u_k, v_k), la même singularité que la courbe $x_4^q = 0$, c'est-à-dire la singularité composée $(q\sigma_k)$.

Réciproquement, soit $\theta(u, v)$ une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point (u_k, v_k) la singularité $(q\sigma_k)$; on a évidemment (n° 131)

$$\frac{\theta(u, v)}{x_4^q} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)},$$

$C = 0$ étant l'équation d'une surface adjointe d'ordre $n+q-4$. Le premier membre reste fini par hypothèse quand u et v s'approchent de u_k, v_k $\left(\text{le rapport } \frac{u-u_k}{v-v_k} \text{ étant arbitraire}\right)$; le second membre jouit donc de la même propriété, et par suite $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de x, y, z, reste finie le long des courbes unicursales singulières, ce qui exige que la surface $C = 0$ passe par toutes ces courbes.

Ainsi :

Théorème IV. — *Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières, découpent sur $\mathfrak{S}$ la série linéaire des courbes comprises dans l'équation*

$$\lambda_1 \theta_1(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots = 0,$$

où $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$, ... désignent les fonctions thêta linéairement distinctes d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$, et réciproquement.

136. Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes et passant par les courbes unicursales singulières, est égal d'après cela au nombre des fonctions $\theta(u, v)$ qu'on vient de considérer augmenté de $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$.

Or ce nombre est *au moins* égal à h^2q^2, diminué de la somme des nombres des conditions auxquelles équivaut chacune des singularités $(q\sigma_k)$: nous disons *au moins*, parce qu'il peut arriver, et qu'il arrive en effet, que les conditions imposées aux fonctions thêta, d'ordre hq et de caractéristique nulle, par les singularités $(q\sigma_k)$, ne soient pas indépendantes les unes des autres.

Le nombre C_{kq} des conditions auxquelles équivaut la singularité $q\sigma_k$ se tire des relations du n° 132; on trouve ainsi

$$C_{kq} = \frac{1}{2}q(q+1)\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k) - \frac{1}{2}q\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$$

et, par suite, en tenant compte des équations (14),

$$\Sigma C_{kq} = \frac{1}{2}q(q+1)(2h^2-n) - q(h^2+1-p).$$

Il vient donc

$$h^2q^2 - \Sigma C_{kq} = \frac{1}{2}q(q+1)n - q(p-1).$$

Ainsi :

Le nombre n_q des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$ *est* AU MOINS *égal à*

$$\frac{1}{2}q(q+1)n - q(p-1) + \frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Si q dépasse une certaine limite, on peut voir que le nombre n_q est *toujours* égal à cette quantité.

137. Une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ coupe $\mathfrak{S}$, en dehors des lignes multiples, suivant une courbe dont le degré, d_q, s'évalue aisément.

Il est clair tout d'abord qu'on a

$$d_q = d_1 + n(q-1);$$

on le voit en supposant que la surface adjointe d'ordre $n+q-4$ se décompose en une surface adjointe d'ordre $n-3$ et en une surface quelconque d'ordre $q-1$.

Pour calculer d_1 observons que l'équation de la courbe déterminée sur $\mathfrak{S}$ par une surface adjointe d'ordre $n-3$ a une équation de la forme

$$\Theta(u, v)=0,$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta d'ordre h, douée en chaque point singulier, u_k, v_k, de la singularité σ'_k.

Le degré de cette courbe sera égal aux nombre des solutions communes aux deux équations

$$\Theta(u, v)=0, \qquad x_1(u, v)=0,$$

abstraction faite des solutions qui coïncident avec un des systèmes singuliers u_k, v_k.

On a ainsi

$$d_1=2h^2-\Sigma \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$$

et par suite, d'après (14),

$$d_1=2(p-1);$$

d'où

$$d_q=2(p-1)+n(q-1).$$

Si la surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passe par les courbes unicursales singulières, le degré δ_q de la courbe suivant laquelle elle coupe en outre $\mathfrak{S}$; est de même égal à

$$\delta_1+n(q-1);$$

or ici on a

$$\delta_1=2h^2-\Sigma \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)=n;$$

d'où

$$\delta_q=nq.$$

Ce résultat est évident, si l'on observe que la surface adjointe considérée peut se décomposer en une surface d'ordre q, quelconque et en la surface adjointe $\mathfrak{D}$, d'ordre $n-4$.

La différence $d_1-\delta_1$ représente la somme des degrés des courbes unicursales singulières; on a

$$d_1-\delta_1=2(p-1)-n.$$

Applications géométriques.

138. Les résultats généraux auxquels nous sommes parvenus relativement aux surfaces adjointes, donnent lieu à des applications géométriques nombreuses, qui vont nous occuper maintenant.

139. I. Tout d'abord ces résultats permettent de vérifier, pour les surfaces hyperelliptiques, la proposition générale si remarquable et si importante qui est due à M. Nöther, et qui est connue sous le nom de *Théorème du Reste* (1).

Ce théorème s'énonce ainsi :

Si une surface d'un ordre donné, adjointe à une surface algébrique $\mathfrak{S}$, *coupe celle-ci (en dehors des lignes multiples) suivant deux courbes* c_1 *et* c', *on dit que* c_1 *et* c' *sont résiduelles. Toute courbe* c'', *résiduelle de* c_1, *est dite corésiduelle de* c', *par rapport à* c_1.

Cela posé, le théorème du Reste est le suivant :

Lorsque sur $\mathfrak{S}$, *des courbes* c', c'', ... *sont corésiduelles par rapport à une même courbe* c_1, *elles le sont également par rapport à toute courbe* c_2 *résiduelle de l'une quelconque d'entre elles.*

Dans le cas d'une surface hyperelliptique, soient $\theta_1 = 0$ et $\theta' = 0$ les équations de deux courbes résiduelles, situées sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$. Le produit $\theta_1\,\theta'$ sera une fonction thêta, d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$. Soient $\theta'' = 0$ une courbe résiduelle de $\theta_1 = 0$, et $\theta_2 = 0$ une courbe résiduelle de $\theta' = 0$; les produits $\theta_1\,\theta''$ et $\theta_2\,\theta'$ jouiront des mêmes propriétés que le produit $\theta_1\,\theta'$. Il en résulte, sans difficulté, que la fonction $\theta_2\,\theta''$ sera aussi une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k, la singularité $(q\sigma_k)'$, ce qui démontre que les courbes $\theta_2 = 0$, $\theta'' = 0$ sont bien sur une même surface adjointe d'ordre $n+q-4$.

Le théorème du Reste est ainsi vérifié.

140. II. Soient c_1, c_2, ..., c_ρ les courbes d'intersection de $\mathfrak{S}$ avec ρ

(1) *Math. Annalen*, t. III, p. 509.

surfaces adjointes, passant par les courbes unicursales singulières, et d'ordres respectifs $n+q_1-4$, $n+q_2-4$, ..., $n+q_\rho-4$. *Ces courbes sont sur une même surface adjointe, passant par les courbes unicursales, et d'ordre* $n+(q_1+q_2+\ldots+q_\rho)-4$.

En effet, soient $\Theta_1=0$, $\Theta_2=0$, ..., $\Theta_\rho=0$ les équations des ρ courbes considérées; $\Theta_j(u, v)$ est une fonction thêta d'ordre hq_j, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q_j\sigma_k)$: donc la fonction thêta, de caractéristique nulle,

$$\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_\rho$$

est d'ordre

$$h(q_1+q_2+\ldots+q_\rho)$$

et a en u_k, v_k la singularité

$$(q_1+q_2+\ldots+q_\rho)\sigma_k.$$

Ce dernier point découle de la définition même des singularités composées. En d'autres termes, la courbe $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_\rho=0$ est, d'après le numéro 135, sur une surface adjointe d'ordre

$$n+(q_1+q_2+\ldots+q_\rho)-4,$$

passant par les courbes unicursales singulières, ce qui est la proposition énoncée.

Nous ne donnerons de ce résultat que l'application suivante :

Soit c la courbe d'ordre qn suivant laquelle $\mathfrak{S}$ *est coupée par une surface adjointe d'ordre* $n+q-4$ *passant par les courbes unicursales singulières; il existe une surface adjointe, d'ordre* $n+rq-4$, *passant par les courbes unicursales singulières, et ayant en outre, avec* $\mathfrak{S}$, *un contact d'ordre* $r-1$ *tout le long de la courbe c.*

Voici une autre proposition de même nature que la précédente :

Soient c_q et c'_s deux courbes, intersections de $\mathfrak{S}$ avec deux surfaces adjointes d'ordres $n+q-4$ et $n+s-4$, dont la première passe en outre par les courbes unicursales singulières : *ces deux courbes sont sur une surface adjointe d'ordre* $n+q+s-4$.

En effet, si $\Theta=0$, $\Theta'=0$ sont les équations des deux courbes, la fonction Θ est d'ordre hq et a, en u_k, v_k, la singularité $(q\sigma_k)$; Θ' est d'ordre sq et a, en u_k, v_k la singularité $(s\sigma_k)'$, c'est-à-dire, comme on le voit aisément, la singularité composée $(s-1)\sigma_k+\sigma'_k$. Le produit $\Theta\Theta'$

est donc une fonction thêta, d'ordre $s+q$, ayant en u_k, v_k la singularité $(q+s-1)\sigma_k+\sigma'_k$, c'est-à-dire $[(q+s)\sigma_k]'$; elle est d'ailleurs de caractéristique nulle, comme les fonctions Θ et Θ'. La proposition est donc établie; la réciproque est vraie et se démontre de la même manière.

141. III. Proposons-nous de traiter le problème des *surfaces de contact adjointes*, passant par les courbes unicursales singulières, c'est-à-dire de déterminer celles de ces surfaces, de degré $n+q-4$, qui ont un contact d'ordre donné, $r-1$, avec la surface $\mathfrak{S}$ tout le long de la courbe suivant laquelle elles coupent cette surface (en dehors des lignes multiples et des courbes unicursales).

Soit

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$$

l'équation de la courbe de contact d'une des surfaces cherchées, $\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta d'ordre ρ et de caractéristique nulle; il faut et il suffit, pour que la courbe réponde au problème géométrique, que $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)$ soit une fonction thêta, d'ordre hq, et que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ soit l'intersection avec $\mathfrak{S}$ d'une surface adjointe d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières.

La condition relative à l'ordre de Θ^r donne l'égalité

$$r\rho=hq.$$

Nous *supposerons* que r est un diviseur de q, c'est-à-dire que $q=rm$; on aura donc

$$\rho=hm.$$

En second lieu, pour que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ puisse être l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales, il faut d'abord qu'elle appartienne à la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v)=0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction d'ordre hq, de caractéristique nulle : cette condition entraîne les congruences (n°s 111 et 112)

$$\left.\begin{aligned} r\rho\lambda &\equiv 0 \\ r\rho\mu &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{(mod périodes), d'où } \lambda=\frac{\mathfrak{T}}{r\rho}, \quad \mu=\frac{\mathfrak{T}'}{r\rho},$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ étant deux périodes simultanées quelconques.

Il faut ensuite que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ ait la singularité $(q\sigma_k)$ en chaque point u_k, v_k, ce qui exige que la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ ait en u_k, v_k la singularité $\left(\frac{q}{r}\sigma_k\right)$, c'est-à-dire $(m\sigma_k)$ (1).

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Nous pouvons maintenant former l'équation générale des courbes de contact.

En effet, ces courbes appartiennent tout d'abord à un certain nombre de familles, déterminées par l'ordre ρ ou hm des fonctions thêta correspondantes et par l'un des systèmes de valeurs de λ et μ obtenus plus haut. Pour calculer le nombre de ces familles, il suffit d'observer que deux courbes

$$\Theta_0\left(u-\frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v-\frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right)=0,$$
$$\Theta_1\left(u-\frac{\mathfrak{P}_1}{r\rho}, v-\frac{\mathfrak{P}'_1}{r\rho}\right)=0,$$

où $\Theta_0(u,v)$ et $\Theta_1(u,v)$ sont des fonctions d'ordre ρ ou rm, de caractéristique nulle, appartiendront à la même famille si l'on a (n° 111)

$$\rho\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1}{r\rho}\equiv 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1}{r}\equiv 0$$
$$\rho\frac{\mathfrak{P}'-\mathfrak{P}'_1}{r\rho}\equiv 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}'-\mathfrak{P}'_1}{r}\equiv 0 \qquad \text{(mod périodes).}$$

On aura donc autant de familles distinctes qu'il y a de $r^{\text{ième}}$ de périodes simultanées, c'est-à-dire r^4.

Soit une courbe d'une des r^4 familles, $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$; pour qu'elle soit une des courbes de contact cherchées, il ne nous reste qu'à exprimer qu'elle a, en u_k, v_k la singularité $m\sigma_k$.

Or l'équation générale des courbes d'une de nos familles dépend linéairement de ρ^2, c'est-à-dire h^2m^2, coefficients; celle de ces courbes linéairement distinctes, qui ont en chaque point u_k, v_k la singularité $m\sigma_k$ sont en nombre *au moins* égal à

$$h^2m^2-\Sigma C_{km},$$

C_{km} étant le nombre des conditions auxquelles équivaut la singula-

(1) C'est à ce point de l'analyse que nous sommes obligés de supposer $q=rm$.

rité $m\sigma_k$. Or on a trouvé (n° 136)

$$h^2 m^2 - \Sigma C_{km} = \frac{1}{2} m(m+1)n - m(p-1).$$

Ainsi, les courbes de contact cherchées se répartissent en r^4 familles; et, dans chaque famille, elles forment une série linéaire $\frac{1}{2} m(m+1)n - m(p-1) - 1$ fois infinie, au moins.

Ces courbes jouissent de propriétés géométriques simples.

Considérons d'abord r courbes de contact, appartenant à une *même* des r^4 familles trouvées plus haut; soient

$$\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right) = 0,$$

$$\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Theta_r\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\ldots\right) = 0$$

leurs équations; la fonction

$$\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right)\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\right)\ldots\Theta_r\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\right)$$

est évidemment une fonction thêta d'ordre $r\rho$, c'est-à-dire d'ordre qh, et de caractéristique nulle; de plus, elle a en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\rho_k)$, puisque chacun des ρ facteurs du produit a la singularité $(m\sigma_k)$ et que l'on a

$$q = pm.$$

En d'autres termes, les r courbes considérées sont sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales singulières.

On démontrerait de même que par $r-1$ courbes de contact données, appartenant à des familles *différentes*, et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, qui découpent sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 familles de courbes de contact.

142. L'énoncé suivant résume ces résultats :

Soit $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique quelconque, d'ordre n et dont les sec-

tions planes sont de genre p; désignons par q, r, m trois entiers positifs quelconques, tels que

$$q = rm.$$

Les surfaces d'ordre $n+q-4$, adjointes à $\mathfrak{S}$, passant par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$, et ayant avec cette surface tout le long de la courbe suivant laquelle elles la coupent en outre, un contact dordre $r-1$, se répartissent en r^4 systèmes.

Pour les surfaces d'un même système, les courbes de contact appartiennent à un même ordre et à une même famille; elles forment, dans cette famille, une série linéaire dont l'équation renferme

$$\frac{1}{2} m(m+1)n - m(p-1) - 1$$

paramètres, au moins.

Les r courbes de contact de r surfaces d'un même système sont sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières.

Par $r-1$ courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut mener une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 séries de courbes de contact.

Parmi les r^4 systèmes de surfaces de contact, celui qui correspond aux valeurs $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{L}' = 0$ est particulièrement remarquable : les courbes de contact correspondantes ayant pour équation générale

$$\Theta(u, v) = 0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction d'ordre hm, de caractéristique nulle, douée en chaque point u_k, v_k de la singularité $m\sigma_k$, sont les intersections de $\mathfrak{S}$ avec les surfaces adjointes d'ordre $n+m-4$, menées par les courbes unicursales singulières.

Ce résultat concorde d'ailleurs avec une application faite au n° 140.

Le problème des surfaces de contact, dans les conditions qui viennent d'être exposées, n'est possible, *en général*, que si le nombre $\frac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1$, qui est celui des paramètres variables dont dépend l'équation des courbes de contact d'une même famille, est supérieur ou égal à zéro. On doit donc avoir, sauf en certains cas

exceptionnels,

$$\frac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1 \geqq 0 \quad (^1).$$

Cette condition est toujours remplie, n et p étant fixes, dès que m dépasse une certaine limite.

En particulier, en faisant $m=1$, on voit que, si l'inégalité

$$n \geqq p$$

est vérifiée, il existera, *quel que soit* q, q^4 systèmes de surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de leur intersection avec cette surface, un contact d'ordre $q-1$.

143. Terminons par l'exposé de *nouvelles propriétés* des courbes de contact, dans le cas général.

Soient deux courbes de contact, appartenant à deux familles différentes :

$$\Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{2\rho}\right) = 0, \qquad \Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}_1}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'_1}{2\rho}\right) = 0.$$

La fonction

$$\theta(u, v) = \Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{2\rho}\right)\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}_1}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'_1}{2\rho}\right)$$

est une fonction thêta d'ordre 2ρ, c'est-à-dire $2hm$, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(2m\sigma_k)$. Pour que la courbe $\theta(u, v) = 0$ soit sur une surface adjointe d'ordre $n+2m-4$, passant par les courbes unicursales singulières, il faut et il suffit qu'elle soit de la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta, d'ordre $2hm$ et de caractéristique nulle, c'est-à-dire (n° 111) que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{P} + \mathfrak{P}_1}{r} \equiv 0, \qquad \frac{\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'_1}{r} \equiv 0 \qquad \text{(mod périodes).}$$

Si $\dfrac{\mathfrak{P}}{r}$ et $\dfrac{\mathfrak{P}'}{r}$ sont donnés, il est toujours possible, et d'une seule

---

(1) Le système remarquable de surfaces de contact signalé plus haut existe toujours, même si l'inégalité n'est pas vérifiée.

manière, de choisir $\frac{\mathfrak{L}_1}{r}$ et $\frac{\mathfrak{L}'_1}{r}$, de manière à satisfaire à ces congruences. Donc :

Par une courbe de contact quelconque et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n+2m-4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 séries de courbes de contact.

Cette série reste la même quand la courbe primitivement considérée varie sans cesser d'appartenir à une même famille.

On démontre de même la proposition plus générale qui suit :

Par $s-1$ courbes de contact appartenant à des familles quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n+sm-4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 séries de courbes de contact.

Dans cet énoncé, le nombre positif, s, est quelconque, mais supérieur à 1.

On peut ajouter que chacune des r^4 séries de courbes de contact peut être obtenue par ce procédé, les $s-1$ courbes primitives étant convenablement choisies, ou plutôt étant prises arbitrairement dans des familles convenablement choisies.

Enfin il existe des relations géométriques entre les *surfaces de contact* qui répondent à des *problèmes différents;* en voici un exemple, qu'il serait aisé d'étendre.

Considérons deux multiples consécutifs de r,

$$q = rm,$$
$$q_1 = r(m+1);$$

soient c_m et c_{m+1} les courbes de contact avec $\mathfrak{S}$ de deux surfaces adjointes d'ordres respectifs $n+q-4$, $n+q_1-4$, passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de leur intersection, un contact d'ordre $r-1$.

Les équations de ces deux courbes sont de la forme

$$\Theta\left(u - \frac{\mathfrak{L}}{hmr}, v - \frac{\mathfrak{L}'}{hmr}\right) = 0,$$

$$\Theta_1\left[u - \frac{\mathfrak{L}_1}{h(m+1)r}, v - \frac{\mathfrak{L}'_1}{h(m+1)r}\right] = 0,$$

et l'on démontre, comme plus haut, que, si l'on a

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathfrak{P}}{r}+\dfrac{\mathfrak{P}_1}{r}\equiv 0\\[2ex]\dfrac{\mathfrak{P}'}{r}+\dfrac{\mathfrak{P}'_1}{r}\equiv 0\end{array}\right\}\quad (\text{mod périodes}),$$

les deux courbes considérées sont sur une même surface adjointe d'ordre $n+2m-3$, passant par les courbes unicursales singulières.

144. IV. *Sections planes.* — Le nombre des surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à $\mathfrak{S}$ étant égal au genre des sections planes de cette surface diminuée d'une unité, on voit de suite que les courbes d'ordre $n-3$, adjointes à une section plane, ne sont pas toutes situées sur des surfaces adjointes d'ordre $n-3$.

Pour étudier la question de plus près, observons que, parmi les $p-1$ surfaces adjointes d'ordre $n-3$ figurent les surfaces décomposables

$$D(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4)=0,$$

où les λ sont des constantes arbitraires, et où $D=0$ est toujours l'équation de la surface adjointe d'ordre $n-4$.

Soit alors $x_2=0$, par exemple, une section plane de $\mathfrak{S}$: le plan $x_2=0$ coupe le système linéaire, $p-2$ fois infini, des surfaces adjointes d'ordre $n-3$ suivant un système linéaire de courbes d'ordre $n-3$ qui ne sera que $p-3$ fois infini, puisque, parmi les surfaces adjointes, figure la surface $Dx_2=0$.

On obtient ainsi $p-2$ courbes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, adjointes à la section de $\mathfrak{S}$ par le plan considéré; cette section étant de genre p admet encore deux courbes adjointes distinctes des précédentes, et il résulte des raisonnements faits aux n°s 120, 124 que ces deux courbes sont nécessairement celles qui correspondent aux intégrales $\int du$ et $\int dv$.

Au contraire, si q dépasse un, toutes les courbes d'ordre $n+q-4$ adjointes à une section plane de $\mathfrak{S}$ sont les sections, par le plan considéré, des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à $\mathfrak{S}$.

On le démontre aisément comme il suit :

En premier lieu, quel est le nombre des courbes linéairement dis-

tinctes d'ordre $n+q-4$ adjointes à une courbe plane d'ordre n et de genre p? $(q>1)$. Ces courbes découpent sur la proposée des groupes équivalents de N points mobiles, formant un système *non spécial*, puisque q dépasse un; p points d'un de ces groupes sont donc déterminés par les $N-p$ autres, et, par suite, le nombre des courbes adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, est égal à

$$N-p+1.$$

Toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on devra ajouter à ce nombre le nombre $\frac{1}{2}(q-3)(q-2)$ des coefficients d'un polynome entier, d'ordre $q-4$, par rapport à deux variables, afin de tenir compte des courbes adjointes qui se décomposent en la courbe proposée et en une courbe quelconque de degré $q-4$.

Pour calculer N, il suffit de considérer le cas où la courbe adjointe d'ordre $n+q-4$ se décompose en une courbe adjointe d'ordre $n-3$ et en une courbe quelconque d'ordre $q-1$; on a ainsi

$$N=2(p-1)+n(q-1),$$

et le nombre des courbes adjointes linéairement distinctes d'ordre $n+q-4$ est égal à

$$n(q-1)+p-1+\frac{1}{2}(q-2)(q-3).$$

Cette formule est vraie pour toutes les valeurs de q, supérieures à un, même pour $q=2$ et $q=3$, puisque le terme complémentaire $\frac{1}{2}(q-2)(q-3)$ s'annule pour ces deux valeurs.

En second lieu, soit N_q le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$ linéairement distinctes, adjointes à $\mathfrak{S}$; parmi ces surfaces il en est N_{q-1} qui se décomposent en une surface adjointe d'ordre $n+q-5$ et en un plan donné : on en conclut que les sections par un plan des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment un système linéaire, renfermant un nombre de courbes linéairement distinctes égal à

$$N_q-N_{q-1},$$

c'est-à-dire (n° 133)

$$n(q-1)+p-1+\frac{1}{2}(q-2)(q-3),$$

nombre qui est bien égal à celui des courbes d'ordre $n+q-4$, adjointes à la section plane de la surface $\mathfrak{S}$.

Donc :

Les courbes d'ordre $n+q-4$ adjointes à la section plane générale d'une surface hyperelliptique sont les sections, par le plan de la courbe, des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à la surface proposée, dès que q dépasse l'unité.

145. V. Il est difficile d'établir, sur une surface hyperelliptique générale, la classification des courbes algébriques d'un degré donné : le degré d, d'une courbe $\Theta(u, v)=0$, présentant en un point singulier u_k, v_k, la singularité s_k, est en effet, si l'on désigne par m l'ordre de la fonction $\Theta(u, v)$, donné par l'équation

$$d = 2hm - \Sigma \mathrm{I}(\sigma_k, s_k).$$

Ce degré dépend donc des singularités dont la fonction $\Theta(u, v)$ est douée aux points singuliers u_k, v_k.

Il y a lieu d'observer que si $\Theta(u, v)$ s'annule au point u_k, v_k, la courbe $\Theta(u, v)=0$, sur la surface $\mathfrak{S}$, *rencontre* la courbe unicursale singulière qui correspond aux valeurs u_k, v_k des arguments, et réciproquement.

Les courbes qui ne rencontrent aucune des courbes unicursales singulières (¹) sont donc, d'après la formule précédente, d'ordre $2hm$; leur degré est ainsi divisible par $2h$. Parmi ces courbes, celles de degré minimum s'obtiennent en faisant $m=1$; elles sont représentées par l'équation générale

$$\mathfrak{Z}(u-\lambda, v-\mu)=0, \tag{17}$$

où λ et μ sont deux constantes quelconques et $\mathfrak{Z}$ une fonction thêta d'ordre un. On peut supposer que $\mathfrak{Z}(u, v)$ est la fonction normale, d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} 10 \\ 11 \end{vmatrix}$ (n° 59).

Nous appellerons *courbes* γ les courbes représentées par l'équation (17); *ces courbes*, en nombre doublement infini, *sont*, comme on l'a

(¹) Ces courbes peuvent couper les lignes unicursales singulières en des points *fixes*, qui sont les points multiples de première catégorie (n° 128).

dit, *les courbes du plus petit degré qu'on puisse tracer sur la surface hyperelliptique, sans rencontrer les courbes unicursales singulières*; elles sont d'ordre $2h$, ce qui donne la signification géométrique du nombre h, ordre des fonctions thêta qui servent à représenter les coordonnées d'un point de $\mathfrak{S}$.

Les courbes γ sont de genre deux et sont représentables point par point l'une sur l'autre (n° 60).

Sur une courbe de genre deux, on appelle *points conjugués* deux points formant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$; d'après ce que nous avons dit au n° 62, deux points conjugués sur la courbe $\mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu)=0$ ont pour arguments u, v et $2\lambda-u$, $2\mu-v$. En particulier, les points d'une courbe γ, qui coïncident avec leurs conjugués, sont au nombre de six et ont pour arguments $\lambda+\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\mu+\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$, en désignant par $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$ un des six couples de demi-périodes dont le tableau a été donné au n° 59.

Ces six points seront dits les *pôles* de la courbe γ à laquelle ils appartiennent; inversement une courbe γ sera dite *courbe polaire* de chacun de ses six pôles. On vérifie sans difficulté qu'*un point quelconque u_0, v_0 a six courbes polaires,* correspondant aux valeurs de λ et μ égales à $u_0+\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $v_0+\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$.

Il existe entre les courbes γ et les points de $\mathfrak{S}$ une réciprocité remarquable que les théorèmes suivants mettent en évidence ([1]).

146. Considérons les courbes γ qui passent par un point donné u_0, v_0 et cherchons le lieu de leurs pôles.

Si

$$\mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu)=0 \tag{17}$$

est une de ces courbes, on aura

$$\mathfrak{I}(\lambda-u_0, \mu-v_0)=0, \tag{18}$$

puisque $\mathfrak{I}(u, v)$ est une fonction impaire. Si U, V est un pôle de la courbe (17), on a

$$U=\lambda+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_i, \qquad V=\mu+\frac{1}{2}\mathfrak{P}'_i \qquad (i=1, 2, \ldots, 6).$$

([1]) C'est la réciprocité qui existe entre les plans tangents et les points de la surface de Kummer.

Éliminant λ et μ entre ces deux équations et l'équation (18), on trouve le lieu cherché :

$$\mathfrak{S}\left(U - u_0 - \frac{1}{2}\mathfrak{P}_i,\ V - v_0 - \frac{1}{2}\mathfrak{P}'_i\right) = 0.$$

La courbe représentée par cette équation est une courbe γ, qui passe par le point u_0, v_0 et admet ce point pour pôle. Donc :

Les six pôles d'une courbe γ qui passe par un point sont chacun sur une des six courbes polaires de ce point.

De même, on démontre sans difficulté que :

Les six courbes polaires d'un point d'une courbe γ passent chacune par un des pôles de cette courbe.

Ces théorèmes justifient les dénominations de pôles et de courbes polaires, et établissent la réciprocité dont nous parlions plus haut.

147. *Par deux points donnés de* **S** *passent deux courbes* γ, et inversement *deux courbes* γ *se coupent en deux points.* Ces propositions résultent immédiatement du théorème de M. Poincaré.

Cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire deux points u_1, v_1 et u_2, v_2 pour que les deux courbes γ qui passent par ces points coïncident.

Si $\mathfrak{S}(u - \lambda, v - \mu)$ est l'équation d'une courbe γ passant par les deux points, on a

$$\mathfrak{S}(\lambda - u_1, \mu - v_1) = 0, \qquad \mathfrak{S}(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0.$$

Ces deux équations en λ, μ ont deux solutions communes, λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2, liées (n° 65) par les relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 \equiv u_1 + u_2, \qquad \mu_1 + \mu_2 \equiv v_1 + v_2 \qquad (\text{mod périodes}).$$

Si

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_1 = \mu_2,$$

il vient

$$2\lambda_1 \equiv u_1 + u_2, \qquad 2\mu_1 \equiv v_1 + v_2 \qquad (\text{mod périodes}).$$

Écrivant maintenant que λ_1 et μ_1 vérifient la relation

$$\mathfrak{S}(\lambda_1 - u_1, \mu_1 - v_1) = 0,$$

on trouve la condition cherchée

(19) $$\mathfrak{I}\left(\frac{u_1 - u_2}{2}, \frac{v_1 - v_2}{2}\right) = 0.$$

On peut donner une interprétation géométrique de cette formule. Considérons en effet les courbes γ qui passent par un point u_2, v_2, et cherchons le lieu du point conjugué de u_2, v_2 sur chacune d'elles.

Soit $\mathfrak{I}(u - \lambda, v - \mu) = 0$ une des courbes γ passant par u_2, v_2; on a

$$\mathfrak{I}(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0.$$

Le conjugué de u_2, v_2 sur cette courbe a pour arguments

$$u = 2\lambda - u_2, \qquad v = 2\mu - v_2;$$

il décrit donc la courbe

(20) $$\mathfrak{I}\left(\frac{u - u_2}{2}, \frac{v - v_2}{2}\right) = 0.$$

Si l'on compare maintenant les équations (19) et (20), on obtient cette proposition :

Lorsque deux points sont conjugués sur une même courbe γ, la seconde courbe γ qui passe par ces deux points coïncide avec la première, et réciproquement.

148. Une autre propriété de la courbe (20) résulte des considérations suivantes.

Cherchons *l'enveloppe des courbes γ qui passent par un point fixe u_2, v_2.*

Deux de ces courbes

$$\mathfrak{I}(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \mathfrak{I}(u - \lambda', v - \mu') = 0$$

se coupent en u_2, v_2 et en un second point, u, v, tel que l'on ait

$$u + u_2 \equiv \lambda + \lambda', \qquad v + v_2 \equiv \mu + \mu' \qquad \text{(mod périodes).}$$

Si les deux courbes primitives sont infiniment voisines, on aura, à la limite,

$$u \equiv 2\lambda - u_2, \qquad v \equiv 2\mu - v_2;$$

on obtiendra le lieu de u, v, c'est-à-dire l'enveloppe cherchée, en éli-

minant λ, μ entre les deux équations qui précèdent et la relation

$$\mathfrak{S}(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0,$$

qui exprime que la courbe γ considérée passe par u_2, v_2; il vient ainsi

$$(20) \qquad \mathfrak{S}\left(\frac{u - u_2}{2}, \frac{v - v_2}{2}\right) = 0.$$

Donc : *L'enveloppe des courbes γ qui passent par un point coïncide avec le lieu des conjugués de ce point.*

Dans cet énoncé, nous appelons *points conjugués* deux points conjugués l'un de l'autre sur une même courbe γ.

149. Cherchons la condition qui exprime que deux courbes γ

$$\mathfrak{S}(u - \lambda_1, v - \mu_1) = 0, \qquad \mathfrak{S}(u - \lambda_2, v - \mu_2) = 0$$

sont *tangentes :* on trouve aisément, par des considérations semblables aux précédentes, que cette condition est la suivante :

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \frac{\mu_2 - \mu_2}{2}\right) = 0.$$

Par suite :

Lorsque deux points sont conjugués sur une courbe γ, chacune des six courbes polaires de l'un touche une des six courbes de l'autre ; réciproquement, lorsque deux courbes γ se touchent, chacun des six pôles de l'une est conjugué d'un des six pôles de l'autre.

On en déduit immédiatement cet autre théorème :

Le lieu des pôles des courbes γ qui touchent une courbe γ fixe se décompose en six courbes, dont chacune est lieu des conjugués d'un pôle de la courbe fixe.

150. Les courbes γ forment une famille doublement infinie : dans cette famille considérons une série simplement infinie et *algébrique* de courbes γ; λ et μ seront alors liés par une relation de la forme

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

$\Theta(\lambda, \mu)$ désignant une fonction uniforme quadruplement périodique de λ, μ, ou, si l'on veut, une fonction thêta de λ, μ.

Le lieu des pôles des courbes γ considérées est donné par l'équation

$$\Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}_i}{2}, v - \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}\right) = 0;$$

il se décompose donc en six courbes, généralement distinctes, de même genre et de mêmes modules.

Plus généralement, sur chacune des courbes

$$\mathfrak{S}(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

où λ, μ vérifient la relation $\Theta(\lambda, \mu) = 0$, prenons le point qui correspond à un point fixe u_0, v_0 de la courbe $\mathfrak{S}(u, v) = 0$ dans la transformation univoque qui lie ces deux courbes; ce point sera (n° 60)

$$u = \lambda + u_0, \qquad v = \mu + v_0.$$

Il décrit par suite la courbe

$$\Theta(u - u_0, v - v_0) = 0.$$

Ainsi :

Soit une série algébrique, quelconque d'ailleurs de courbes γ : le lieu du point qui, sur chacune de ces courbes, correspond univoquement à un même point M *de l'une d'elles, est une courbe algébrique; si le point* M *varie, on obtient ainsi une infinité simple de courbes algébriques, qui sont toutes de même genre et de mêmes modules : l'équation générale de ces courbes est de la forme*

$$\Theta(u - \alpha, v - \beta) = 0,$$

$\Theta(u, v)$ *étant une fonction thêta, et* α, β *deux paramètres, variables d'une courbe à l'autre, liés par la relation*

$$\mathfrak{S}(\alpha, \beta) = 0.$$

Inversement, il est clair que, sur chacune des nouvelles courbes, le point qui correspond univoquement à un même point de l'une d'elles décrit une des courbes γ de la série considérée : la démonstration est identique à celle qui précède.

Ces résultats se généralisent sans difficulté.

Soit une série quelconque simplement infinie de courbes de même genre et de mêmes modules, tracées sur une surface hyperelliptique et comprises dans l'équation

$$(21) \qquad \theta(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

où $\theta(u, v)$ est une fonction thêta donnée et où λ, μ désignent deux paramètres liés par une relation de la forme

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

$\Theta(\lambda, \mu)$ étant une nouvelle fonction thêta.

Considérons la seconde série de courbes

$$\Theta(u - \alpha, v - \beta) = 0,$$

où α et β sont deux paramètres liés par la relation

$$\theta(\alpha, \beta) = 0.$$

Les courbes de cette nouvelle série sont aussi de même genre et de mêmes modules, et les deux séries jouissent de la propriété suivante :

Le lieu du point qui, sur chacune des courbes d'une série, correspond univoquement à un même point de l'une de ces courbes, est une courbe de l'autre série.

Si les deux fonctions $\theta(u, v)$ et $\Theta(u, v)$ sont les mêmes, les courbes des deux séries se confondent; il en est de même si $\theta(u, v)$ est une fonction paire ou impaire et si $\Theta(u, v) = \theta(u - u_0, v - v_0)$; u_0, v_0 étant des constantes données. Dans ce dernier cas, les courbes de la première série passent par le point fixe u_0, v_0. En particulier :

Considérons les courbes γ qui passent par un point fixe : le lieu du point qui sur chacune d'elles correspond univoquement à un même point d'une courbe γ donnée est une courbe γ passant par le point fixe.

Le théorème du n° 146 est un cas particulier du précédent.

151. VI. Revenons maintenant aux surfaces adjointes : la formule qui fait connaître le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$, linéairement distinctes, donne lieu à une remarque intéressante.

On sait que deux définitions ont été proposées pour le genre d'une surface d'ordre n.

Le *genre géométrique*, P, est le nombre des surfaces d'ordre $n - 4$, linéairement distinctes, adjointes à la proposée;

Le *genre numérique*, P′, s'obtient en faisant $N = n - 4$ dans la formule qui donne le nombre des surfaces distinctes d'ordre N satisfaisant

aux conditions des surfaces adjointes, c'est-à-dire ayant pour courbe multiple d'ordre $l-1$ toute courbe multiple d'ordre l et pour point multiple d'ordre $l-2$ tout point multiple d'ordre l de la proposée.

Ces deux définitions, en apparence identiques, ne le sont pas réellement; en effet, on ne sait pas déterminer à l'aide d'une formule générale le nombre des conditions auxquelles équivaut, pour une surface d'ordre N, l'obligation d'avoir pour courbe multiple d'ordre $l-1$ une courbe donnée, que si N est suffisamment grand par rapport au degré de la courbe. Pour ce cas, il existe une formule générale exacte, mais on ne sait pas pour quelle valeur minimum de N elle cesse de s'appliquer. En d'autres termes, les courbes et les points multiples d'une surface d'ordre n étant donnés, on sait calculer le nombre des surfaces adjointes d'ordre N, N étant suffisamment grand : si dans la formule ainsi obtenue on fait $N = n-4$, rien ne prouve qu'on doive obtenir réellement le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-4$; on trouve un nombre P′, qui peut différer de P, mais qui est également intéressant, parce qu'il possède le caractère d'invariance dans les transformations birationnelles, comme l'ont montré MM. Cayley et Zeuthen.

Pour les surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique, on a (n° 102)

$$P = 1;$$

quant à P′, on le calculera, d'après ce qui précède, en faisant $q = 0$ dans la formule qui donne le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, et l'on trouve ainsi

$$P' = -1.$$

Les deux nombres P et P′ sont donc différents. Il convient de supposer, dans cette application, que la surface 𝕾 n'a pas de points multiples isolés; en ce cas, notre définition des surfaces adjointes coïncide avec celle qui est généralement adoptée.

CHAPITRE IV.

CLASSES PARTICULIÈRES DE SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

152. Les plus simples des surfaces hyperelliptiques sont *celles qui n'ont pas de courbes unicursales singulières*.

Pour une de ces surfaces, les fonctions $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$ sont quatre fonctions thêta, de caractéristique nulle, d'ordre h, ne s'annulant simultanément pour aucun système de valeurs des paramètres.

Les formules du n° 123 donnent alors, pour l'ordre n de la surface et le genre p de ses sections planes,

$$n = 2h^2, \qquad p = h^2 + 1 \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{n+2}{2}.$$

Ainsi :

Si une surface hyperelliptique n'a pas de courbes unicursales singulières, son ordre est le double d'un carré.

153. *Surfaces adjointes.* — Le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n + q - 4$, a pour expression (n° 133)

$$q^2h^2 + \frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3);$$

ces surfaces découpent, sur la proposée, un système linéaire $q^2h^2 - 1$ fois infini de courbes ayant pour équation générale (n° 131)

$$\lambda_1 \theta_1(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{q^2h^2} \theta_{q^2h^2}(u, v) = 0,$$

où $\theta_1(u, v), \ldots, \theta_{q^2h^2}(u, v)$ désignent q^2h^2 fonctions thêta, d'ordre qh et de caractéristique nulle, linéairement distinctes; en d'autres termes, *toute* fonction thêta, d'ordre qh et de caractéristique nulle, égalée à zéro, représente sur $\mathfrak{S}$ une courbe qui est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$ (¹).

Le degré de cette courbe est égal à $2qh^2$ ou qn (n° 137).

Le problème des *surfaces adjointes de contact* est susceptible d'une solution plus complète que dans le cas général.

Cherchons les surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$ qui ont avec $\mathfrak{S}$, tout le long de la courbe commune, un contact d'ordre $r - 1$: on voit, comme au n° 141, que le problème n'est possible que si l'on a

$$hq = r\rho,$$

(¹) Pour abréger, nous dirons qu'une courbe est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe quand elle constitue, jointe aux courbes multiples, l'intersection complète des deux surfaces.

ρ étant un entier; mais il n'est pas nécessaire de supposer ici que r divise q, et le problème comporte ainsi une solution plus étendue que celui des surfaces adjointes de contact passant par les courbes unicursales singulières d'une surface hyperelliptique générale.

Soit $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ l'équation d'une des courbes de contact cherchées; $\Theta(u, v)$ sera une fonction thêta *quelconque*, d'ordre ρ et de caractéristique nulle; λ, μ seront deux constantes vérifiant les congruences,

$$\left.\begin{array}{l} r\rho\lambda \equiv 0 \\ r\rho\mu \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\text{mod périodes}).$$

On le démontre par la méthode appliquée au n° 141.

On en conclut, toujours comme au n° 141, que les courbes de contact sont *toutes* celles qui appartiennent à r^4 familles, et l'on peut énoncer le théorème général suivant :

Soit $\mathfrak{S}$ *une surface hyperelliptique sans courbes unicursales singulières, d'ordre* $n(=2h^2)$; *désignons par* q, r, ρ *des entiers positifs tels que*

$$qh=r\rho.$$

Les surfaces d'ordre $n+q-4$ *adjointes à* $\mathfrak{S}$, *et ayant avec cette surface, tout le long de leur courbe d'intersection (non multiple), un contact d'ordre* $r-1$, *se répartissent en* r^4 *systèmes.*

Pour les surfaces d'un système, les courbes de contact sont des courbes d'un même ordre et d'une même famille, et forment une série linéaire ρ^2-1 *fois infinie. Inversement toute courbe de l'ordre et de la famille considérée est la courbe de contact d'une des surfaces du système.*

Les r *courbes de contact de* r *surfaces d'un même système sont sur une surface adjointe d'ordre* $n+q-4$.

Par $r-1$ *courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques on peut mener une surface adjointe d'ordre* $n+q-4$, *qui coupe en outre* $\mathfrak{S}$ *suivant une* $r^{\text{ième}}$ *courbe de contact.*

Cette théorie est au fond la même que celle qui a été exposée au n° 117 pour les courbes du champ hyperelliptique sans point singulier. En particulier, si l'on fait $q=1$, $r=h$, on voit que :

Il existe h^4 *surfaces d'ordre* $n-3$ *adjointes à* $\mathfrak{S}$ *et ayant avec cette surface, le long de leur intersection, un contact d'ordre* $h-1$.

Les h^4 courbes de contact sont des courbes γ; par $r-1$ d'entre elles passe une surface adjointe d'ordre $n-3$, coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant une $r^{ième}$ de ces courbes.

On a des théorèmes tout à fait analogues pour les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ passant par une ou plusieurs courbes données sur $\mathfrak{S}$ et ayant en outre avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de l'intersection, un contact d'ordre $r-1$; ces surfaces se répartissent encore en r^4 systèmes; les courbes de contact de r surfaces d'un même système et les courbes fixes données sur $\mathfrak{S}$ sont sur une même surface adjointe d'ordre $n+q-4$, ...

Ces propriétés, qui offrent une analogie complète avec celles que l'on a établies pour les courbes de contact adjointes à une courbe plane, ne s'étendent pas, du moins, sous cette forme générale, aux surfaces hyperelliptiques douées de courbes unicursales singulières.

154. *Courbes tracées sur la surface.* — L'équation d'une courbe algébrique quelconque tracée sur $\mathfrak{S}$ s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta : si q est l'ordre de celle-ci, le degré de la courbe correspondante sera $2hq$: ainsi, les degrés des courbes tracées sur $\mathfrak{S}$ sont des multiples de $2h$.

Si q est inférieur à h, on peut, à une fonction thêta d'ordre q, associer au moins une fonction d'ordre $h-q$, de telle sorte que le produit des deux fonctions soit une fonction thêta d'ordre h et de caractéristique nulle (n° 116); donc :

Par une courbe quelconque, tracée sur $\mathfrak{S}$, et dont l'ordre est inférieur à l'ordre n de la surface, on peut faire passer au moins une surface adjointe d'ordre $n-3$.

De plus :

Si $2qh$ est l'ordre de la courbe considérée, le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, passant par la courbe, est égal à $(h-q)^2$.

De même on démontrerait que :

Par une courbe d'ordre $2qh$, tracée sur $\mathfrak{S}$, et dont l'ordre est compris

entre n et $2n-1$ (c'est-à-dire telle que $2h > q \geqq h$) on peut faire passer $(2h-q)^2$ surfaces adjointes d'ordre $n-2$, linéairement distinctes, etc.

Rien n'est plus aisé que de déterminer toutes les courbes d'un degré donné $2hq$, que l'on peut tracer sur $\mathfrak{S}$: leur équation générale est de la forme

$$\lambda_1 \theta_1(u-\lambda, v-\mu) + \lambda_2 \theta_2(u-\lambda, v-\mu) + \ldots + \lambda_{q^2} \theta_{q^2}(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q^2}, \lambda, \mu$ sont des constantes arbitraires, et où $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$, ..., désignent q^2 fonctions thêta linéairement distinctes, d'ordre q et de caractéristique nulle.

Les courbes du plus petit degré, que l'on puisse tracer sur la surface, ont l'ordre $2h$, et sont les courbes γ (¹).

155. *Remarque.* — Les courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment un système linéaire q^2h^2-1 fois infini; le genre de ces courbes est q^2h^2+1 (nº 114); deux d'entre elles se coupent en $2q^2h^2$ points, d'après le théorème de M. Poincaré : la connaissance de ces nombres nous permet de discuter une formule, due à M. Nöther, et qui est une extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch relatif aux courbes algébriques.

D'après M. Nöther, si l'on appelle :

C, des courbes du genre π, situées sur une surface algébrique $\mathfrak{S}$, et formant un système linéaire Q fois infini;
s, le nombre de points d'intersection de deux courbes C;
P, le genre de la surface $\mathfrak{S}$, supposée de degré n;
ρ, le nombre des surfaces d'ordre $n-4$ linéairement distinctes adjointes à $\mathfrak{S}$, et passant par une courbe C,

(¹) Il est à observer que les courbes γ, bien qu'étant toutes du même ordre et du même genre et formant un système continu, n'appartiennent pas à une série *linéaire* de courbes de même ordre qu'elles, c'est-à-dire de courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par un système linéaire de surfaces, chaque surface mobile ne découpant qu'une courbe. Ce fait ne s'est pas présenté sur la surface de Kummer, où toutes les courbes d'un degré donné se répartissaient en une ou plusieurs séries linéaires; la raison générale de cette différence tient à l'existence sur $\mathfrak{S}$ des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, comme nous l'avons montré dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 août 1893).

on a l'inégalité

$$Q \geqq P + s - \pi - \rho + 1.$$

Si nous appliquons la formule à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$, et au système des courbes C découpées sur elle par les surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$, nous trouvons, puisque $\rho = 0$,

$$q^2 h^2 - 1 \geqq P + 2 q^2 h^2 - (q^2 h^2 + 1) + 1 \qquad \text{ou} \qquad -1 \geqq P.$$

Or, le genre géométrique, P est égal à 1; la formule n'est donc pas vérifiée pour cette valeur de P. Elle l'est au contraire si l'on introduit, au lieu du genre géométrique, le genre numérique P', égal ici à -1. Il y a donc lieu de penser que la formule générale de M. Nöther doit être précisée, soit dans le sens que nous indiquons, soit en tenant compte des intégrales de différentielles totales de première espèce appartenant à la surface.

156. *Les surfaces hyperelliptiques qui n'ont pour courbes unicursales singulières que des droites*, c'est-à-dire pour lesquelles les quatre courbes coordonnées $x_j(u, v)$ considérées dans le champ hyperelliptique n'ont en commun que des points simples, jouissent d'une propriété spéciale.

Dans ce cas, en effet, la singularité σ_k, que présentent les courbes $x_j(u, v) = 0$ en un de leurs points simples communs, n'est pas une singularité proprement dite, et les courbes adjointes ne sont pas assujetties à passer par ce point. En d'autres termes, la singularité σ'_k n'existe pas.

Il en résulte (n° 130) que les surfaces adjointes d'ordre $n - 3$ découperont sur $\mathfrak{S}$ la série linéaire de courbes dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta quelconque d'ordre h et de caractéristique nulle, renfermant, par suite, sous forme linéaire et homogène, h^2 coefficients arbitraires.

Les propriétés des surfaces de contact adjointes d'ordre $n - 3$ seront ainsi les mêmes, pour la surface $\mathfrak{S}$ considérée, que pour les surfaces sans courbes unicursales singulières, en particulier il existe h^4 surfaces adjointes d'ordre $n - 3$ ayant avec $\mathfrak{S}$, le long de leur intersection, un contact d'ordre $h - 1$, etc.

Le nombre h est lié ici au genre p des sections planes de $\mathfrak{S}$ par la relation

$$p = h^2 + 1.$$

CHAPITRE V.

ÉTUDE DE QUELQUES SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

157. Nous étudierons, dans ce Chapitre, quelques surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique : nous n'avons pas réussi à déterminer d'une manière générale le degré minimum des surfaces de cette nature; il résulte des recherches de M. Picard que ce degré est supérieur à cinq ; nous avons, d'autre part, formé des surfaces hyperelliptiques d'ordre huit. Il ne resterait donc, pour combler la lacune, qu'à former des surfaces d'ordre six et sept, ou à démontrer, ce qui semble probable, que le degré doit nécessairement dépasser sept.

Quoi qu'il en soit, nous allons faire connaître et étudier quelques surfaces d'ordre huit.

158. Soient $\mathfrak{S}_0(u, v)$, $\mathfrak{S}_1(u, v)$, $\mathfrak{S}_2(u, v)$, $\mathfrak{S}_3(u, v)$ quatre fonctions thêta *normales*, du premier ordre, formant un groupe de Rosenhain (n° 20) : pour fixer les idées, nous supposerons qu'elles ont respectivement pour symboles (n° 20) $44'$, $12'$, $13'$, $41'$.

La fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ est ainsi la fonction thêta (paire) d'ordre un, de caractéristique nulle, et les trois fonctions $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ s'annulent pour la demi-période $u = 0$, $v = 0$.

De plus, le produit $\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$ étant une fonction impaire, de caractéristique nulle (n° 21), il en sera de même du produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$.

Cela posé, considérons la surface définie par les relations

$$(1) \qquad x_1 = \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1^2, \qquad x_2 = \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_2^2, \qquad x_3 = \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_3^2, \qquad x_4 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(2) \qquad x = \frac{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3}, \qquad y = \frac{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_3}, \qquad z = \frac{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2}.$$

Les quatre fonctions coordonnées, $x_j(u, v)$, sont des fonctions thêta, d'ordre trois et de caractéristique nulle, s'annulant à la fois pour les valeurs de u, v qui vérifient les équations

$$\mathfrak{S}_0(u, v) = 0, \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 = 0$$

et qui sont au nombre de *six*, d'après le théorème de M. Poincaré. De plus, les fonctions $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ devenant nulles pour $u = 0$, $v = 0$, le

point $u=0$, $v=0$ est un point double pour les courbes du champ hyperelliptique $x_1(u, v)=0$, $x_2(u, v)=0$, $x_3(u, v)=0$ et un point triple pour la courbe $x_4(u, v)=0$; par suite, c'est un point double pour toute courbe $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4=0$ et il diminue le degré de la surface (1) de quatre unités (n° 123).

En résumé, les zéros communs aux fonctions $x_j(u, v)$ diminuent le degré de $6+4=10$ unités; ce degré est donc égal à $2.3^2-10=8$. Ainsi :

La surface définie par les relations (1) *est d'ordre huit.*

Nous la désignerons par Σ.

Il est aisé d'obtenir son équation.

Les relations (1) donnent en effet sans difficulté.

$$\vartheta_0^2=\frac{1}{\vartheta_0}\,\frac{x_1 x_2 x_3}{x_4^2},\tag{3}$$
$$\vartheta_1^2=\frac{1}{\vartheta_0}\,x_1,\qquad \vartheta_2^2=\frac{1}{\vartheta_0}\,x_2,\qquad \vartheta_3^2=\frac{1}{\vartheta_0}\,x_3;$$

les fonctions ϑ_0^2, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 sont donc respectivement proportionnelles à $x_1 x_2 x_3$; $x_1 x_4^2$; $x_2 x_4^2$; $x_3 x_4^2$, et l'équation de la surface Σ s'obtiendra en remplaçant ϑ_0^2, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 par leurs valeurs proportionnelles dans l'équation homogène classique qui lie les carrés de quatre fonctions thêta d'un même groupe de Rosenhain.

Cette dernière relation est la suivante :

$$\begin{aligned}
(4)\quad & a_1^2(\vartheta_0^4\vartheta_1^4+\vartheta_2^4\vartheta_3^4)+a_2^2(\vartheta_0^4\vartheta_2^4+\vartheta_1^4\vartheta_3^4)+a_3^2(\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_1^4\vartheta_2^4)\\
&-2a_2a_3\vartheta_2^2\vartheta_3^2(\vartheta_0^4-\vartheta_1^4)-2a_1a_3\vartheta_1^2\vartheta_3^2(\vartheta_0^4+\vartheta_2^4)\\
&-2a_1a_2\vartheta_1^2\vartheta_2^2(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)-2a_2a_3\vartheta_0^2\vartheta_1^2(\vartheta_2^4-\vartheta_3^4)\\
&+2a_1a_3\vartheta_0^2\vartheta_2^2(\vartheta_1^4+\vartheta_3^4)-2a_1a_2\vartheta_0^2\vartheta_3^2(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)+2\lambda\vartheta_0^2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2=0.
\end{aligned}$$

Les coefficients a_1, a_2, a_3, λ dépendent des périodes des fonctions hyperelliptiques considérées; nous renverrons, pour leur expression, au Mémoire de Rosenhain.

On a, d'après cela, pour l'équation de Σ

$$\begin{aligned}
(5)\quad & a_1^2x_2^2x_3^2(x_1^4+x_4^4)+a_2^2x_1^2x_3^2(x_2^4+x_4^4)+a_3^2x_1^2x_2^2(x_3^4+x_4^4)\\
&-2a_2a_3x_1^2x_2x_3(x_2^2x_3^2-x_4^4)-2a_1a_3x_2^2x_1x_3(x_1^2x_3^2+x_4^4)\\
&-2a_1a_2x_3^2x_1x_2(x_1^2x_2^2+x_4^4)-2a_2a_3x_1^2x_2x_3x_4^2(x_2^2-x_3^2)\\
&+2a_1a_3x_2^2x_1x_3x_4^2(x_1^2+x_3^2)-2a_1a_2x_3^2x_1x_2x_4^2(x_1^2+x_2^2)\\
&\qquad\qquad+2\lambda x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2=0.
\end{aligned}$$

Remplaçant $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ par x, y, z, on obtiendrait l'équation cartésienne de Σ, à laquelle nous donnerons plus loin une forme simple [1].

159. On voit que Σ est bien du huitième ordre; cette surface, en coordonnées cartésiennes, admet pour centre l'origine $x=0$, $y=0$, $z=0$, ainsi qu'on pouvait s'en rendre compte *a priori* : en effet, si l'on change u et v en $-u$, $-v$, les fonctions x_1, x_2, x_3 restent inaltérées et x_4 change de signe, puisque $\Im_0$, $\Im_1^2$, $\Im_2^2$, $\Im_3^2$ sont des fonctions paires et que $\Im_1 \Im_2 \Im_3$ est une fonction impaire.

La surface Σ est liée d'une manière simple à la surface de Kummer. Posons en effet

$$(6) \qquad X = \frac{\Im_1^2}{\Im_0^2}(u, v), \qquad Y = \frac{\Im_2^2}{\Im_0^2}(u, v), \qquad Z = \frac{\Im_3^2}{\Im_0^2}(u, v).$$

Le point X, Y, Z décrit une surface de Kummer, puisque $\Im_0^2$, $\Im_1^2$, $\Im_2^2$, $\Im_3^2$ sont des fonctions thêta d'ordre deux et de caractéristique nulle, linéairement distinctes (n° 12); cette surface admet pour plans singuliers les plans de coordonnées et le plan de l'infini, qui forment un tétraèdre de Rosenhain.

Entre les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface de Kummer et les coordonnées x, y, z d'un point de Σ correspondant aux mêmes valeurs de u, v, on trouve aisément, en éliminant les $\Im$, entre les relations (2) et (6), les équations

$$(7) \qquad X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{xz}, \qquad Z = \frac{1}{xy};$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad x = \frac{X}{\sqrt{XYZ}}, \qquad y = \frac{Y}{\sqrt{XYZ}}, \qquad z = \frac{Z}{\sqrt{XYZ}}.$$

Ainsi à un point de la surface de Kummer correspondent deux points de Σ symétriques par rapport à l'origine et à un point de Σ correspond un seul point de la surface de Kummer.

Soient $K(X, Y, Z) = 0$ l'équation de cette dernière surface et

---

[1] L'équation (5) représente, quelles que soient les constantes a_1, a_2, a_3, λ, une surface Σ, parce que l'équation (4), où les $\Im$ sont considérées comme des coordonnées homogènes, représente toujours une surface de Kummer (*voir* le n° 159).

$\Sigma(x, y, z) = 0$ celle de Σ; on a, d'après (4) et (6),

$$K(X, Y, Z) = C_2(X, Y, Z) + 2B_3(X, Y, Z) + A_2^2(X, Y, Z),$$

C_2, B_3, A_2 étant des polynomes homogènes en X, Y, Z d'ordre marqué par l'indice

$$\begin{aligned} C_2 &= a_1^2X^2 + a_2^2Y^2 + a_3^2Z^2 - 2a_1a_2XY - 2a_1a_3XZ - 2a_2a_3YZ,\\ B_3 &= -a_2a_3X(Y^2 - Z^2) + a_1a_3Y(X^2 + Z^2) - a_1a_2Z(X^2 + Y^2) + \lambda XYZ,\\ A_2 &= a_1YZ - a_2ZX - a_3XY. \end{aligned}$$

On en déduit pour le polynome $\Sigma(x, y, z)$ la forme simple

$$(9)\quad \Sigma(x, y, z) = x^2y^2z^2\,C_2(x, y, z) + 2xyz\,B_3(x, y, z) + A_2^2(x, y, z);$$

on a de plus identiquement

$$(10)\quad K(x, y, z) = \frac{1}{x^4y^4z^4}\,\Sigma(x, y, z).$$

160. Cela posé, les formes (5), (9) et (10) que nous avons données à l'équation de la surface Σ mettent en évidence les propriétés suivantes.

En coordonnées homogènes, les six arêtes du tétraèdre de référence sont des droites doubles de Σ. Les trois arêtes qui partent du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, c'est-à-dire les trois axes des coordonnées cartésiennes, sont en même temps des courbes unicursales singulières : en effet, les courbes unicursales singulières de Σ, abstraction faite de celle qu'on obtient en faisant $u = 0$, $v = 0$, correspondent aux valeurs de u, v qui annulent simultanément ϑ_0 et $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$. Or les quatre fonctions ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 forment un groupe de Rosenhain et par suite des deux systèmes de valeurs (demi-périodes) de u, v qui annulent à la fois ϑ_0 et ϑ_1; l'un annule ϑ_2 et l'autre annule ϑ_3. Même remarque pour les systèmes qui annulent à la fois ϑ_0 et ϑ_2, ou ϑ_0 et ϑ_3.

Il en résulte, si l'on se reporte aux relations (1), que les courbes unicursales singulières considérées se réduisent aux trois droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_1 = 0$, $x_3 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; chacune d'elles étant obtenue *deux* fois.

La courbe unicursale singulière qui correspond aux valeurs $u = 0$, $v = 0$ est une conique, qui est située dans le plan $x_4 = 0$; en effet, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$, et ϑ_0 ne s'annule pas; si donc

on donne à u et v des valeurs très petites, $x_4(u, v)$ est infiniment petit par rapport aux trois autres fonctions x_1, x_2, x_3.

L'équation de cette conique s'obtient en faisant $x_4 = 0$ dans (5) et en divisant par x_1^2, x_2^2, x_3^2; on obtient ainsi

$$C_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

C'est une conique qui touche les trois arêtes du tétraèdre de référence situées dans le plan $x_4 = 0$.

En coordonnées cartésiennes (9), on voit que l'origine est un point quadruple de Σ; le cône des tangentes en ce point est le cône du second ordre

$$A_2(x, y, z) = 0$$

compté deux fois; ce cône passe par les trois axes de coordonnées. Il est à observer que l'origine (ou le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) est un point multiple de *première catégorie* (n° 128); si en effet, dans les relations (1), on donne à u, v des valeurs annulant $\Im_0(u, v)$, on trouve $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

161. La surface d'ordre quatre adjointe à Σ se trouve aisément; on pourrait la chercher directement par l'étude des lignes doubles, mais la marche suivante est plus simple.

La surface de Kummer, $K(X, Y, Z) = 0$, admet, comme nous le savons, une intégrale double de fonction rationnelle ne devenant jamais infinie; la fonction K étant d'ordre quatre, cette intégrale a pour expression

$$\int\int \frac{dX\, dY}{K'_Z}.$$

Sous le signe $\int\int$ remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs (7) en fonction rationnelle de x, y, z, c'est-à-dire par $\frac{1}{yz}$, $\frac{1}{xz}$, $\frac{1}{xy}$; l'intégrale nouvelle restera finie pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z qui correspondent à un point de la surface Σ, et par suite elle sera de la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)\, dx\, dy}{\Sigma'_z},$$

D étant le polynome d'ordre quatre adjoint à Σ.

Or les relations

$$X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{zx}$$

donnent

$$(11) \qquad dX\,dY = -\frac{dx\,dy}{x^2y^2z^3}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, déduites de la relation

$$\Sigma(x, y, z) = 0.$$

La relation identique (10),

$$K(X, Y, Z) = \frac{1}{x^4y^4z^4}\Sigma(x, y, z)$$

donne, en chaque point de la surface $\Sigma = 0$,

$$K'_Z = \frac{1}{x^4y^4z^4}\left(\Sigma'_x\frac{\partial x}{\partial Z} + \Sigma'_y\frac{\partial y}{\partial Z} + \Sigma'_z\frac{\partial z}{\partial Z}\right),$$

$\frac{\partial x}{\partial Z}, \frac{\partial y}{\partial Z}, \frac{\partial z}{\partial Z}$ étant les dérivées partielles, par rapport à Z, de x, y, z considérés comme fonctions des trois variables X, Y, Z. Or on tire de (8)

$$-2\frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{X}{Z\sqrt{XYZ}}, \qquad -2\frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{Y}{Z\sqrt{XYZ}}, \qquad 2\frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{XYZ}}$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs en x, y, z, il vient

$$(12) \qquad 2K'_Z = \frac{1}{x^3y^3z^4}(-x\Sigma'_x - y\Sigma'_y + z\Sigma'_z).$$

D'ailleurs, on a

$$-x\Sigma'_x - y\Sigma'_y + z\Sigma'_z = \Sigma'_z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

et, par suite, d'après (11) et (12),

$$\iint\frac{dX\,dY}{K'_Z} = -2\iint\frac{xyz}{\Sigma'_z}\,dx\,dy.$$

Cette formule montre que la surface adjointe $D = 0$ a pour équation $xyz = 0$, c'est-à-dire en revenant aux coordonnées homogènes, $x_1x_2x_3x_4 = 0$, puisque cette surface est d'ordre quatre.

La surface adjointe du quatrième degré se décompose donc en quatre

plans, qui sont les faces du tétraèdre de référence : il en résulte que la surface Σ n'a pas d'autres lignes multiples que les arêtes de ce tétraèdre, qui sont des lignes doubles; on le voit de suite en faisant successivement $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, dans l'équation (5).

Il y a lieu d'observer toutefois que les six arêtes ne jouent pas le même rôle géométrique. Si l'on considère en effet la section de la surface Σ par un plan quelconque P, cette section a six points doubles en chacun des six points où P coupe les arêtes; mais on démontrerait sans difficulté que chacun des trois points doubles situés dans le plan $x_4 = 0$ diminue le genre de la section de trois unités, tandis que les trois autres points doubles, situés sur les arêtes qui partent du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, sont des points de rebroussement ordinaires. Les trois premiers points doubles sont donc d'une nature toute particulière; les deux branches de la courbe passant par chacun d'eux y ont un contact d'ordre élevé.

La section plane de Σ est ainsi de genre

$$\frac{1}{2}.7.6 - 3.3 - 3 = 9,$$

comme on le savait *a priori*, car les quatre courbes $x_j(u, v) = 0$, considérées dans le champ hyperelliptique, ont six points simples et un point double ($u = v = 0$) communs; dès lors la formule

$$p = h^2 + 1 - \frac{1}{2}\Sigma\, \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$$

donne ici

$$p = 3^2 + 1 - 1 = 9.$$

162. L'étude des courbes algébriques tracées sur la surface Σ nous entraînerait trop loin; nous nous bornerons à parler de celles qui sont du plus petit degré.

En dehors des courbes multiples et des courbes unicursales singulières, toute courbe tracée sur une surface représentable point par point sur le champ hyperelliptique est au moins de genre deux, puisqu'elle admet les deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$: les courbes de moindre degré seront donc au moins du quatrième ordre. Si elles sont du quatrième ordre, elles seront planes, car les courbes gauches de degré quatre sont de genre zéro ou un.

Sur la surface Σ existe effectivement une série simplement infinie de courbes planes d'ordre quatre et de genre deux. Soit en effet $\Im(u, v)$ la fonction normale impaire d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; désignons par λ et μ deux paramètres liés par la relation

$$\Im(\lambda, \mu) = 0$$

et considérons sur Σ les courbes représentées par l'équation générale

$$(13) \qquad \Im(u + \lambda, v + \mu) = 0.$$

Nous allons montrer que ces courbes, en nombre simplement infini, sont d'ordre quatre.

En effet, dans le champ hyperelliptique, la courbe

$$\Im(u + \lambda, v + \mu) = 0$$

a un point simple en $u = 0$, $v = 0$, puisque

$$\Im(\lambda, \mu) = 0;$$

la courbe

$$\rho_1 x_1(u, v) + \rho_2 x_2(u, v) + \rho_3 x_3(u, v) + \rho_4 x_4(u, v) = 0$$

a un point double au même point. Donc des *six* points communs à ces deux courbes, *deux* coïncident avec le point $u = 0$, $v = 0$.

En revenant à la surface Σ, on voit que toute courbe (13) tracée sur cette surface est rencontrée par un plan quelconque en $6 - 2 = 4$ points; elle est par suite du *quatrième* degré.

Voici quelques propriétés des courbes (13).

La fonction

$$\Im(u + \lambda, v + \mu)\,\Im(u - \lambda, v - \mu)$$

est évidemment une fonction thêta d'ordre deux et de caractéristique nulle; elle s'exprime donc en fonction linéaire et homogène de quatre fonctions distinctes de même nature, par exemple de $\Im_0^2$, $\Im_1^2$, $\Im_2^2$, $\Im_3^2$. Comme d'ailleurs elle s'annule pour $u = 0$, $v = 0$, ainsi que $\Im_1^2$, $\Im_2^2$, $\Im_3^2$ et que $\Im_0^2$ ne s'annule pas, on pourra l'exprimer à l'aide de $\Im_1^2$, $\Im_2^2$, $\Im_3^2$ seulement, et l'on a ainsi

$$(14) \qquad \Im(u + \lambda, v + \mu)\,\Im(u - \lambda, v - \mu) = \lambda_1 \Im_1^2 + \lambda_2 \Im_2^2 + \lambda_3 \Im_3^2.$$

Observons ici que, si l'on considère la surface de Kummer déjà

introduite et définie par les relations (6), le plan

$$\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0,$$

en vertu de l'équation précédente, est un plan tangent de cette surface (n° 59) dont le point de contact est défini par les deux équations

$$\mathfrak{I}(u+\lambda, v+\mu) = 0, \qquad \mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu) = 0;$$

c'est donc le point $u = 0$, $v = 0$, c'est-à-dire le point $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, qui est un point singulier de la surface. En d'autres termes, le plan $\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0$, touche le cône $C_2(X, Y, Z) = 0$ formé par les tangentes en ce point singulier (n° 159).

Si nous revenons à Σ, nous voyons que l'équation (14), après multiplication des deux membres par $\mathfrak{I}_0(u, v)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_0(u, v)\,\mathfrak{I}(u+\lambda, v+\mu)\,\mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu)\\ = \lambda_1 x_1(u, v) + \lambda_2 x_2(u, v) + \lambda_3 x_3(u, v).\end{aligned}$$

Le plan $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ coupe donc la surface Σ suivant les deux courbes du quatrième ordre

$$(16) \qquad \mathfrak{I}(u+\lambda, v+\mu) = 0, \qquad \mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu) = 0.$$

Le facteur $\mathfrak{I}_0(u, v)$ ne donne que l'origine des coordonnées (n° 128). Les deux courbes (16) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine, car on passe de l'une à l'autre en changeant u et v en $-u$, $-v$ (n° 159). Le plan $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$ enveloppe le cône

$$C_2(x, y, z) = 0$$

d'après ce qui précède.

En d'autres termes :

Les plans menés par le centre de Σ, tangentiellement au cône qui a pour sommet ce point et pour base la conique située sur la surface coupent Σ suivant deux courbes du quatrième ordre.

Ces deux courbes ont le centre (qui est un point quadruple de Σ) pour point double; on démontre sans difficulté qu'elles ont toutes deux pour asymptotes les trois droites suivant lesquelles leur plan coupe les trois plans des coordonnées cartésiennes, et qu'elles sont osculatrices entre elles aux points à l'infini sur ces asymptotes, etc.

Pour six positions du plan sécant, correspondant aux six plans sin-

guliers de la surface de Kummer passant par le point $u=0$, $v=0$, les deux courbes du quatrième ordre coïncident ([1]) : trois des plans sécants ainsi définis sont les plans de coordonnées $x=0$, $y=0$, $z=0$, et les quartiques se décomposent en droites; les trois autres plans touchent Σ le long d'une quartique de genre deux proprement dite.

Il serait aisé de déduire de ces propositions un mode de génération de la surface Σ par des quartiques planes; sans insister sur ce point, nous nous bornerons à faire observer que toutes les quartiques (13) sont des courbes γ et ont par suite les mêmes modules. Géométriquement, on peut donner de cette dernière propriété une démonstration identique à celle du n° 60, basée sur la fixité des rapports anharmoniques des six droites suivant lesquelles un plan mobile, tangent à un cône du second ordre ($C_2=0$), est coupé par six plans fixes tangents au même cône.

Enfin il y a lieu de remarquer que les propriétés générales des courbes γ passant par un point fixe s'appliquent à nos quartiques.

163. On obtient une seconde surface du huitième ordre, analogue à la précédente, mais un peu plus générale de la manière suivante :

Désignons par $\mathfrak{S}_1(u, v)$; $\mathfrak{S}_2(u, v)$; $\mathfrak{S}_3(u, v)$; $\mathfrak{S}_4(u, v)$; $\mathfrak{S}_5(u, v)$; $\mathfrak{S}_6(u, v)$ les six fonctions thêta normales d'ordre un qui s'annulent pour $u=0$, $v=0$; ce seront les six fonctions impaires, ayant pour symboles respectifs

$$12', \quad 13', \quad 41', \quad 14', \quad 21', \quad 31'.$$

Soit toujours $\mathfrak{S}_0(u, v)$ la fonction d'ordre un et de caractéristique nulle, de symbole $44'$. Considérons la surface S définie par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1=\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1^2, \qquad x_2=\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_2^2, \qquad x_3=\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_3^2, \\ x_4=\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3+\rho\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_6, \end{cases}$$

où ρ est une constante quelconque (pour $\rho=0$ on a la surface Σ). Les quatre fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 sont d'ordre trois et de caractéristique nulle, comme on le voit aisément; les trois premières sont paires et la dernière est impaire.

([1]) L'équation de ces six plans est évidemment $B_3^2 - C_2A_2^2=0$.

Ces fonctions s'annulent simultanément :

1° Pour les six solutions communes aux équations

$$\mathfrak{S}_0(u, v) = 0, \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 + \rho\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_6 = 0;$$

2° Pour le système $u = 0$, $v = 0$; de plus, le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double, au moins, pour chacune des courbes du champ hyperelliptique $x_j(u, v) = 0$; $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Il en résulte que le degré de S est égal à

$$2.3^2 - 6 - 4 = 8.$$

Cette surface, en coordonnées cartésiennes, a pour centre le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, qui est un point quadruple (de première catégorie). Examinons maintenant en quelques mots rapides les courbes remarquables tracées sur S, et d'abord les courbes unicursales singulières.

Les six solutions communes aux deux équations

$$\mathfrak{S}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 + \rho\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_6$$

sont deux à deux égales et de signes contraires; soient u_0, v_0 et $-u_0$, $-v_0$ deux d'entre elles. Donnons à u, v dans les fonctions $x_j(u, v)$ les valeurs $u_0 + \varepsilon$, $v_0 + \eta$, ε et η étant très petits, il vient

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1(\mathrm{A}\,\varepsilon + \mathrm{B}\,\eta) + \ldots, \\ x_2 &= a_2(\mathrm{A}\,\varepsilon + \mathrm{B}\,\eta) + \ldots, \\ x_3 &= a_3(\mathrm{A}\,\varepsilon + \mathrm{B}\,\eta) + \ldots, \\ x_4 &= \quad \mathrm{A}_4\varepsilon + \mathrm{B}_4\eta \;+ \ldots, \end{aligned}$$

les a, A, B étant des constantes et les termes négligés étant du second ordre au moins en ε et η.

Quand ε et η varient, le point ainsi défini décrit la droite

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}.$$

La droite analogue qui correspond aux valeurs $-u_0$, $-v_0$ des paramètres coïncide avec la précédente, car dans le calcul ci-dessus, a_1, a_2, a_3 sont les valeurs que prennent les fonctions paires $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{S}_2^2$, $\mathfrak{S}_3^2$ pour $u = u_0$, $v = v_0$.

En d'autres termes, les six droites (unicursales singulières) se réduiront à trois, passant par le centre de la surface et dont chacune sera une ligne double de S. Nous avons déjà rencontré le même fait pour la surface Σ.

Au système $u=0$, $v=0$ correspond sur S une courbe unicursale singulière qui est une conique, située dans le plan $x_4=0$ (n° 160); l'équation de cette conique, ou plutôt celle du cône qui la contient et qui a pour sommet le centre de S, est $C_2(x_1, x_2, x_3)=0$, comme dans le cas de la surface Σ, car l'équation cherchée ne dépend que des valeurs que prennent les fonctions x_1, x_2, x_3 pour $u=\varepsilon$, $v=\eta$, et ces fonctions sont les mêmes pour les surfaces S et Σ.

On voit également, comme plus haut, que les plans tangents au cône $C_2=0$ coupent S suivant deux courbes γ, du quatrième ordre, symétriques par rapport au centre, et dont les équations sont de la forme

$$\mathfrak{I}(u+\lambda, v+\mu)=0, \qquad \mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

λ et μ étant deux paramètres liés par la relation $\mathfrak{I}(\lambda, \mu)=0$.

Toutes ces courbes ont pour point double le centre de S.

On démontre ensuite sans difficulté que, parmi les plans tangents au cône $C_2=0$, il en est six qui touchent la surface S suivant une courbe du quatrième ordre ([1]). Les trois faces du trièdre formé par les droites doubles trouvées plus haut, touchent également le cône et coupent chacune S suivant une conique, qui est une ligne double de cette surface.

Enfin le plan $x_4=0$ coupe S suivant la conique qui correspond au système de valeurs $u=0$, $v=0$, et suivant une courbe du troisième ordre qui est également une ligne double de la surface.

En résumé, la surface S a pour lignes doubles trois droites, trois coniques et une cubique; le genre des sections planes est ainsi égal à $\frac{1}{2}\cdot 7.6-12=9$, comme on le savait *a priori*.

La surface adjointe du quatrième ordre se décompose en quatre plans, qui sont les faces du trièdre formé par les droites doubles et le plan $x_4=0$.

([1]) Parmi ces plans figurent les plans de coordonnées $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.

164. Nous nous bornerons enfin à signaler une *troisième surface hyperelliptique d'ordre huit*, qu'on déduit de Σ en remplaçant x, y, z par $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$; elle a pour équation

$$C_4 + 2xyz\,B_3 + A_1^2 x^2 y^2 z^2 = 0,$$

étant posé

$$C_4 = a_1^2 y^2 z^2 + a_2^2 x^2 z^2 + a_3^2 x^2 y^2 - 2xyz(a_1 a_2 z + a_1 a_3 y + a_2 a_3 x),$$
$$B_2 = -a_2 a_3 x(z^2 - y^2) + a_1 a_3 y(x^2 + z^2) - a_1 a_2 z(x^2 + y^2) + \lambda xyz,$$
$$A_1 = a_1 x - a_2 y - a_3 z.$$

QUATRIÈME PARTIE.

SURFACES REPRÉSENTABLES POINT PAR POINT SUR LA SURFACE DE KUMMER.

Généralités.

165. Nous avons admis jusqu'ici, dans l'étude des surfaces hyperelliptiques générales, qu'à un point de la surface ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul couple d'arguments u, v.

Supposons maintenant qu'à un point d'une surface $\mathfrak{T}$ dont les coordonnées cartésiennes x, y, z s'expriment en fonction quadruplement périodique uniforme de deux paramètres u, v, correspondent *deux couples* d'arguments u, v et u', v'. Nous allons démontrer que la surface $\mathfrak{T}$ est représentable point par point sur une surface de Kummer.

En effet, considérons, en chaque point x, y, z de $\mathfrak{T}$, la somme $du + du'$: elle peut se mettre sous la forme $M\,dx + N\,dy$, M et N étant rationnels en x, y, z, car x et y étant les variables indépendantes, chacune des deux fonctions $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y}$ est une fonction rationnelle de x, y, z en chaque point de $\mathfrak{T}$, puisqu'elle n'a qu'une seule valeur en ce point.

Si maintenant, dans $M\,dx + N\,dy$, on remplace x, y, z par leurs

valeurs en fonction quadruplement périodique de u, v, il vient

$$du + du' = \mathrm{A}(u, v)\,du + \mathrm{B}(u, v)\,dv,$$

A et B étant des fonctions quadruplement périodiques uniformes.

De même on aurait

$$dv + dv' = \mathrm{A}_1(u, v)\,du + \mathrm{B}_1(u, v)\,dv.$$

Les deux intégrales $\int(du + du')$ et $\int(dv + dv')$ restent évidemment finies sur la surface $\mathfrak{T}$; or l'intégrale $\int \mathrm{A}(u, v)\,du + \mathrm{B}(u, v)\,dv$ ne peut demeurer finie que si les fonctions quadruplement périodiques A et B se réduisent à des constantes, et de même les fonctions A_1 et B_1.

On a ainsi

$$(1)\qquad \begin{cases} du + du' = \alpha\; du + \beta\; dv, \\ dv + dv' = \alpha_1\, du + \beta_1\, dv, \end{cases}$$

α, β, α_1, β_1 étant des constantes.

Permutant u et u', v et v' dans ces relations, on trouve les nouvelles équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha\,(du - du') + \beta\,(dv - dv') = 0, \\ \alpha_1(du - du') + \beta_1(dv - dv') = 0. \end{cases}$$

Deux cas sont à distinguer :

I. Si l'on a

$$du' = du \qquad \text{et} \qquad dv' = dv,$$

les deux relations (2) sont satisfaites. Mais on en conclut $u' = u + \gamma$, $v' = v + \gamma_1$; γ et γ_1 étant des constantes, et par suite les coordonnées x, y, z, considérées comme des fonctions quadruplement périodiques de u, v, admettent le couple de périodes γ, γ_1. Le système d'arguments u', v' n'est donc pas distinct (aux périodes près) du système u, v.

II. Si l'on n'a pas simultanément

$$du = du' \qquad \text{et} \qquad dv = dv',$$

les relations (2) montrent que le déterminant $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1$ est nul.

Distinguons encore deux cas :

1° Si α, β, α_1, β_1 sont nuls, il reste dans (1)

$$du + du' = 0, \qquad dv + dv' = 0,$$

d'où l'on tire

$$u + u' = \gamma, \qquad v + v' = \gamma_1.$$

Posons maintenant

$$u = U + \frac{1}{2}\gamma, \qquad v = V + \frac{1}{2}\gamma_1,$$

$$u' = U' + \frac{1}{2}\gamma, \qquad v' = V' + \frac{1}{2}\gamma_1;$$

il vient

$$U + U' = 0, \qquad V + V' = 0.$$

On voit ainsi que les coordonnées x, y, z, considérées comme fonctions quadruplement périodiques de U et V ne changent pas quand on remplace U et V simultanément par $-$U et $-$V; ce sont donc des fonctions *paires* de U, V.

2° Supposons que l'une au moins des quantités α, β, α_1, β_1; α_1 par exemple, ne soit pas nulle.

On déduit des équations (1), en tenant compte de la condition $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = 0$,

$$(\alpha_1\, du - \alpha\, dv) + (\alpha_1\, du' - \alpha\, dv') = 0;$$

d'où

(3) $$(\alpha_1 u - \alpha v) + (\alpha_1 u' - \alpha v') = \gamma.$$

La seconde relation (2) donne d'ailleurs

(4) $$(\alpha_1 u + \beta_1 v) - (\alpha_1 u' + \beta_1 v') = \gamma_1.$$

Prenons maintenant pour variables, à la place de u et v, les arguments U et V ainsi définis

$$U = \alpha_1 u - \alpha v - \frac{1}{2}\gamma,$$
$$V = \alpha_1 u + \beta_1 v.$$

Les relations (3) et (4) montrent que, à un point de $\mathfrak{C}$, correspondront les deux systèmes d'arguments

$$U, \quad V \qquad \text{et} \qquad -U, \quad V + \gamma_1.$$

En ce cas, les fonctions quadruplement périodiques considérées se ramènent aux fonctions elliptiques.

Soit en effet F(U, V) l'une quelconque des coordonnées x, y, z d'un

point de $\mathfrak{T}$; on a, d'après ce qui précède, pour toutes les valeurs de U, V,

$$F(U, V) = F(-U, V + \gamma_1). \tag{5}$$

On en conclut, en changeant encore une fois U, V en $-U$, $V + \gamma_1$,

$$F(U, V) = F(U, V + 2\gamma_1),$$

$2\gamma_1$ est donc une période par rapport à V seulement.

Soient maintenant ω et ω' un couple quelconque de périodes simultanées de U, V : changeons dans (5) U et V en $U + \omega$, $V + \omega'$; il vient successivement, par des transformations évidentes,

$$\begin{aligned} F(U, V) &= F(U + \omega, V + \omega') = F(-U - \omega, V + \omega' + \gamma_1) \\ &= F(-U, V + 2\omega' + \gamma_1) \\ &= F(U, V + 2\omega' + 2\gamma_1) \\ &= F(U, V + 2\omega'). \end{aligned}$$

Cette dernière relation montre que $2\omega'$ est une période par rapport à V seul; et, par suite, puisque $(2\omega, 2\omega')$ est un couple de périodes simultanées, que 2ω est une période par rapport à U seul.

Il en résulte évidemment que F(U, V) est une fonction doublement périodique de U et doublement périodique de V.

166. Résumant toute cette analyse, on voit que, si l'on reste dans le champ hyperelliptique proprement dit, *toute surface* $\mathfrak{T}$, *telle qu'à un de ses points correspondent deux points du champ, peut*, après un changement de variables, *être représentée par des équations de la forme*

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad z = F_3(u, v),$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions quadruplement périodiques *paires* de u, v, c'est-à-dire ne changeant pas quand on remplace u, v par $-u$, $-v$.

En d'autres termes :

La surface $\mathfrak{T}$ *est représentable point par point sur la surface de Kummer.*

167. Les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface $\mathfrak{T}$ peuvent être mises sous une forme remarquable.

Si l'on se reporte en effet au théorème de M. Appell, rappelé au n° 1,

on voit qu'on peut écrire (en négligeant le facteur de proportionnalité)

$$x_1 = \theta_1(u, v), \qquad x_2 = \theta_2(u, v),$$
$$x_3 = \theta_3(u, v), \qquad x_4 = \theta_4(u, v);$$

$\theta_1(u, v), \ldots, \theta_4(u, v)$ étant des fonctions thêta de même ordre et de mêmes multiplicateurs.

Pour que la fonction $\frac{x_1}{x_4}$ soit paire, il faut qu'on ait

$$\frac{\theta_1(u, v)}{\theta_4(u, v)} = \frac{\theta_1(-u, -v)}{\theta_4(-u, -v)};$$

d'où l'on déduit aisément que le quotient $\frac{\theta_1(-u, -v)}{\theta_1(u, v)}$ doit être entier, et par suite (n° 10) il faut que $\theta_1(u, v)$ soit une fonction paire ou impaire, ou qu'elle le devienne quand on la multiplie par $e^{-\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v}$, p' et q' étant des nombres entiers.

Désignons par $\Theta_1(u, v)$ la fonction paire ou impaire

$$\theta_1(u, v)\, e^{-\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v},$$

le raisonnement fait au n° 14 montre que $\Theta_1(u, v)$ est une *fonction normale*, de caractéristique quelconque.

Les quotients $\frac{\theta_2}{\theta_1}, \frac{\theta_3}{\theta_1}, \frac{\theta_4}{\theta_1}$ étant des fonctions quadruplement périodiques paires, les trois fonctions

$$\Theta_j = e^{-\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v}\,\theta_j(u, v) \qquad (j = 2, 3, 4),$$

qui sont des fonctions thêta, seront des fonctions normales, de même ordre et de même caractéristique que $\Theta_1(u, v)$, et seront paires ou impaires avec Θ_1.

En d'autres termes :

Les coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{T}$ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales, de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires.

On peut dire aussi que toute surface $\mathfrak{T}$ correspond point par point à une surface de Kummer K, par les relations

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

en désignant par x_j les coordonnées d'un point de $\mathfrak{T}$ et par X_j celles du point correspondant de K.

Les fonctions S_j, égalées à zéro, représentent des surfaces liées d'une manière remarquable à la surface de Kummer; d'après la théorie générale des courbes tracées sur cette surface, cinq cas sont à distinguer :

1° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre impair, $2\rho+1$, et s'annulent pour six demi-périodes : les surfaces $S_j=0$ sont d'ordre $\rho+1$ et passent par une même conique de K.

2° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre impair $2\rho+1$, et s'annulent pour dix demi-périodes : les surfaces $S_j=0$ sont d'ordre $\rho+2$, et passent par trois mêmes coniques de K, ayant en commun un point double de K.

3° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont paires, d'ordre pair 2ρ, et de caractéristique nulle : les surfaces S_j sont d'ordre ρ et n'ont en commun aucune courbe située sur K.

4° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont impaires, d'ordre pair 2ρ, et de caractéristique nulle : les surfaces S_j sont d'ordre $\rho+2$ et passent par quatre mêmes coniques de K, formant un groupe de Rosenhain.

5° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre pair, 2ρ, et de caractéristique non nulle; les surfaces $S_j=0$ sont d'ordre $\rho+1$ et passent par deux mêmes coniques de K.

168. Ces principes étant établis, il est aisé, en répétant les raisonnements faits au Chapitre III de la troisième Partie, d'établir la théorie générale des surfaces $\mathfrak{T}$.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats principaux.

Toute surface $\mathfrak{T}$, *d'ordre* n, *admet une surface adjointe d'ordre* $n-4$ (n° 102); cette surface a pour ligne multiple d'ordre $l-1$ toute ligne multiple d'ordre l, et pour point multiple d'ordre $l-2$ (au moins) tout point multiple d'ordre l de $\mathfrak{T}$. *Elle coupe* $\mathfrak{T}$, *en dehors des lignes multiples, suivant les courbes unicursales singulières de* $\mathfrak{T}$, *celles qui correspondent à des demi-périodes pouvant toutefois être exceptées* (n° 107).

La théorie des courbes tracées sur la surface de Kummer, exposée au Chapitre IX de la deuxième Partie, s'applique évidemment sans modification aux surfaces $\mathfrak{T}$, du moins pour les propriétés qui restent invariables dans les transformations birationnelles.

Le nombre des surfaces d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, adjointes à $\mathfrak{C}$, est égal à $p+1$, p étant le genre des sections planes de $\mathfrak{C}$.

Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, adjointes à $\mathfrak{C}$, est égal à

$$\frac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+2+\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Cette formule ne diffère de la formule analogue, relative aux surfaces hyperelliptiques générales, que par le terme additif $+2$ [1].

Si les quatre fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ sont des fonctions d'ordre h, ayant en commun des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ en des points $u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k$, *les courbes découpées sur $\mathfrak{C}$ par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment une série linéaire*

$$\frac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+1$$

fois infinie, et ayant pour équation générale

$$\lambda_1\theta_1(u, v)+\lambda_2\theta_2(u, v)+\ldots=0,$$

les $\theta(u, v)$ étant les fonctions thêta normales d'ordre hq, linéairement distinctes, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$, et paires ou impaires selon que ces dernières sont paires ou impaires; de plus, les fonctions $\theta(u, v)$ ont en chaque point u_k, v_k la singularité adjointe de la singularité composée $(q\sigma_k)$.

169. *Remarque.* — Il peut arriver que les fonctions $\theta(u, v)$ aient en u_k, v_k une singularité d'ordre plus élevé que la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$, en raison de la condition particulière qui leur est imposée d'être paires ou impaires. Par exemple, si ces fonctions sont des fonctions paires, de caractéristique nulle, et si la singularité σ_k consiste en un point double correspondant à une demi-période, — (0, 0) par exemple, — la singularité $q\sigma_k$ sera un point multiple d'ordre $2q$, et la singularité $(q\sigma_k)'$ un point d'ordre $2q-1$, correspondant à la même demi-période; mais une fonction paire ne peut avoir au point (0, 0) qu'un

---

[1] L'existence du terme $+2$ tient à ce que les intégrales $\int du$ et $\int dv$ ne sont pas des intégrales abéliennes le long de toute courbe tracée sur $\mathfrak{C}$.

point multiple d'ordre pair; les fonctions $\theta(u, v)$ auront ainsi, en ce point, un point multiple d'ordre $2q$, et par suite y seront douées de la singularité $(q\sigma_k)$ et non de la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$. La proposition énoncée plus haut n'en subsiste pas moins, si l'on considère comme douée *a fortiori* de la singularité $(q\sigma_k)'$ toute fonction qui présente en u_k, v_k une singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$.

Dans cet énoncé voici ce que nous entendons par singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$. Soient $\Theta_0(u, v)$ une fonction quelconque, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)$, et $\Theta(u, v)$ une fonction quelconque ayant la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$: la fonction $\theta(u, v)$ aura une singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$ si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\Theta(u, v)}$ tend vers zéro quand u, v s'approchent respectivement de u_k, v_k en restant liés par la relation

$$\Theta_0(u, v) = 0.$$

170. On démontre également, comme au n° 135, que :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières, communes à $\mathfrak{T}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$, découpent sur $\mathfrak{T}$ la série linéaire des courbes comprises dans l'équation

$$\lambda_1 \theta_1(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots = 0,$$

où θ_1, θ_2, ... désignent les fonctions thêta normales d'ordre hq, linéairement distinctes, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$, et paires ou impaires en même temps que ces dernières; de plus, les fonctions θ_1, θ_2, ... ont en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$.

Le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, dont il est question, est *au moins* égal à

$$\frac{1}{2}q(q+1)n - q(p-1) + 2 + \frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Il est égal à ce nombre lorsque les singularités $(q\sigma_k)$ sont indépendantes pour les fonctions thêta normales, d'ordre hq, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$ et paires ou impaires en même temps que celles-ci.

Ces divers théorèmes donneraient lieu à des applications géométriques analogues à celles qui ont été développées dans le cas des sur-

faces hyperelliptiques générales, et sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

171. Laissant maintenant de côté l'étude générale des surfaces $\mathfrak{C}$, nous dirons quelques mots de celles qui sont d'ordre minimum, c'est-à-dire d'ordre 4 : il est clair, en effet, que les surfaces $\mathfrak{C}$ sont au moins du quatrième degré, puisqu'elles sont de genre un.

Les surfaces $\mathfrak{C}$, d'ordre quatre, ne peuvent avoir d'autres courbes unicursales singulières que celles qui correspondent à des demi-périodes. En effet (n° 103), l'intégrale double $\int\int du\,dv$, sur une surface $\mathfrak{C}$, d'ordre n, se met sous la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)\,dx\,dy}{T'_z}.$$

Nous savons de plus (n° 107) que la fonction $D(x, y, z)$ d'ordre $n-4$, s'annule en tous les points d'une courbe unicursale singulière qui ne correspond pas à une demi-période. Si $T(x, y, z)$ est d'ordre quatre, $D(x, y, z)$ est une constante non nulle, et par suite il est impossible qu'il existe des courbes unicursales singulières, en dehors de celles qui correspondent à des demi-périodes.

Les quatre fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ $(j=1, 2, 3, 4)$, qui définissent une surface $\mathfrak{C}$ d'ordre quatre, n'ont donc de singularités communes qu'aux seize points $\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right)$, en désignant toujours par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ deux périodes simultanées.

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$ ces singularités dont plusieurs ne peuvent pas exister; on a, en désignant par h l'ordre des fonctions $x_j(u, v)$,

$$4 = \frac{1}{2}[2h^2 - \Sigma_k I(\sigma_k, \sigma_k)];$$

car l'ordre de $\mathfrak{C}$ est évidemment égal à *la moitié* du nombre des solutions non fixes communes à deux équations $x_j(u, v)=0$, $x_i(u, v)=0$, puisque ces solutions sont deux à deux égales et de signes contraires, et qu'à deux systèmes u, v; $-u-v$ ne correspond qu'un point de $\mathfrak{C}$.

Les sections planes d'une surface $\mathfrak{C}$ d'ordre quatre sont de genre trois car la surface $\mathfrak{C}$, qui est de genre un, n'a pas de courbe multiple; par

suite, le nombre des surfaces adjointes à $\mathfrak{C}$, d'ordre $n+q-4$, c'est-à-dire d'ordre q, est, d'après la formule du n° 170 ([1]), *au moins* égal à

$$2q(q+1)-2q+2+\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$$

ou

$$\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3).$$

Or le nombre $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)$ est précisément égal au nombre des surfaces les plus générales d'ordre q linéairement distinctes; il en résulte :

1° Que les surfaces d'ordre q adjointes à une surface $\mathfrak{C}$ d'ordre quatre sont toutes les surfaces d'ordre q de l'espace, ce qui était évident *a priori;*

2° Que les mots *au moins* doivent être supprimés dans l'énoncé ci-dessus, et par suite (n° 170) que les singularités $(q\sigma_k)$ sont indépendantes pour les fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique que les fonctions x_j^q, et paires ou impaires en même temps que celles-ci. En particulier, si l'on fait $q=1$, on voit que les singularités communes aux quatre fonctions $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$ sont indépendantes les unes des autres, pour les fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique que ces quatre fonctions, et paires ou impaires en même temps qu'elles.

Enfin le nombre des surfaces adjointes linéairement distinctes d'ordre un étant égal à quatre, la proposition du n° 170 montre qu'il n'existe pas, en dehors des quatre fonctions $x_j(u, v)$ et de leurs combinaisons linéaires, de fonction thêta de même ordre et de même caractéristique que ces fonctions, paire ou impaire en même temps qu'elles, et douée des même singularités aux seize points $\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right)$.

172. Il résulte de là qu'on pourra trouver *toutes* les surfaces $\mathfrak{C}$ d'ordre quatre en appliquant la méthode suivante.

([1]) Cette formule donne bien le nombre des surfaces adjointes d'ordre q, puisqu'il n'y a pas de courbes unicursales singulières communes à $\mathfrak{C}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$.

Soit h un nombre quelconque; on considérera les fonctions thêta normales $\theta(u, v)$, d'ordre h, paires (ou impaires) ayant une caractéristique donnée.

Désignons par N le nombre des fonctions thêta considérées, linéairement distinctes; une singularité σ_k en un des seize points $\left(\frac{\mathfrak{T}}{2}, \frac{\mathfrak{T}'}{2}\right)$ équivaut pour ces fonctions à c_k conditions : on formera les fonctions $\theta(u, v)$ qui ont en chacun des seize points précédents des singularités σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$ choisies arbitrairement, mais de telle sorte cependant que l'on ait

$$(6) \qquad 4 = \mathrm{N} - \Sigma c_k.$$

On aura donc ainsi formé quatre fonctions $\theta(u, v)$ linéairement distinctes qui sont les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ d'une surface $\mathfrak{T}$, dont le degré n est donné par la relation

$$(7) \qquad n = \frac{1}{2}[2h^2 - \Sigma_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)].$$

Les singularités σ_k devront être choisies de telle sorte que $n = 4$. Toutefois il conviendra de s'assurer que les quatre fonctions $\theta(u, v)$ trouvées ne sont pas divisibles par une même fonction thêta, et qu'à un point de $\mathfrak{T}$ ne correspondent pas d'autres couples d'arguments que u, v et $-u$, $-v$.

Voici des applications de cette méthode à chacun des cinq cas considérés au n° 167.

173. I. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont d'ordre $2\rho + 1$ paires par exemple, et s'annulent pour six mêmes demi-périodes $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$.

Le nombre de ces fonctions, linéairement distinctes, est égal (n°s 5, 7) à

$$2\rho^2 + 2\rho + 1.$$

Si on les assujettit à avoir un point multiple d'ordre $2k$ pour une des dix demi-périodes autres que $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$, le point (0, 0) par exemple, on trouve aisément le nombre de conditions auxquelles équivaut cette singularité. En effet, les développements des fonctions paires $\theta(u, v)$ suivant les puissances croissantes de u, v ne contient que des termes

d'ordre pair; si l'on annule les coefficients de ces termes jusqu'à l'ordre $2k$ exclusivement, on obtient un nombre de conditions égal à

$$1+3+\ldots+(2k-1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad k^2.$$

Si l'on assujettit les fonctions $\theta(u, v)$ à avoir un point multiple d'ordre $2k+1$ pour une des six demi-périodes primitives, on trouve de même un nombre de conditions égal à

$$2+4+\ldots+2k=k(k+1).$$

Par suite, pour les fonctions $\theta(u, v)$ douées de points multiples ordinaires, correspondant aux seize demi-périodes, et d'ordres

$$2k_1, \quad 2k_1, \quad \ldots, \quad 2k_{10}, \qquad 2k'_1+1, \quad 2k'_2+1, \quad \ldots, \quad 2k'_6+1,$$

les relations (6) et (7) deviennent

$$4=2\rho^2+2\rho+1-(k_1^2+k_2^2+\ldots+k_{10}^2)-[k'_1(k'_1+1)+\ldots+k'_6(k'_6+1)],$$

$$4=\frac{1}{2}[2(2\rho+1)^2-4(k_1^2+\ldots+k_{10}^2)-(2k'_1+1)^2-\ldots-(2k'_6+1)^2].$$

On vérifie immédiatement que *ces deux relations ne diffèrent pas l'une de l'autre*, et chacune d'elles peut s'écrire

$$(8)\quad 8\rho^2+8\rho-6=4k_1^2+4k_2^2+\ldots+4k_{10}^2+(2k'_1+1)^2+\ldots+(2k'_6+1)^2.$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable que les surfaces $\mathfrak{T}$ du quatrième ordre cherchées correspondent aux décompositions du nombre $8\rho^2+8\rho-6$, en dix carrés pairs et en six carrés impairs, $2\rho+1$ étant l'ordre des fonctions coordonnées.

Voici un exemple :

Pour $\rho=1$, on a

$$8\rho^2+8\rho-6=10.$$

Les décompositions du nombre 10 en carrés suivant la formule (8) se réduisent à une seule

$$10=4+1+1+1+1+1+1.$$

Les fonctions $\theta(u, v)$ sont alors des fonctions thêta paires, d'ordre trois, de caractéristique nulle, s'annulant pour six demi-périodes, et ayant un point double pour une autre demi-période.

Géométriquement, la surface $\mathfrak{T}$ correspondante est définie par des

équations de la forme

(9) $$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

où X_1, X_2, X_3, X_4 désignent les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer, K. Les surfaces $S_j = 0$ sont ici des quadriques, passant par une des coniques singulières de K et par un point double situé en dehors de cette conique. La transformation ainsi obtenue est une transformation par rayons vecteurs réciproques de la surface K, si l'on suppose que la conique considérée sur K soit le cercle à l'infini et que le pôle soit placé en un des points doubles à distance finie.

L'étude de la surface du quatrième degré trouvée n'offre donc aucune difficulté.

174. II. Les fonctions $\theta(u, v)$, d'ordre $2\rho + 1$, s'annulent pour dix demi-périodes. Celles d'entre elles qui sont linéairement distinctes sont (n°s 5, 7) en nombre égal à

$$2\rho^2 + 2\rho.$$

On démontre comme tout à l'heure qu'on obtiendra une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre, en assujettissant ces fonctions à avoir des points multiples d'ordres $(2k_1 + 1)$, $(2k_2 + 1)$, ..., $(2k_{10} + 1)$ pour chacune des dix demi-périodes primitives et des points multiples d'ordres $2k'_1$, $2k'_2$, ..., $2k'_6$ pour chacune des six autres demi-périodes, les nombres k et k' devant vérifier la relation unique

$$8\rho^2 + 8\rho - 6 = (2k_1 + 1)^2 + \ldots + (2k_{10} + 1)^2 + 4k_1'^2 + \ldots + 4k_6'^2.$$

Exemple. — Pour $\rho = 1$, $8\rho^2 + 8\rho - 6$ est égal à dix et il n'y a qu'une décomposition possible

$$10 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Les fonctions $\theta(u, v)$ sont alors des fonctions d'ordre trois s'annulant pour dix demi-périodes.

Dans les relations de la forme (9) qui définissent $\mathfrak{T}$, les surfaces $S_j = 0$ sont des surfaces cubiques passant par trois coniques de K ayant en commun un point double de cette dernière surface. Nous reviendrons plus loin sur la surface $\mathfrak{T}$ ainsi obtenue.

175. III. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont paires, de caractéristique nulle et

d'ordre 2ρ; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est égal (n° 4) à

$$2\rho^2+2.$$

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour les demi-périodes, des points multiples d'ordres $2k_1$, $2k_2$, ..., $2k_{16}$, les nombres k vérifiant la relation unique

$$2\rho^2-2=k_1^2+k_2^2+\ldots+k_{16}^2.$$

Exemples. — Pour $\rho=2$, on a

$$2\rho^2-2=6.$$

Il y a deux décompositions du nombre six en moins de seize carrés

1° $$6=2^2+1+1;$$

2° $$6=1+1+1+1+1+1.$$

On voit sans difficulté que la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à la première décomposition est définie par des équations de la forme (9), où les surfaces $S_j=0$ sont des cônes du second ordre qui ont pour sommet commun un point double de K et passent en outre par deux autres points doubles de cette surface. Il est clair qu'à un point de $\mathfrak{T}$ correspondent dès lors *deux* points de K, situés sur une même droite issue du point double qui est le sommet des cônes $S_j=0$, et par suite $\mathfrak{T}$ est non pas du *quatrième*, mais du *second* degré.

Pour la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à la seconde décomposition, les surfaces $S_j=0$ sont des quadriques passant par six points singuliers de K. Parmi ces six points, cinq ne peuvent être dans un même plan singulier de K, parce que les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ seraient alors divisibles par la fonction ϑ du premier ordre correspondant à ce plan singulier.

176. IV. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont impaires, de caractéristique nulle, d'ordre 2ρ, elles s'annulent pour chacune des seize demi-périodes; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est $2\rho^2-2$ (n° 4).

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour les demi-périodes, des points multiples d'ordres $(2k_1+1)$, $(2k_2+1)$, ..., $(2k_{16}+1)$; les nombres k vérifiant la rela-

tion unique

$$8\rho^2 - 8 = (2k_1+1)^2 + (2k_2+1)^2 + \ldots + (2k_{16}+1)^2.$$

Exemple. — Pour $\rho = 2$, $8\rho^2 - 8$ est égal à 24; il n'y a qu'une décomposition du nombre 24 en seize carrés impairs

$$24 = 9 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Les quatre fonctions $x_j(u, v)$ relatives à la surface $\mathfrak{T}$ correspondante sont des fonctions thêta normales d'ordre quatre appartenant à la famille singulière; les courbes $x_j(u, v) = 0$ sur la surface de Kummer ont un point triple en un des seize points singuliers; ce sont donc (n° 78) les courbes de contact de surfaces de Steiner inscrites à K.

Nous retrouverons également plus loin cette surface $\mathfrak{T}$.

177. V. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont d'ordre 2ρ et de caractéristique non nulle. Elles s'annulent pour huit demi-périodes; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est égal à $2\rho^2$.

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour chacune des demi-périodes primitives, des points multiples d'ordres $2k_1+1$, $2k_2+1$, $\ldots$, $2k_8+1$ et, pour chacune des huit autres demi-périodes, des points multiples d'ordres $2k'_1$, $\ldots$, $2k'_8$, les nombres k, k' vérifiant la relation unique

$$8\rho^2 - 8 = (2k_1+1)^2 + \ldots + (2k_8+1)^2 + 4k'^2_1 + \ldots + 4k'^2_8.$$

Exemple. — Pour $\rho = 2$, $8\rho^2 - 8$ est égal à 24; il y a plusieurs décompositions du nombre 24 en huit carrés pairs et huit carrés impairs; considérons par exemple la suivante :

$$24 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Pour la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à cette décomposition les surfaces $S_j = 0$ sont des surfaces du troisième ordre, passant par deux coniques de K, et en outre par quatre points doubles de cette surface. Les quatre derniers points doubles doivent être distincts de ceux qui sont situés sur les deux coniques considérées, mais peuvent cependant coïncider avec l'un ou l'autre des points doubles communs aux deux coniques.

178. La théorie précédente montre qu'on peut obtenir des sur-

faces $\mathfrak{T}$ du quatrième ordre, quel que soit l'ordre fixé *a priori*, des fonctions coordonnées correspondantes; l'étude générale des surfaces ainsi définies serait sans doute fort intéressante, mais nous ne l'aborderons pas ici, nous contentant d'examiner une des surfaces particulières indiquées plus haut.

Nous nous bornerons à faire observer qu'on peut, pour des valeurs différentes de l'ordre fixé, retrouver la même surface ([1]); c'est ainsi que la surface de Kummer se retrouve, comme on le voit aisément pour diverses valeurs simples de l'ordre. A chaque mode nouveau de représentation de cette surface correspond évidemment une transformation birationnelle de la surface en elle-même, et réciproquement. On voit par là que l'étude des surfaces ici examinées présente un réel intérêt; nous aurons sans doute occasion d'y revenir ([2]).

Étude d'une surface hyperelliptique du quatrième ordre.

179. Soit $\mathfrak{R}$ la surface du quatrième ordre pour laquelle les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ sont les quatre fonctions thêta impaires, linéairement distinctes d'ordre trois et de caractéristique nulle (nº 174). Ces fonctions s'annulant simultanément pour dix demi-périodes, la surface $\mathfrak{R}$ a dix droites, qui jouent le rôle de courbes unicursales singulières. Les points qui correspondent sur $\mathfrak{R}$ aux six autres demi-périodes sont évidemment des points doubles de la surface (nº 13).

Étudions maintenant les courbes représentées sur $\mathfrak{R}$ par les équations $\Im_i(u, v) = 0$, $\Im_i(u, v)$ étant une des seize fonctions normales d'ordre un.

L'ordre de la courbe $\Im_i(u, v) = 0$ est égal à

$$\frac{1}{2}[2.3 - s'],$$

s' désignant le nombre de celles des dix demi-périodes primitives qui

---

([1]) Le raisonnement fait en note au nº 105 ne s'applique pas aux surfaces $\mathfrak{T}$, puisque les différentielles du et dv ne sont pas abéliennes sur ces surfaces.

([2]) Dès maintenant nous pouvons dire que la surface de Kummer admet d'autres transformations univoques que les quinze collinéations et les seize réciprocités fondamentales.

annulent $\mathfrak{S}_i(u, v)$; or nous savons que ces dix demi-périodes sont celles qui n'annulent pas une même fonction thêta d'ordre un, qui est ici la fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ de caractéristique nulle, et il en résulte sans difficulté que la fonction $\mathfrak{S}_i(u, v)$ s'annule pour quatre des demi-périodes considérées, à moins qu'elle ne soit la fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ elle-même. On a donc $s' = 4$ pour quinze des fonctions $\mathfrak{S}_i(u, v)$ et le degré de la courbe correspondante est égal à 1.

Nous trouvons ainsi *quinze nouvelles droites* sur $\mathfrak{R}$.

Ces droites sont celles qui joignent deux à deux les six points doubles de $\mathfrak{R}$, car chacune des quinze fonctions $\mathfrak{S}_i(u, v)$, autres que $\mathfrak{S}_0(u, v)$, s'annule pour deux des demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_0(u, v)$, c'est-à-dire pour les arguments de deux des six points doubles.

Les dix droites trouvées primitivement sont les arêtes des couples de plans qui passent par les six points doubles : en effet, chacune des dix demi-périodes qui correspondent à ces droites annule six des quinze fonctions $\mathfrak{S}_i(u, v)$; en d'autres termes, chacune des dix droites primitives rencontre (n° 145) six des quinze droites nouvelles, d'où l'on déduit de suite la proposition à établir.

Enfin la courbe $\mathfrak{S}_0(u, v) = 0$, sur $\mathfrak{R}$, est une cubique gauche qui passe par les six points doubles.

Il résulte de là que $\mathfrak{R}$ est *le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par les six points doubles*, car on sait que ce lieu est une surface du quatrième ordre, laquelle passe évidemment par les vingt-cinq droites et par la cubique gauche trouvées tout à l'heure (¹).

180. Nous trouvons ainsi entre la surface lieu des sommets des cônes passant par six points et la surface de Kummer, K, un lien remarquable, signalé pour la première fois par M. Darboux. Les coordonnées x d'un point de la surface $\mathfrak{R}$ sont liées aux coordonnées X d'un point de K, par des relations de la forme

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

(¹) *Voir*, sur cette surface :

DARBOUX, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, 1re série, p. 354; HIERHOLZER, *Math. Annalen*, t. II, p. 582; SCHOTTKY, *Journal de Crelle*, t. 105, p. 238; REYE, *ibid.*, t. 86, p. 87 et 98; CASPARY, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1891.

où $S_j = 0$ est l'équation d'une surface cubique passant par trois coniques de K qui ont en commun un point singulier. D'après cela (nos 44-49) aux sections planes de $\mathfrak{R}$ correspondent, sur K, les courbes de contact de surfaces cubiques inscrites, douées de quatre points doubles : c'est là précisément la liaison indiquée par M. Darboux.

Cette liaison ne permettant pas de transformer aisément les propriétés connues de la surface de Kummer pour les étendre à la surface $\mathfrak{R}$, nous allons en déduire une seconde, d'application plus facile.

Il résulte de la proposition du n° 168 que la courbe commune à une quadrique et à $\mathfrak{R}$ aura une équation de la forme

$$\Theta(u, v) = 0,$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta normale, paire, d'ordre six, à caractéristique nulle, douée d'un point double pour chacune des dix demi-périodes qui annulent les quatre fonctions $x_j(u, v)$, et réciproquement. Si la quadrique passe par les six points doubles de $\mathfrak{R}$, la fonction $\Theta(u, v)$ aura encore un point double pour chacune des six autres demi-périodes, et réciproquement.

Or, sur la surface de Kummer, dont les coordonnées $X_j(u, v)$ d'un point sont supposées proportionnelles à quatre fonctions d'ordre deux et de caractéristique nulle (n° 12), la courbe $\Theta(u, v) = 0$ est sur une surface cubique (n° 30) qui passe par les seize points singuliers. Mais toute surface cubique passant par les seize points singuliers de K est évidemment la première polaire d'un point de l'espace par rapport à K; il en résulte qu'aux courbes découpées sur $\mathfrak{R}$ par les quadriques menées par les six points doubles correspondent sur K les courbes de contact des tangentes issues d'un même point, et réciproquement. Si donc on transforme K par polaires réciproques en une autre surface de Kummer, K′, on voit qu'aux sections planes de K′ correspondent, sur $\mathfrak{R}$, les sections par des quadriques passant par les six points doubles, et réciproquement.

D'après cela, si X'_1, X'_2, X'_3, X'_4 sont les coordonnées d'un point de K′ et $x_1, \ldots, x_4$ celles d'un point de $\mathfrak{R}$, la liaison entre les deux surfaces sera exprimée par des relations de la forme

$$X'_j = C_j(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{10}$$

les surfaces $C_j = 0$ étant des quadriques passant par les six points doubles de $\mathfrak{K}$ (¹).

181. Cherchons inversement à exprimer les x en fonction des X'. Lorsque le point x décrit une section plane de $\mathfrak{K}$, le point X décrit, sur K, une sextique passant par dix points singuliers, et, par suite, le point X' décrira, sur K' (n° 78), une courbe du huitième ordre de la famille singulière, ayant un point triple en un point singulier de K'. On aura donc

$$x_j = R_j(X'_1, X'_2, X'_3, X'_4),$$

les surfaces $R_j = 0$ étant des surfaces du quatrième ordre, passant par quatre coniques de K' qui appartiennent à un même tétraèdre de Rosenhain (n° 30); de plus, ces surfaces ont un point double en un même singulier de K', qu'on peut supposer différent des sommets du tétraèdre.

Ces résultats montrent également que les fonctions coordonnées d'un point de $\mathfrak{K}$ peuvent se mettre sous la forme

$$x_j(u', v') = \theta'_j(u', v'), \tag{11}$$

les $\theta'_j(u', v')$ étant des fonctions thêta impaires, d'ordre quatre, de caractéristique nulle, douées d'un point triple pour une des seize demi-périodes. On a donc ainsi un nouveau mode de représentation paramétrique de la surface $\mathfrak{K}$ (²).

182. La relation entre les surfaces $\mathfrak{K}$ et K' donme lieu à des conséquences intéressantes.

Considérons les relations (10) comme liant les points d'un espace E', où les coordonnées sont X', aux points d'un espace e, où les coordon-

---

(¹) Cette relation entre K' et $\mathfrak{K}$ est celle qu'a indiquée M. Reye au Tome 86 du *Journal de Crelle;* on voit qu'elle se déduit de celle de M. Darboux (entre K et $\mathfrak{K}$) en opérant sur K une transformation par polaires réciproques.

(²) Ce mode de représentation comprend, comme cas particulier, celui que M. Schottky a indiqué, et où les $\theta_j(u', v')$ sont des produits de quatre fonctions $\mathfrak{S}$ du premier ordre.

Le mode de représentation primitif comprend, comme cas particulier, celui de M. Caspary.

nées sont x (Transformation de Reye). A un point x de e correspond un seul point X′ de E′, mais à un point X′ correspondent *deux* points x, puisque trois quadriques $C_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ont huit points communs, dont six sont fixes.

Lorsque X′ décrit un plan, x décrit une quadrique passant par les six points fixes; lorsque X′ décrit une droite, x décrit une biquadratique passant par ces points, et réciproquement.

Trois quadriques passant par les six points fixes se coupent en outre en deux points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, qui correspondent à un même point X′ : si l'un de ses points, $x^{(1)}$, est sur 𝔎, parmi les quadriques qui passent par $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ et par les six points fixes, figure, d'après la définition de 𝔎, un cône ayant $x^{(1)}$ pour sommet; il en résulte de suite que les deux points $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont confondus. En d'autres termes, les deux points qui, par les relations (10), correspondent à un même point X′, pris sur K′, se confondent en un seul point situé sur 𝔎.

Le point X′ décrivant un plan tangent à K′, le point x décrit une quadrique passant par les six points fixes et tangente à 𝔎 : cette quadrique est évidemment le cône qui passe par les six points, et qui a son sommet au point de 𝔎, correspondant du point de contact du plan considéré avec K′.

Observons enfin qu'une cubique passant par cinq points doubles de 𝔎 coupe en outre la surface en deux points, g_1 et g_2 : d'après la définition géométrique de 𝔎, ces deux points sont en ligne droite avec le sixième point double. Or l'ensemble de la cubique et de la droite $g_1 g_2$ peut être regardé comme une biquadrique, menée par les six points doubles, et tangente à 𝔎 aux deux points g_1 et g_2; en d'autres termes, cette biquadrique correspond à une tangente double de K′. Ainsi les points de contact d'une bitangente de K′ ont pour correspondants deux points de 𝔎 situés en ligne droite avec un des six points doubles.

Cette belle relation, indiquée par M. Darboux, met en évidence les six systèmes bien connus de bitangentes de la surface de Kummer.

183. Voici quelques applications de ces principes; nous les donnons sans développement, nous bornant à renvoyer aux propriétés de la surface de Kummer que nous transformons.

Une biquadratique passant par les six points doubles de 𝔎 coupe en

outre la surface en quatre points p_1, p_2, p_3, p_4; *à chaque répartition en deux couples de ces quatre points correspond une répartition en deux couples des quatre cônes passant par la biquadratique, ou, si l'on veut, des sommets des quatre cônes*, q_1, q_2, q_3, q_4 (*couples conjugués*, (nº 96).

Les points p_1, p_2, p_3, p_4 *sont les sommets d'un premier tétraèdre; les points* q_1, q_2, q_3, q_4 *sont les sommets d'un second : chaque couple d'arêtes opposées d'un des tétraèdres s'appuie sur un couple d'arêtes opposées de l'autre* (nº 100).

Les deux tétraèdres appartiennent donc à un système desmique de trois tétraèdres et jouissent ainsi des nombreuses propriétés qui caractérisent un tel système.

Deux points doubles quelconques de $\mathfrak{R}$ *sont les sommets opposés d'une double infinité de quadrilatères complets, dont les quatre autres sommets sont sur* $\mathfrak{R}$.

Cette proposition dérive d'un théorème de M. Darboux (nº 37) en vertu duquel il existe des quadrilatères gauches dont les côtés sont des bitangentes d'une surface de Kummer et dont les sommets sont les points de contact de ces bitangentes.

Comme conséquence :

Les cônes des tangentes à $\mathfrak{R}$ *aux six points doubles de cette surface ont en commun une même cubique gauche, tracée sur la surface et passant par les six points* ([1]).

184. Nous terminerons en indiquant quelques propriétés de deux systèmes de courbes remarquables tracées sur $\mathfrak{R}$.

Le premier système se compose des courbes, en nombre doublement infini, suivant lesquelles $\mathfrak{R}$ est coupée par les cônes quadriques qui ont pour sommets les points de $\mathfrak{R}$ et qui passent par les six points doubles ou *points fondamentaux* de $\mathfrak{R}$; ces courbes, lorsque $\mathfrak{R}$ est rapportée au système de coordonnées (11), ont pour équation générale

$$\Im(u'-\lambda, v'-\mu)=0,$$

$\Im$ étant une fonction thêta du premier ordre, et λ, μ des constantes

([1]) Hierholzer, *loc. cit.*

arbitraires. Nous désignerons ces courbes sous le nom de *courbes* γ'; chacune d'elles a un point double, en dehors des points fondamentaux.

Le second système se compose des courbes représentées par l'équation

$$\mathfrak{S}(u-\lambda,\ v-\mu)=0,$$

lorsque $\mathfrak{R}$ est rapporté au système de coordonnées u, v du n° 179; nous les appellerons *courbes* γ.

On démontre aisément que toute courbe γ a un point double, et qu'elle est le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par les six points fondamentaux et par ce point double.

Les courbes γ et γ' jouissent des propriétés générales des courbes γ; elles sont de genre deux; les courbes γ sont d'ordre six, les courbes γ' d'ordre huit.

Chaque courbe γ ou γ' a six *pôles* (n° 145), qui s'obtiennent géométriquement d'une manière simple, en vertu de cette proposition :

Chacune des droites joignant un des six points fondamentaux au point double d'une courbe γ (*ou* γ') *rencontre en outre cette courbe en un nouveau point; les six points ainsi obtenus sont les pôles de la courbe.*

Inversement, chaque point de $\mathfrak{R}$ est le pôle de six courbes γ (ou γ') qui seront dites ses *courbes polaires*, et dont les points doubles se déterminent par le théorème précédent.

On démontre comme au n° 146 que :

Les six pôles des courbes γ (*ou* γ') *qui passent par un point décrivent chacune une des courbes* γ (*ou* γ'), *polaires de ce point.*

Le lieu des points doubles des courbes γ ou γ' passant par un point se déduit du lieu des pôles par la construction indiquée plus haut; on voit ainsi que :

A chacune des six courbes γ' *polaires d'un même point de* $\mathfrak{R}$, *on peut associer un des six points fondamentaux de telle sorte que les six cônes qui ont respectivement une des six courbes* γ' *pour directrice et le point fondamental correspondant pour sommet, se coupent suivant une même courbe nouvelle, située sur* $\mathfrak{R}$.

Cette courbe nouvelle, lieu des points doubles des courbes γ' menées

par un point, est aussi, par définition, le lieu des sommets des cônes quadriques passant par ce point et par les six points fondamentaux; c'est donc une courbe γ, ayant le point considéré pour point double.

On a ainsi entre les courbes γ et γ' la dépendance qu'indique l'énoncé suivant :

Soit une courbe γ' (ou γ) quelconque; les six cônes qui ont respectivement pour sommets les six points fondamentaux et qui passent par cette courbe coupent en outre $\mathfrak{K}$ (en dehors de droites joignant les points fondamentaux) chacun suivant une courbe γ (ou γ'), ayant pour pôle le point double de la courbe γ' (ou γ) primitive.

SUR

LES SURFACES DE KUMMER ELLIPTIQUES

American Journal of Mathematics, t. XVI, 1894.

1. On sait depuis longtemps que les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer par des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux paramètres u et v (¹); la même propriété appartient naturellement à la transformée homographique de cette surface, transformée que M. Cayley a nommée *tétraédroïde*.

Le tétraédroïde étant un cas particulier de la surface de Kummer à seize points doubles, la question se pose de rechercher si d'autres surfaces de Kummer possèdent la même propriété et de les déterminer toutes.

La recherche et l'étude de ces *Surfaces de Kummer elliptiques* forment l'objet du présent Mémoire; il existe une liaison intime entre cette théorie et celle des courbes de genre deux dont une intégrale abélienne se réduit à une intégrale elliptique.

I. — Détermination des surfaces de Kummer elliptiques.

2. Les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer générale peuvent s'exprimer, en fonction abélienne de deux paramètres, u et v, de la manière suivante. Soient $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$; a, b; b, c quatre paires

(¹) Weber, *Journal de Crelle*, t. 94, p. 353.

de périodes : on suppose que la quantité $b^2 - ac$, lorsqu'on y remplace a, b, c par leurs parties réelles, est négative; admettons de plus, pour fixer les idées, que la partie réelle de a est également négative. Les coordonnées homogènes, x_h, d'un point d'une surface de Kummer seront (à un même facteur de proportionnalité près) des fonctions uniformes et entières de u et v satisfaisant aux relations

$$(1)\quad \begin{cases} x_h(u+2\pi i, v) = x_h(u, v+2\pi i) = x_h(u, v) \\ x_h(u+a, v+b) = x_h(u, v)\,e^{-2u-a} \\ x_h(u+b, v+c) = x_h(u, v)\,e^{-2v-c} \end{cases} \qquad (h=1, 2, 3, 4).$$

Réciproquement, quatre fonctions uniformes et entières de u, v, linéairement distinctes, satisfaisant aux relations (1), sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace qui décrit une surface de Kummer lorsque u et v varient ([1]).

Pour que les quotients des fonctions $x_h(u, v)$ deux à deux soient réductibles à des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux variables, il faut et il suffit que, par une transformation du premier ordre, on puisse ramener le tableau des périodes primitives au tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} 2\pi i & 0 & \omega & \dfrac{2\pi i}{n} \\ 0 & 2\pi i & \dfrac{2\pi i}{n} & \omega' \end{array}$$

n désignant un nombre entier positif : cette proposition a été démontrée sous une autre forme par M. Picard, dans son Mémoire sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques pour les courbes de genre deux ([2]); elle résulte également du théorème plus général de M. Poincaré sur la réduction des intégrales abéliennes à des intégrales du genre moindre ([3]).

Sans insister sur ce point, nous voyons que, pour une *surface de Kummer elliptique*, les coordonnées homogènes d'un point seront des fonctions de u, v satisfaisant aux équations (1), dans lesquelles on

([1]) *Voir* à ce sujet : WEBER, *Journal de Crelle*, t. 84. — G. HUMBERT, *Journal de Math.*, 4e série, t. IX, p. 47.

([2]) PICARD, *Bull. Soc. math.*, t. XI, p. 43.

([3]) POINCARÉ, *American Journal*, t. VIII, p. 289 et suiv.

suppose $b = \frac{2\pi i}{n}$, c'est-à-dire

$$(2)\quad \begin{cases} x_h(u+2\pi i, v) = x_h(u, v+2\pi i) = x_h(u, v) \\ x_h\left(u+a, v+\frac{2\pi i}{n}\right) = x_h(u, v)\, e^{-2u-a} \\ x_h\left(u+\frac{2\pi i}{n}, v+c\right) = x_h(u, v)\, e^{-2v-c} \end{cases} \qquad (h=1, 2, 3, 4)$$

et réciproquement.

Nous avons d'ailleurs fait voir, dans notre Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, que les fonctions uniformes entières qui satisfont à des relations de la forme (1) [ou (2)] sont fonctions linéaires et homogènes de *quatre* d'entre elles, et qu'elles sont toutes *paires*, c'est-à-dire ne changent pas si l'on y change simultanément u et v en $-u$, $-v$ (¹). En d'autres termes, puisqu'il y a quatre coordonnées homogènes, $x_h(u, v)$, les surfaces de Kummer elliptiques qui correspondent à des valeurs données de l'entier n et des périodes a, c, sont les transformées homographiques les unes des autres, et il suffit d'en étudier une pour avoir les propriétés projectives des autres.

Nous verrons, dans ces recherches, que le nombre n joue un rôle prépondérant, et nous lui donnerons le nom *d'indice* de la surface.

3. Cela posé, cherchons à exprimer, à l'aide des fonctions thêta elliptiques, les fonctions $x_h(u, v)$ qui vérifient les relations (2); il suffira, pour cela, de former *a priori quatre* de ces fonctions, linéairement distinctes.

Or considérons la fonction $\Theta_1(u)$, de Jacobi, formée avec les périodes $2\pi i$ et $\frac{a}{2}$; désignons-la, pour la symétrie des notations ultérieures, par $\mathfrak{S}_0(u)$, on aura, par définition,

$$\mathfrak{S}_0(u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{m^2\frac{a}{4}+mu}.$$

Posons

$$\mathfrak{S}_h(u) = \mathfrak{S}_0\left(u+\frac{h\pi i}{n}\right) \qquad (h=0, 1, \ldots, 2n-1).$$

(¹) *Journal de Math.*, 4ᵉ série, t. IX, p. 36.

les $2n$ fonctions $\mathfrak{S}_h(u)$ vérifient les relations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{S}_h(u+2\pi i)=\mathfrak{S}_h(u),\\ &\mathfrak{S}_h\left(u+\frac{2\pi i}{n}\right)=\mathfrak{S}_{h+2}(u),\\ &\mathfrak{S}_h(u+a)\quad\;=\mathfrak{S}_h(u)\,e^{-2u-a}\,e^{-2h\frac{\pi i}{n}},\\ &\mathfrak{S}_h(u+na)\;\;=\mathfrak{S}_h(u)\,e^{-2nu-n^2a}.\end{aligned}\right.$$

Soit posé de même

$$\theta_0(v)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2\frac{c}{4}+mv},$$

$$\theta_h(v)=\theta_0\left(v+\frac{h\pi i}{n}\right)\qquad (h=0, 1, \ldots, 2n-1);$$

les $2n$ fonctions $\theta_h(v)$ satisfont à des relations semblables aux relations (3), où a est remplacé par c [1].

Désignons maintenant par ε et η deux nombres donnés, égaux à 0 ou à 1, et considérons la fonction $F_{\varepsilon,\eta}(u, v)$ définie par l'équation

$$(4)\qquad F_{\varepsilon,\eta}(u, v)=\Sigma\,\mathfrak{S}_{2r+\varepsilon}(u)\,\theta_{2\rho+\eta}(v)\,e^{-(2r+\varepsilon)(2\rho+\eta)\frac{\pi i}{n}}.$$

Dans le second membre, la sommation est double et porte sur toutes les valeurs entières et positives de r et ρ, pour lesquelles $2r+\varepsilon$ et $2\rho+\eta$ restent tous deux inférieurs à $2n$, c'est-à-dire sur toutes les valeurs de r et ρ comprises entre 0 et $n-1$ inclus.

En donnant à ε et η toutes les valeurs dont ces quantités sont susceptibles on obtient ainsi *quatre* fonctions $F_{\varepsilon,\eta}$, à savoir F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, et nous allons établir qu'elles vérifient les relations (2).

Écrivons en effet, en supprimant les indices ε et η,

$$F(u, v)=\Sigma\Sigma\,\mathfrak{S}_p(u)\,\theta_q(v)\,e^{-pq\frac{\pi i}{n}},$$

p et q étant des entiers, respectivement de parité donnée et variant entre 0 et $2n-1$, les deux limites pouvant être atteintes. On a évidemment

$$F(u+2\pi i, v)=F(u, v+2\pi i)=F(u, v).$$

---

[1] Les séries $\mathfrak{S}_0(u)$ et $\theta_0(v)$ convergent, car on a admis que la partie réelle de a est négative et il en est de même de la partie réelle de c, d'après l'hypothèse faite sur b^2-ac.

Changeons maintenant u en $u+\frac{2\pi i}{n}$ et v en $v+c$; on aura, d'après (3),

$$\mathfrak{S}_p\left(u+\frac{2\pi i}{n}\right)\theta_q(v+c)\,e^{-pq\frac{\pi i}{n}}=\mathfrak{S}_{p+2}(u)\,\theta_q(v)\,e^{-2v-c}\,e^{-(p+2)p\frac{\pi i}{n}}$$

et par suite, puisque $p+2$ est de même parité que p,

$$\mathrm{F}\left(u+\frac{2\pi i}{n},\ v+c\right)=\mathrm{F}(u,v)\,e^{-2v-c}.$$

De même

$$\mathrm{F}\left(u+a,\ v+\frac{2\pi i}{n}\right)=\mathrm{F}(u,v)\,e^{-2u-a};$$

$\mathrm{F}(u, v)$ vérifie donc bien les relations (2).

Or il est bien connu (et d'ailleurs évident) que les fonctions $\mathfrak{S}_h(u)$, et de même les fonctions $\theta_h(v)$, sont linéairement distinctes; il en résulte immédiatement que les quatre fonctions $\mathrm{F}(u, v)$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène, et dès lors la fonction entière la plus générale qui vérifie les relations (2) est une combinaison linéaire de nos fonctions $\mathrm{F}_{\varepsilon,\eta}(u, v)$.

4. En résumé, *la surface de Kummer elliptique la plus générale, d'indice n, sera une transformée homographique de la surface définie, en coordonnées homogènes, par les équations*

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
x_1&=\mathrm{F}_{0.0}(u,v)=\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1}\mathfrak{S}_{2r}(u)\,\theta_{2\rho}(v)\,e^{-4r\rho\frac{\pi i}{n}},\\
x_2&=\mathrm{F}_{0.1}(u,v)=\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1}\mathfrak{S}_{2r}(u)\,\theta_{2\rho+1}(v)\,e^{-2r(2\rho+1)\frac{\pi i}{n}},\\
x_3&=\mathrm{F}_{1.0}(u,v)=\sum_{r=0}^{n=n-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1}\mathfrak{S}_{2r+1}(u)\,\theta_{2\rho}(v)\,e^{-2\rho(2r+1)\frac{\pi i}{n}},\\
x_4&=\mathrm{F}_{1.1}(u,v)=\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{\rho=0}^{\rho=n-1}\mathfrak{S}_{2r+1}(u)\,\theta_{2\rho+1}(v)\,e^{-(2r+1)(2\rho+1)\frac{\pi i}{n}};
\end{aligned}\right.$$

les fonctions $\mathfrak{S}_h(u)$, $\theta_h(v)$ étant celles définies plus haut. Les quotients des x_h deux à deux ne changent pas quand on augmente u et v de périodes simultanées.

5. *Remarque.* — On peut vérifier que les fonctions $\mathrm{F}_{\varepsilon,\eta}(u, v)$ sont

paires; la fonction $\mathfrak{S}_0(u)$ étant en effet une fonction paire de u, on aura

$$\mathfrak{S}_h(-u) = \mathfrak{S}_0\left(u + \frac{h\pi i}{n}\right) = \mathfrak{S}_0\left(u - \frac{h\pi i}{n}\right) = \mathfrak{S}_{2n-h}(u)$$

et de même

$$\theta_h(-v) = \theta_{2n-h}(v).$$

Changer u et v en $-u$, $-v$ dans la fonction $F(u, v)$ écrite au n° 3, revient donc à changer p et q en $2n-p$, $2n-q$, ce qui n'altère pas la parité respective de ces deux nombres; de plus on a évidemment

$$e^{-pq\frac{\pi i}{n}} = e^{-(2n-p)(2n-q)\frac{\pi i}{n}}$$

et par suite $F(u, v)$ ne change pas.

On déduit de là que la surface définie par (5) est bien une surface d'ordre quatre. En effet, d'après un important théorème de M. Poincaré [1], deux fonctions entières satisfaisant aux relations (1) ont huit zéros communs, et ces zéros, d'après ce qui précède, sont deux à deux égaux et de signes contraires, de la forme (u, v) et $(-u, -v)$. En d'autres termes la surface (5) est coupée par une droite quelconque de l'espace en $\frac{1}{2}8$, c'est-à-dire *quatre* points.

Si l'indice n était égal à l'unité, cette conclusion serait en défaut : dans ce cas en effet, il est facile de voir que les fonctions $F_{\varepsilon,\eta}(u, v)$ sont paires *séparément* par rapport à u et par rapport à v; à un point de la surface (5) correspondent alors les quatre couples d'arguments (u, v); $(-u, v)$; $(u, -v)$; $(-u, -v)$; cette surface est donc d'ordre $\frac{1}{4}8$, c'est-à-dire d'ordre deux, comme on le vérifierait d'ailleurs en formant les fonctions F.

II. — Études des surfaces de Kummer elliptiques; généralités.

6. Les propriétés géométriques des surfaces de Kummer elliptiques sont liées à celles de deux séries de courbes remarquables qu'on peut tracer sur elles; cette étude nous permettra d'obtenir, sous forme

---

[1] *Bull. Soc. math.*, t. XI, p. 129.

géométrique, la relation qui doit exister entre les points doubles d'une surface de Kummer, pour que la surface soit elliptique.

7. Si, dans les équations (5) qui définissent la surface, on donne à v une valeur constante, v_0, la courbe que décrit sur la surface le point $(x_1, \ldots, x_4)$ est une courbe *algébrique*, *de genre un*, puisque les coordonnées homogènes du point mobile sont des fonctions d'une variable u, dont les quotients deux à deux sont doublement périodiques, aux périodes $2\pi i$, et na, en vertu des relations (3).

Cette courbe est *d'ordre* $2n$, car les coordonnées $x_h(u)$ satisfaisant aux relations

$$(6) \qquad \begin{cases} x_h(u+2\pi i) = x_h(u), \\ x_h(u+na) = x_h(u)\, e^{-2nu-n^2a} \end{cases}$$

sont ce qu'on appelle des fonctions thêta d'ordre $2n$, et ont $2n$ zéros dans le parallélogramme des périodes $(2\pi i, na)$: en d'autres termes la courbe est coupée par un plan en $2n$ points et son degré est $2n$.

Il est à observer que la courbe $v = v_0$ est la même que la courbe $v = -v_0$, puisque à un point de la surface de Kummer correspondent les couples d'arguments u, v et $(-u, -v)$; de même la courbe $v = v_0$ coïncide avec la courbe

$$(7) \qquad v = \pm v_0 + 2h\pi i + 2h\frac{\pi i}{n} + lc,$$

h, k, l étant entiers, puisque les valeurs de v qui correspondent à un même point de la surface sont évidemment de la forme (7).

On obtient un second système de courbes d'ordre $2n$ et de genre 1 en donnant à u, dans les équations (5), une valeur constante. Il est clair que deux courbes d'un même système, $u = u_0$ et $u = u_1$, n'ont aucun point commun, et qu'il ne passe qu'une courbe du système par un point de la surface de Kummer.

Ces deux systèmes de courbes sont évidemment spéciaux aux surfaces de Kummer elliptiques; il est clair de plus, en vertu de la représentation paramétrique (5), que toutes les courbes $u = u_0$ ont le même module, et il en est de même des courbes $v = v_0$ entre elles.

8. *Une courbe $u = u_0$ et une courbe $v = v_0$ de l'autre système sont sur une même surface d'ordre* **n**, dont elles constituent l'intersection complète avec la surface de Kummer.

Pour le démontrer analytiquement considérons la fonction entière $\varphi(u)$ qui satisfait aux relations

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi\left(u+\dfrac{2\pi i}{n}\right)=\Phi(u), \\ \Phi(u+a) \quad =\Phi(u)\,e^{-2nu-na}, \end{cases}$$

on trouve aisément, par la méthode des coefficients indéterminés, en reproduisant un calcul connu, qu'elle est de la forme

$$\Phi(u)=\lambda_0\,\Phi_0(u)+\lambda_1\,\Phi_1(u),$$

les λ étant des constantes arbitraires, et étant posé

$$\Phi_0(u)=\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{2n\mu u+n\mu^2 a},$$

$$\Phi_1(u)=\sum e^{2n\left(\mu+\frac{1}{2}\right)u+n\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 a}.$$

D'ailleurs Φ_0 et Φ_1, et par suite Φ, sont évidemment des fonctions paires de u. De plus $\Phi(u)$, d'après (8), étant une fonction thêta d'ordre 2, a deux zéros, de la forme u_0 et $-u_0$, dans le parallélogramme des périodes $\left(\dfrac{2\pi i}{n}, a\right)$.

Soit de même $\psi(v)$ la fonction entière la plus générale de v satisfaisant aux relations

$$(9)\qquad \begin{cases} \psi\left(v+\dfrac{2\pi i}{n}\right)=\psi(v), \\ \psi(v+c) \quad =\psi(v)\,e^{-2nv-nc}. \end{cases}$$

La fonction paire de u, v, $\Phi(u)$, $\psi(v)$, que nous désignerons par $F(u, v)$, vérifie les équations :

$$(10)\qquad \begin{cases} F(u+2\pi i, v) \quad = F(u, v+2\pi i) = F(u, v), \\ F\left(u+a, v+\dfrac{2\pi i}{n}\right) = F(u, v)\,e^{-2nu-na}, \\ F\left(u+\dfrac{2\pi i}{n}, v+c\right) = F(u, v)\,e^{-2nv-nc}. \end{cases}$$

Or nous avons fait voir *d'une manière générale* [1] que sur une surface

---

[1] *Journal de Math.*, 4e série, t. IX, p. 53.

de Kummer dont les coordonnées d'un point sont des fonctions entières $x_h(u, v)$, vérifiant les équations (1), on obtient l'équation de la courbe complète commune à la surface et à une surface algébrique d'ordre n, en égalant à zéro une fonction entière, paire, de u, v, vérifiant les relations :

$$(11)\quad \begin{cases} \Theta(u+2\pi i, v) \quad = \Theta(u, v+2\pi i) = \Theta(u, v), \\ \Theta(u+a, v+b) = \Theta(u, v)\, e^{-2nu-na}, \\ \Theta(u+b, v+c) = \Theta(u, v)\, e^{-2nv-nc} \end{cases}$$

et réciproquement, la courbe qu'on définit en égalant à zéro une telle fonction est l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre n.

D'après cela, la courbe, représentée sur la surface de Kummer elliptique que nous étudions, par l'équation $F(u, v) = 0$ est l'intersection complète de cette surface et d'une surface d'ordre n.

Or la courbe $F(u, v) = 0$ se décompose en deux courbes $\Phi(u) = 0$ et $\psi(v) = 0$. La fonction $\Phi(u)$ ayant, comme nous l'avons vu, deux zéros, de la forme u_0 et $-u_0$, la courbe $\Phi(u) = 0$ sera une quelconque des courbes d'ordre $2n$, $u = u_0$; de même la courbe $\psi(v) = 0$ sera une quelconque des courbes $v = v_0$, et ces deux courbes sont, comme on vient de l'établir, sur une même surface d'ordre n.

9. On peut donner de ce théorème une autre démonstration, plus géométrique, et qui ne sera pas inutile pour la suite.

Cherchons d'abord en combien de points se coupent les deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$. Les équations de ces deux courbes pouvant s'écrire (n° 7):

$$(12)\quad \begin{cases} u = \pm\, u_0 + 2h\,\pi i + 2k\,\dfrac{\pi i}{n} + la, \\ v = \pm\, v_0 + 2h'\pi i + 2k'\,\dfrac{\pi i}{n} + l'c, \end{cases}$$

les arguments des points communs seront évidemment donnés par les deux équations précédentes, où h, k, ..., l' sont des entiers quelconques. On peut d'abord faire $h = h' = 0$ sans changer le point (u, v); de plus a et $\dfrac{2\pi i}{n}$ formant une période simultanée de u, v, on peut, sans changer le point (12), augmenter à la fois u de $-k'a$ et v de $-2k'\dfrac{\pi i}{n}$;

de même on peut augmenter u et v respectivement de $-2l'\frac{\pi i}{n}$ et de $-l'c$, et l'on a ainsi pour le point (12)

$$u = \pm u_0 + 2p\frac{\pi i}{n} + qa,$$
$$v = \pm v_0,$$

p et q étant deux entiers. Enfin le point ne changeant pas si l'on remplace u, v par $-u$, $-v$, on voit que tous les points cherchés sont compris dans les deux formules

$$\begin{cases} u = u_0 + 2p\frac{\pi i}{n} + qa \\ v = v_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = -u_0 + 2p\frac{\pi i}{n} + qa \\ v = v_0. \end{cases}$$

Dans ces formules, p ne peut prendre que les valeurs 0, 1, ... $(n-1)$, car si l'on augmente p de n unités, on augmente u de $2\pi i$, ce qui redonne le même point. De même on peut augmenter u et v simultanément de na et de $2\pi i$, puisque $\left(a, \frac{2\pi i}{n}\right)$ est une période simultanée; donc si l'on ajoute n unités à q, on retombe sur le même point, et par suite q peut prendre seulement les valeurs 0, 1, ..., $n-1$.

Donc enfin *les points communs aux deux courbes* $u = u_0$ *et* $v = v_0$ *sont au nombre* de n^2, donnés par la première formule, et de n^2, donnés par la seconde, soit un *total de* $2n^2$.

Cela posé, par $2n^2$ points *abitraires* de la courbe *de genre un* et d'ordre $2n$, $u = u_0$, faisons passer une surface d'ordre n, S_n : cette surface contiendra la courbe tout entière, d'après les propriétés des courbes de genre 1. Si l'on fait de plus passer S_n par un point de la courbe d'ordre $2n$, $v = v_0$, comme elle coupe déjà celle-ci en $2n^2$ points, situés sur la courbe $u = u_0$, elle aura en tout $2n^2 + 1$ points communs avec elle et la contiendra dès lors tout entière. Ainsi la condition, pour une surface d'ordre n, de passer par les deux courbes $u = u_0$ et $v = v_0$, équivaut à $2n^2 + 1$ conditions linéaires, et pour démontrer que les deux courbes sont sur une surface d'ordre n, il suffira d'établir qu'on peut faire passer une telle surface par $2n^2 + 1$ points de notre surface de Kummer.

Or le nombre des points, d'une surface d'ordre 4, par lesquels on peut faire passer une surface d'ordre n ne comprenant pas la surface

primitive, est évidemment égal à

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)-1,$$

c'est-à-dire

$$2n^2+1.$$

Le théorème est donc démontré. Réciproquement, il est aisé de voir que *toute* surface d'ordre n menée par une courbe $u=u_0$ coupe en outre la surface de Kummer suivant une courbe du système $v=v_0$.

10. Parmi les courbes $u=u_0$, il en est de particulièrement intéressantes; ce sont celles qui correspondent aux valeurs de u_0 égales à des demi-périodes de u.

Ces courbes ont pour équation :

$$(13) \qquad u=h\pi i+k\frac{\pi i}{n}+l\frac{a}{2} \qquad (h,\ k,\ l=0,\ 1)$$

et paraissent être en nombre égal à 8, puisque h, k, l peuvent prendre chacun deux valeurs, mais nous verrons plus loin qu'elles se réduisent à quatre courbes distinctes.

Soit, pour abréger, $u=\frac{\mathrm{P}}{2}$ l'équation de l'une d'elles, P étant une période de u; désignons par P′ la période correspondante de v.

Soit X le quotient de deux coordonnées $x_k(u, v)$ d'un point de la surface de Kummer (5); on a (n° 5)

$$\mathrm{X}(u,\ v)=\mathrm{X}(-u,\ -v).$$

Pour $u=\frac{\mathrm{P}}{2}$,

$$(14) \qquad \mathrm{X}\left(\frac{\mathrm{P}}{2},\ v\right)=\mathrm{X}\left(-\frac{\mathrm{P}}{2},\ -v\right)=\mathrm{X}\left(\frac{\mathrm{P}}{2},\ -v+\mathrm{P}'\right),$$

puisqu'on peut ajouter à u et v la période P, P′, sans changer X. En d'autres termes, on voit qu'à un point de la courbe $u=\frac{\mathrm{P}}{2}$, correspondent pour v deux arguments, v et $\mathrm{P}'-v$; par suite le degré de cette courbe sera la moitié du degré du cas général, c'est-à-dire $\frac{1}{2}2n$ ou n. Il en résulte également que la courbe $u=\frac{\mathrm{P}}{2}$, *comptée deux fois*, jouira

des propriétés générales des courbes $u = u_0$; par exemple, qu'il existera une surface d'ordre n circonscrite à la surface de Kummer le long de cette courbe, et passant par une courbe arbitraire $v = v_0$.

De plus la courbe $u = \frac{P}{2}$ est *unicursale*. En effet, les coordonnées non homogènes d'un de ses points sont des fonctions doublement périodiques de v qui ne changent pas quand on remplace v par $P' - v$, d'après (14); ce sont donc des fonctions doublement périodiques *paires* de la variable $V = v - \frac{P'}{2}$, et elles s'expriment en fonction rationnelle de φV, ce qui établit la proposition.

11. Démontrons maintenant que les courbes

$$u = h\pi i + k\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2}$$

se réduisent à *quatre*.

On peut, sans changer la courbe, ajouter au second membre la quantité $2\mu\frac{\pi i}{n}$, μ étant entier (n° 7); on a ainsi

$$u = h\pi i + k\frac{\pi i}{n} + 2\mu\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2}.$$

Si n est impair, ou pourra toujours trouver un entier μ tel que $k + 2\mu$ soit un multiple, ρn, de n; et il vient, pour cette valeur de μ :

$$u = (h + \rho)\pi i + l\frac{a}{2}.$$

On a donc seulement quatre courbes :

$$u = 0, \qquad u = \pi i, \qquad u = \frac{a}{2}, \qquad u = \pi i + \frac{a}{2}.$$

Si n est pair, on prendra $\mu = -\frac{n}{2}h$, et il viendra pour u :

$$a = k\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2},$$

d'où quatre courbes seulement :

$$u = 0, \qquad u = \frac{\pi i}{n}, \qquad u = \frac{a}{2}, \qquad u = \frac{\pi i}{n} + \frac{a}{2}.$$

12. De même, parmi les courbes $v = v_0$, figurent *quatre courbes unicursales d'ordre n*, dont les équations se déduisent des précédentes en changeant u en v et a en c.

III. — Surfaces de Kummer elliptiques d'indice impair.

13. Pour les recherches qui suivent, il est nécessaire de distinguer deux cas suivant que l'indice n est impair ou pair; considérons d'abord le cas d'un indice impair :

$$n = 2d + 1.$$

Les seize points doubles de la surface de Kummer ont pour arguments, comme on sait, les seize demi-périodes simultanées; il en résulte que la courbe $u = u_0$ (ou $v = v_0$) qui passe par un point double est nécessairement une des quatre courbes unicursales du système correspondant. Il est intéressant d'étudier la répartition des points doubles sur ces courbes.

Soit par exemple la courbe $u = 0$; un point double de la surface de Kummer ayant pour arguments

$$\begin{cases} u = h\,\pi i + k\dfrac{\pi i}{n} + l\dfrac{a}{2} \\[2ex] v = h'\pi i + k\,\dfrac{c}{2} + l\dfrac{\pi i}{n} \end{cases} \qquad (h, h', k, l = 0, 1)$$

sera sur cette courbe si l'on a :

$$h\pi i + k\frac{\pi i}{n} + l\frac{a}{2} = 2k'\frac{\pi i}{n},$$

car la courbe $u = 0$ est la même que la courbe $u = 2k'\dfrac{\pi i}{n}\cdot$ On en conclut

$$l = 0 \qquad \text{et} \qquad nh + k = 2k'$$

ou, en remplaçant n par sa valeur, $2d + 1$:

$$2(dh - k') + h + k = 0,$$

équation qui donnera pour k' une valeur entière si $h + k$ est pair.

Ainsi les points doubles situés sur la courbe $u = 0$ seront les quatre

points :

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = \quad , \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 0, \\ v = \pi i, \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi i + \dfrac{\pi i}{n}, \\ \dfrac{c}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi i + \dfrac{\pi i}{n}, \\ \pi i + \dfrac{c}{2}. \end{cases}$$

On trouverait de même les arguments des quatre points doubles situés sur chacune des autres courbes d'ordre n, et l'on établit ainsi le tableau suivant :

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$u = 0$	$0, \quad 0$	$0, \quad \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \pi i$	$\pi i, \quad 0$	$\pi i, \quad \pi i$	$\frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}, \quad \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2}, \quad \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$
$u = \frac{a}{2} + \pi i$	$\frac{a}{2} + \pi i, \quad \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \quad \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i + \pi i$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$

Un tableau analogue donne les points doubles par lesquels passent les quatre courbes unicursales d'ordre n, du système $v = v_0$.

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$v = 0$	$0, \quad 0$	$\pi i, \quad 0$	$\frac{a}{2}, \quad \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \quad \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$v = \pi i$	$0, \quad \pi i$	$\pi i, \quad \pi i$	$\frac{a}{2}, \quad \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i, \quad \frac{\pi i}{n}$
$v = \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{2}, \quad \frac{c}{2}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$v = \frac{c}{2} + \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i$	$\frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \pi i$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n}, \quad \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$

Ce nouveau tableau est le même que le premier, où l'on aurait remplacé les lignes par les colonnes.

14. De l'examen de ces deux tableaux résultent des conséquences simples.

Rappelons d'abord que les seize points doubles de la surface de Kummer sont situés six à six sur chacune des seize coniques de la surface, et qu'il est facile de faire le tableau de ces seize groupes de points exprimés à l'aide de leurs arguments.

Cela posé, voici les propositions qu'on peut énoncer, en se reportant d'ailleurs aux propriétés générales des surfaces de Kummer.

I. Les quatre points doubles d'une surface de Kummer d'indice impair, n, situés sur une même courbe unicursale d'ordre n du système $u = u_0$ sont les sommets d'un tétraèdre de Rosenhain, c'est-à-dire d'un tétraèdre dont les faces sont quatre plans singuliers.

Par *plan singulier*, on entend le plan d'une des seize coniques de la surface de Kummer.

II. Les seize points doubles se répartissent ainsi, par rapport aux quatre courbes unicursales du système $u = u_0$ en quatre tétraèdres de Rosenhain, qui n'ont deux à deux aucun sommet et aucune face communs.

III. Des propositions pareilles s'appliquent aux quatre courbes unicursales du système $v = v_0$.

IV. Un quelconque des quatre tétraèdres de Rosenhain du premier système et un quelconque des quatre tétraèdres du second ont un et un seul sommet commun, la face opposée à ce sommet est la même dans les deux tétraèdres; ou encore : Chaque courbe unicursale du système $u = u_0$ coupe chaque courbe unicursale du système $v = v_0$ en un point double de la surface de Kummer; les trois autres points doubles situés sur la première courbe et les trois autres points doubles situés sur la seconde sont sur une même conique de la surface de Kummer.

V. D'après cela, on peut faire correspondre à un point double de la surface de Kummer le plan singulier qui est la face commune des deux tétraèdres de Rosenhain dont ce point est le sommet dans les deux systèmes : chaque point double et le plan singulier correspondant sont polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une des dix quadriques fondamentales, c'est-à-dire à une des quadriques par rapport auxquelles la surface de Kummer est sa propre réciproque.

15. Les formules du n° 9 permettent de déterminer les points de la surface de Kummer où se rencontrent deux courbes unicursales

d'ordre n de système différent. Considérons par exemple les courbes $u = 0$ et $v = 0$; d'après le n° 9, leurs points communs sont donnés par la formule *unique*

$$\begin{cases} u = 2p\dfrac{\pi i}{n} + qa, \\ v = 0, \end{cases}$$

où p et q prennent les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$.

Il semble qu'on obtienne ainsi n^2 points, mais les deux points

$$\begin{matrix} u = 2p\dfrac{\pi i}{n} + qa \\ v = 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} u' = 2(n-p)\dfrac{\pi i}{n} + (n-q)a, \\ v' = 0 \end{matrix}$$

coïncident, car les sommes $(u + u')$ et $(v + v')$, c'est-à-dire $2\pi i + na$ et 0 forment une période simultanée de u et v. D'ailleurs les nombres p et $n-p$, q et $n-q$ ne peuvent être simultanément égaux, puisque n est impair; par suite — à l'exception du point $u = 0$, $v = 0$ — les points donnés par la formule précédente coïncident deux à deux, et leur nombre total est

$$1 + \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Ainsi : deux courbes unicursales d'ordre n, de système différent, se coupent en un point singulier de la surface de Kummer et ont en outre $\dfrac{n^2-1}{2}$ points communs.

16. Il en résulte sans difficulté, par un raisonnement semblable à celui du n° 9, que *l'on peut faire passer par les deux courbes unicursales une surface d'ordre* $\dfrac{n+1}{2}$, qui ne comprend pas la surface de Kummer, et qui par suite coupe encore cette dernière suivant une courbe d'ordre $2(n+1) - 2n$, c'est-à-dire suivant une *conique*. Cette conique est celle qui contient les points doubles situés sur les deux courbes considérées, en dehors de celui qui leur est commun (n° 14) : pour le vérifier, observons en effet que la conique précédente est rencontrée par chacune des deux courbes d'ordre n en trois points singuliers et en $\dfrac{n-3}{2}$ autres points, car toute ligne tracée sur la surface de Kummer *touche* nécessairement un plan singulier en tous les points non singuliers où elle le rencontre. On voit ainsi que la conique considérée a, sur la surface

d'ordre $\frac{n+1}{2}$, un nombre de points au moins égal à $2\left[3+\frac{n-3}{2}\right]$, c'est à-dire $n+3$, et par suite elle est tout entière sur la surface.

On aurait pu démontrer ce théorème analytiquement, en suivant une marche analogue à celle du n° 8.

17. Les résultats qui précèdent suffisent pour établir géométriquement les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir une surface de Kummer pour être une surface elliptique d'indice impair.

Ces conditions, en effet, lorsque l'indice est donné, se réduisent évidemment à une seule, qui, au point de vue analytique, constitue une relation entre les périodes a, b, c des fonctions hyperelliptiques liées à la surface. Or ces fonctions sont celles qu'on obtient en appliquant le problème de l'inversion de Jacobi aux intégrales abéliennes de première espèce et de genre 2 qui appartiennent à une quelconque des sections de la surface par un plan tangent; par suite, au point de vue géométrique, la condition cherchée se traduira par une relation entre les trois *modules* d'une de ces sections. Si l'on observe maintenant que les modules d'une courbe du quatrième ordre à un point double sont les rapports anharmoniques des six tangentes (prises quatre à quatre), qu'on peut mener à la courbe par le point double, et que ces rapports sont égaux à ceux de six points singuliers de la surface de Kummer situés sur une même conique ([1]), on voit que la question est ramenée au problème suivant :

Trouver, sur une surface de Kummer elliptique, d'indice donné, la relation projective qui lie les positions des six points doubles de cette surface situés sur une même conique.

En même temps nous aurons trouvé la condition qui doit lier les modules d'une courbe du quatrième ordre à un point double pour que cette courbe ait une (et par suite aussi une seconde) intégrale abélienne de première espèce réductible aux intégrales elliptiques.

18. Pour rendre plus claire la méthode que nous allons employer, nous l'appliquerons tout d'abord au cas particulier de $n=3$.

([1]) *Voir* par exemple *Journal de Math.*, 4e série, t. IX, p. 114.

D'après la théorie générale, les courbes $u = u_0$ sont des courbes d'ordre 6, c'est-à-dire des *sextiques*, de genre 1, parmi lesquelles figurent *quatre cubiques* gauches.

Soit C une quelconque des seize coniques de la surface de Kummer, par exemple celle qui passe par les six points doubles ayant pour arguments u, v :

$$o, \quad \pi i; \quad \pi i + \frac{\pi i}{3}, \quad \frac{c}{2}; \quad \pi i + \frac{\pi i}{3}, \quad \frac{c}{2} + \pi i; \quad \pi i, \quad o;$$

$$\frac{a}{2}, \quad \pi i + \frac{\pi i}{3}; \quad \frac{a}{2} + \pi i, \quad \pi i + \frac{\pi i}{3},$$

que nous désignerons respectivement, suivant l'ordre ci-dessus, par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_6.$$

Le plan de la conique C touche en trois points chacune des sextiques $u = u_0$, puisque ces sextiques sont tracées sur la surface de Kummer et que le plan considéré est tangent à la surface tout le long de la conique; les sextiques $u = u_0$ rencontrent donc chacune en *trois* points la conique C. Ces groupes de trois points, en nombre simplement infini, déterminent sur C une *involution*, puisque par un point de la surface de Kummer ne passe qu'une seule sextique. Un des groupes de l'involution est formé par les trois points α_1, α_2, α_3, qui sont sur la cubique $u = o$; la cubique $u = \pi i$ passe par le point α_4 et rencontre la conique C en un autre point, m_4 : le groupe de l'involution auquel appartient α_4 est formé de ce point et du point m_4 compté *deux fois*, puisque l'on obtient une sextique de la famille $u = u_0$ en comptant *deux fois* la cubique $u = \pi i$ (n° 10). De même les groupes de l'involution auxquels appartiennent les points α_5 et α_6 comprennent respectivement un point de la conique compté deux fois.

En résumé, il existe sur la conique C une involution de groupes de trois points, en nombre simplement infini, involution qui dépend par suite de *quatre* paramètres et qui jouit des propriétés suivantes :

1° Les trois points singuliers α_1, α_2, α_3 forment un groupe de l'involution,

2° Les deux points qui forment un groupe avec chacun des points singuliers α_4, α_5, α_6 sont confondus.

Ces conditions établissent, entre les *quatre* paramètres dont l'involu-

tion dépend, $2+3$, c'est-à-dire *cinq* relations; elles impliquent donc une relation entre les positions des points $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ sur la conique C, et donnent ainsi la solution du problème que nous nous étions proposé.

19. On peut, dans le cas particulier actuel, donner à cette solution une forme élégante.

Sur la conique C, les droites qui joignent deux points appartenant à un même groupe de l'involution enveloppent une conique C' puisque par un point de C ne passent que deux de ces droites. La conique C' touche, d'après les propriétés qui précèdent, les trois côtés du triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$; de plus les deux tangentes menées à C' par chacun des points α_4, α_5, α_6 coïncident, ce qui prouve que C' passe par ces trois points. Ainsi, il existe une conique inscrite au triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et passant par les points α_4, α_5, α_6. Inversement, s'il existe une telle conique C', nous savons, par les théorèmes de Poncelet, qu'il y aura une infinité simple de triangles inscrits à C et circonscrits à C', et les sommets de ces triangles détermineront sur C une involution qui jouira évidemment des propriétés indiquées au n° 18.

Donc enfin :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Kummer soit elliptique et d'indice 3 s'exprime ainsi, sous forme géométrique : les six points doubles situés sur une des coniques de la surface doivent se répartir en deux groupes de trois points chacun, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au triangle formé par les trois premiers points et circonscrite au triangle formé par les trois derniers.

20. *Remarque.* — Au lieu des courbes $u=u_0$, on aurait pu considérer les courbes $v=v_0$. La cubique $v=0$ passant par les points α_4, α_5, α_6, on aurait établi de même qu'il existe une conique inscrite au triangle $\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ et circonscrite au triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, d'où l'on déduit ce théorème de géométrie élémentaire :

Étant donnés sur une conique deux groupes de trois points formant deux triangles, s'il existe une conique inscrite au premier triangle et circonscrite au second, il existera une autre conique inscrite au second triangle et circonscrite au premier.

Sous une autre forme :

Chaque point d'intersection du cercle circonscrit à un triangle avec un

des cercles inscrit ou exinscrit est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle.

21. Il est aisé de donner une forme analytique à la condition trouvée au n° 19.

Supposons en effet que les coordonnées homogènes d'un point de la conique C soient exprimées en fonction quadratique et entière d'un paramètre, t; on peut toujours admettre que les valeurs du paramètre qui correspondent aux trois points α_1, α_2, α_3 sont respectivement o, 1, ∞, et nous désignerons par λ^2, μ^2, ν^2 celles qui correspondent aux points α_4, α_5, α_6. Nous aurons à exprimer, en désignant par λ', μ', ν' trois constantes, que les racines des trois polynomes du troisième ordre

$$(t-\lambda^2)(t-\lambda')^2,$$
$$(t-\mu^2)(t-\mu')^2,$$
$$(t-\nu^2)(t-\nu')^2$$

sont trois groupes d'une involution simplement infinie, d'ordre trois, dont un des groupes est formé par les valeurs o, 1, ∞. En d'autres termes il suffira d'écrire que les différences des trois polynomes précédents, pris deux à deux, sont divisibles par $t(t-1)$, ce qui donne les relations :

$$\lambda^2\lambda'^2=\mu^2\mu'^2=\nu^2\nu'^2,$$
$$(1-\lambda^2)(1-\lambda')^2=(1-\mu^2)(1-\mu')^2=(1-\nu^2)(1-\nu')^2,$$

d'où

$$\lambda\lambda'=\mu\mu'=\nu\nu'=\rho$$

et

$$(15)\qquad \sqrt{1-\lambda^2}\left(1-\frac{\rho}{\lambda}\right)=\sqrt{1-\mu^2}\left(1-\frac{\rho}{\mu}\right)=\sqrt{1-\nu^2}\left(1-\frac{\rho}{\nu}\right).$$

L'élimination de ρ entre les équations (15) donne la condition cherchée qui peut s'écrire :

$$(16)\quad (\lambda+\mu)^2(\lambda+\nu)^2(\mu+\nu)^2=4\lambda\mu\nu(1+\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu)(\lambda+\mu+\nu+\lambda\mu\nu).$$

On peut donner une autre forme à cette conclusion.

Le rapport anharmonique de quatre points situés sur une conique est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes du paramètre t; donc λ^2, μ^2 et ν^2 sont les rapports anharmoniques des trois groupes de points α_4, α_1, α_2, α_3; α_5, α_1, α_2, α_3; α_6, α_1, α_2, α_3. Ces rap-

ports anharmoniques sont aussi, d'après une propriété rappelée au n° 17, les modules de la courbe du quatrième ordre, de genre 2, qui est liée à la surface de Kummer considérée; on peut donc dire que cette courbe est représentable point par point sur la courbe de genre 2

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda^2)(x-\mu^2)(x-\nu^2) \tag{17}$$

qui a les mêmes modules.

Donc enfin la courbe (17) aura une intégrale abélienne de première espèce (et par suite une seconde) réductible aux intégrales elliptiques, avec l'indice 3, si la condition (16) est satisfaite.

22. Si, du cas où l'indice est égal à 3, nous passons à celui d'un indice impair quelconque, nous établissons, par les raisonnements du n° 18, les propositions suivantes.

Soient toujours $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_6$ les six points doubles de la surface de Kummer situés sur une même conique [1]; les courbes d'ordre $2n$, $u=$ const. déterminent sur cette conique une involution, formée par des groupes de n points en nombre simplement infini, et telle :

1° Que les points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ appartiennent à un même groupe et que les $n-3$ autres points de ce groupe soient deux à deux confondus;

2° Que les groupes auxquels appartiennent respectivement les points $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ comprennent en outre $n-1$ points deux à deux confondus.

Ces propriétés établissent une relation entre les positions des six points α. En effet, une involution simplement infinie, d'ordre n, dépend de $2n-2$ paramètres; les conditions précédentes établissent entre ces paramètres

$$2 + \frac{n-3}{2} + 3\,\frac{n-1}{2},$$

c'est-à-dire $2n-1$ relations, et par suite il est nécessaire, pour que l'involution existe, que les points α soient liés par *une* relation, qui est précisément la condition cherchée.

---

(1) Ces points sont, par exemple, dans l'ordre indiqué, ceux qui ont pour arguments :

$$0, \pi i;\quad \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2};\quad \pi i + \frac{\pi i}{n}, \frac{c}{2} + \pi i;\quad \pi i, 0;\quad \frac{a}{2}, \pi i + \frac{\pi i}{n};\quad + \frac{a}{2} + \pi i, \pi i + \frac{\pi i}{n}.$$

Voici la marche qu'on pourrait suivre pour former analytiquement cette condition. Admettons, comme au numéro précédent, que les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ aient respectivement pour argument, sur leur conique, les quantités, o, 1, ∞, λ^2, μ^2, ν^2, il faudra exprimer, en désignant par λ_i, μ_i, ν_i, ρ_i des constantes, que les quatre polynomes

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= (t-\lambda^2)(t-\lambda_1)^2\ldots\left(t-\lambda_{\frac{n-1}{2}}\right)^2,\\
f_2(t) &= (t-\mu^2)(t-\mu_1)^2\ldots\left(t-\mu_{\frac{n-1}{2}}\right)^2,\\
f_3(t) &= (t-\nu^2)(t-\nu_1)^2\ldots\left(t-\nu_{\frac{n-1}{2}}\right)^2,\\
f_4(t) &= t(t-1)(t-\rho_1)^2\ldots\left(t-\rho_{\frac{n-3}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

sont en involution, c'est-à-dire que deux d'entre eux sont fonctions linéaires et homogènes des deux autres.

Il est aisé de voir que ces conditions reviennent aux suivantes :

1° On aura

$$(18)\qquad \begin{cases} f_1(0)=f_2(0)=f_3(0),\\ f_1(1)=f_2(1)=f_3(1); \end{cases}$$

2° On exprimera qu'on a, quel que soit t,

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t)\\ \lambda^2+2\Sigma\lambda_i & \mu^2+2\Sigma\mu_i & \nu^2+2\Sigma\nu_i\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

3° La différence $f_1(t)-f_2(t)$, débarrassée du facteur $t(t-1)$, sera un carré parfait.

On obtient ainsi, comme on le voit sans difficulté, entre les $3\dfrac{n-1}{2}$ coefficients λ_i, μ_i, ν_i, un nombre de relations égal à

$$4+(n-2)+\frac{n-3}{2},$$

c'est-à-dire $3\dfrac{n-1}{2}+1$, et l'élimination des λ_i, μ_i, ν_i entre ces relations donnera l'équation algébrique cherchée entre λ^2, μ^2, ν^2.

23. On peut donner quelques propriétés de cette équation, que nous désignerons par $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)=0$. Les quantités λ^2, μ^2, ν^2 sont en effet

les rapports anharmoniques des points α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, de telle sorte qu'on ait, en désignant par α_i le paramètre unicursal qui correspond au point α_i,

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3} : \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3},$$

avec des expressions semblables pour μ^2 et ν^2 en remplaçant α_4 par α_5 et α_6. Or la condition géométrique qu'exprime l'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ dépend uniquement d'une répartition des points α_i en deux groupes de trois et nullement de l'ordre des points dans chaque groupe. Cette équation ne change donc pas si l'on permute entre eux α_1, α_2, α_3 ou α_4, α_5, α_6. Permuter α_4 et α_5 revient à permuter λ^2 et μ^2; donc *l'équation* $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$ *est symétrique* par rapport à λ^2, μ^2, ν^2 : ce fait n'était nullement évident; nous verrons qu'il ne se reproduit pas dans le cas d'un indice pair.

Permuter α_1, α_2, α_3 revient à remplacer le rapport anharmonique λ^2 par une des cinq autres valeurs bien connues de ce rapport, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{\lambda^2}, \quad 1 - \lambda^2, \quad \frac{1}{1 - \lambda^2}, \quad \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}, \quad \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}.$$

Donc *l'équation* $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2) = 0$ *ne change pas si l'on y remplace simultanément* λ^2, μ^2, ν^2 *par* $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, $\frac{1}{\nu^2}$, *ou par* $1 - \lambda^2$, $1 - \mu^2$, $1 - \nu^2$, et par toutes les valeurs qui dérivent de ces deux transformations appliquées successivement dans un ordre quelconque.

L'équation $F(\lambda^2, \mu^2, \nu^2,) = 0$ *se décompose en quatre équations distinctes en* λ, μ, ν : reprenons en effet les premières relations (18),

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0);$$

elles s'écrivent

$$\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots = \quad \mu^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \ldots = \quad \nu^2 \nu_1^2 \nu_2^2 \ldots,$$

d'où

$$\lambda\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots = \pm \mu\ \mu_1 \beta_3 \ldots = \pm \nu\ \nu_1 \nu_2 \ldots.$$

Chaque groupement des signes + et — conduit à une équation finale en λ, μ, ν : on passe l'une de ces équations aux trois autres en changeant séparément ou simultanément les signes de μ et de ν.

Enfin *chacune des quatre équations* ainsi obtenues *se décompose en quatre autres* si l'on prend pour variables, à la place de λ, μ, ν, les

quantités

$$L=\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}},\qquad M=\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}},\qquad N=\sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}}.$$

Les secondes relations (18), $f_1(1)=f_2(1)=f_3(1)$ s'écrivent en effet

$$(1-\lambda^2)[(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots]^2=(1-\mu^2)[(1-\mu_1)(1-\mu_2)\ldots]^2$$
$$=(1-\nu^2)[(1-\nu_1)(1-\nu_2)\ldots]^2,$$

d'où

$$\frac{2L}{1+L^2}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots=\pm\frac{2M}{1+M^2}(1-\mu_1)(1-\mu_2)\ldots$$
$$=\pm\frac{2N}{1+N^2}(1-\nu_1)(1-\nu_2)\ldots,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

24. *Remarque.* — Si, plus généralement, on considère la courbe de genre 2

$$y^2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_6),$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques, avec un indice impair, se décomposera, à cause du rôle géométrique particulier que jouent trois des points α_i, en autant d'équations distinctes qu'il y a de combinaisons trois à trois des six quantités α_i; toutefois en vertu de la remarque du n° 20 généralisée, à deux combinaisons telles que α_1, α_2, α_3 et α_4, α_5, α_6 correspondra une seule et même équation. Ainsi la condition nécessaire et suffisante cherchée se décompose en *dix* équations différentes, rationnelles par rapport aux quantités α_i, et chacune de ces équations se décompose en seize autres si l'on fait les changements de variables indiqués au numéro précédent.

25. Le calcul permet aisément de vérifier et de compléter les résultats auxquels nous a conduit la géométrie. Soit en effet la courbe

$$y^2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_6);$$

nous supposons qu'une involution d'ordre n, définie par l'équation

$$(19)\qquad f(x)-\theta\,\Phi(x)=0,$$

où $f(x)$ et $\Phi(x)$ sont des polynomes d'ordre (impair n et où θ est un paramètre variable, possède les quatre groupes remarquables indiqués

au n° 22; soient $\theta_0, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ les valeurs du paramètre qui correspondent à ces groupes, on a identiquement, par hypothèse,

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x)-\theta_0\,\Phi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\,\psi_0^2(x),\\ f(x)-\theta_4\,\Phi(x)=(x-\alpha_4)\,\psi_4^2(x),\\ f(x)-\theta_5\,\Phi(x)=(x-\alpha_5)\,\psi_5^2(x),\\ f(x)-\theta_6\,\Phi(x)=(x-\alpha_6)\,\psi_6^2(x),\end{array}\right.$$

$\psi_0, \ldots, \psi_6$ étant des polynomes en x, dont le premier est d'ordre $\frac{n-3}{2}$ et les trois autres d'ordre $\frac{n-1}{2}$.

Les points doubles de l'involution (19) sont donnés par les racines de l'équation, d'ordre $2n-2$,

$$(21)\qquad f'(x)\,\Phi(x)-f(x)\,\Phi'(x)=0.$$

Les racines des équations $\psi_0=0$, $\psi_4=0$, $\psi_5=0$, $\psi_6=0$ sont évidemment des points doubles de l'involution; leur nombre total étant $\frac{n-3}{2}+\frac{2-1}{n}$, c'est-à-dire $2n-3$, l'équation (21), en dehors de ces racines, n'aura qu'une seule racine nouvelle, ω, et il viendra identiquement

$$(22)\qquad f'(x)\,\Phi(x)-f(x)\,\Phi'(x)=h\,\psi_0\psi_4\psi_5\psi_6(x-\omega),$$

h étant une constante.

Cela posé, si dans la différentielle elliptique

$$\frac{d\theta}{\sqrt{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_4)(\theta-\theta_5)(\theta-\theta_6)}},$$

on remplace la variable θ par la variable x, liée à θ par la relation (19), caractéristique de l'involution

$$f(x)-\theta\,\Phi(x)=0,$$

il vient

$$\begin{aligned}&\frac{d\theta}{\sqrt{(\theta-\theta_0)(\theta-\theta_4)(\theta-\theta_5)(\theta-\theta_6)}}\\ &\qquad=\frac{dx[f'(x)\,\Phi(x)-f(x)\,\Phi'(x)]}{\sqrt{[f(x)-\theta_0\,\Phi(x)][f(x)-\theta_4\,\Phi(x)]\ldots[f(x)-\theta_6\,\Phi(x)]}}\end{aligned}$$

et, en vertu des identités (20) et (22), le second membre devient

$$(23)\qquad \frac{h(x-\omega)\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}}.$$

On voit donc bien que la différentielle hyperelliptique (23) est réductible à une différentielle elliptique par la substitution (19), lorsqu'on admet l'existence de l'involution définie géométriquement au n° 22 ([1]). On aurait pu d'ailleurs établir directement *par le calcul* que l'existence d'une telle involution est nécessaire pour qu'il existe une intégrale réductible.

IV. — Surfaces de Kummer elliptiques d'indice pair.

26. On étudie sans difficulté, comme au n° 13, la répartition des points doubles d'une surface de Kummer elliptique d'indice, n, sur les quatre courbes unicursales d'ordre n comprises dans la série $u = \text{const.}$, et l'on arrive au tableau suivant :

Courbes.	Arguments u, v des points doubles situés sur les courbes.			
$u = 0$	$0,\ 0$	$0,\ \pi i$	$\pi i,\ 0$	$\pi i,\ \pi i$
$u = \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2},\ \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i,\ \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2},\ \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i,\ \pi i + \frac{\pi i}{n}$
$u = \frac{\pi i}{n}$	$\frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2}$	$\pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2}$	$\frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i$	$\pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i$
$u = \frac{\pi i}{n} + \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$	$\frac{a}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n},\ \frac{c}{2} + \pi i + \frac{\pi i}{n}$

Pour les courbes unicursales du système $v = v_0$, on a un tableau analogue qu'il est inutile d'écrire, car les courbes $v = 0$, $v = \frac{c}{2}$, $v = \frac{\pi i}{n}$, $v = \frac{\pi i}{n} + \frac{c}{2}$ passent respectivement par les quatre points doubles que les courbes $u = 0$, $u = \frac{\pi i}{n}$, $u = \frac{a}{2}$, $u = \frac{\pi i}{n} + \frac{a}{2}$.

De ces remarques résultent les conséquences suivantes.

I. Sur une surface de Kummer elliptique d'indice pair, n, chacune des quatre courbes unicursales d'ordre n du système $u = u_0$ passe par quatre points doubles, qui sont également situés sur une des quatre

([1]) Le degré de la substitution par rapport à x est égal à l'indice, n, comme l'a fait voir M. Picard.

courbes unicursales d'ordre n du système $v = v_0$. Ces quatre points doubles sont les sommets d'un tétraèdre de Göpel, c'est-à-dire d'un tétraèdre dont aucune des faces n'est un plan singulier de la surface.

Une courbe unicursale du système $u = u_0$ et la courbe unicursale du système $v = v_0$ qui passe par les quatre mêmes points doubles seront dites associées.

II. Les seize points doubles de la surface de Kummer se répartissent ainsi, par rapport aux quatre courbes unicursales d'un système, en quatre tétraèdres de Göpel qui n'ont deux à deux aucun sommet commun.

III. Les six points doubles de la surface situés dans un quelconque des seize plans singuliers se partagent en trois couples, les deux points de chaque couple étant sur une même courbe unicursale du système $u = u_0$, et la quatrième courbe unicursale du système ne passe par aucun des six points doubles considérés.

27. On établit également, comme aux n°s 15 et 16 que :

Chaque courbe unicursale d'ordre n d'un système coupe la courbe associée de l'autre système en quatre points doubles et en $\frac{n^2-4}{2}$ points simples de la surface; elle coupe les trois autres courbes unicursales du second système en $\frac{n^2}{2}$ points simples.

Deux courbes unicursales d'ordre n associées sont sur une surface d'ordre $\frac{n}{2}$, dont elles constituent toute l'intersection avec la surface de Kummer.

28. Soit, comme au n° 22, C une des coniques de la surface de Kummer et $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les six points doubles situés sur cette courbe. Les courbes $u = u_0$ déterminent sur la conique une involution formée par des groupes de n points en nombre simplement infini, et aux quatre courbes unicursales d'ordre n comprises dans le système $u = u_0$ correspondent quatre groupes remarquables :

1° Un groupe comprenant deux des six points singuliers α_1 et α_2 par exemple, et outre $\frac{n-2}{2}$ points comptés chacun deux fois.

2° et 3° Deux groupes analogues comprenant chacun deux points singuliers, par exemple α_3 et α_4, α_5 et α_6.

4° Un groupe composé de $\frac{n}{2}$ points comptés chacun deux fois.

L'existence, sur la conique C, d'une involution jouissant de ces propriétés établit une relation entre les positions des six points α_i. En effet, une involution, simplement infinie, d'ordre n dépend de $2n-2$ paramètres et les quatre propriétés précédentes établissent entre ces paramètres $3\left[1+\frac{n-2}{2}\right]+\frac{n}{2}$, c'est-à-dire $2n-1$ équations : il est donc nécessaire que les points α soient liés par une relation.

On est ainsi conduit à une méthode de calcul exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe

$$y^2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_6)$$

ait une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques avec un indice pair.

Cette condition se décomposera en autant d'équations distinctes qu'il y a de manières de partager les six quantités $a_1, \ldots, a_6$, en trois groupes de deux, c'est-à-dire en quinze équations.

Pour former l'équation qui correspond à un groupement donné, par exemple α_1 et α_2, α_3 et α_4, α_5 et α_6, on écrira, en désignant par P, Q, R des polynomes en x, d'ordre $\frac{n}{2}-1$, où le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité :

1° Qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les trois polynomes d'ordre n,

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)P^2,$$
$$(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)Q^2,$$
$$(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)R^2,$$

et qui donne, entre les coefficients de P, Q, R et les α, $n-1$ relations;

2° Qu'une combinaison linéaire des deux premiers polynomes d'ordre n est un carré parfait, ce qui donne $\frac{n}{2}-1$ relations.

On a en tout $\frac{3n}{2}-2$ relations, entre lesquelles on éliminera les $3\left(\frac{n}{2}-1\right)$ coefficients de P, Q, R pour avoir l'équation cherchée entre les α.

La méthode de calcul n° 25 permettrait de vérifier ces résultats et donnerait l'intégrale réductible; le degré de la substitution qui permet de réduire cette intégrale serait encore égal à n. Nous n'insistons pas sur tous ces points pour éviter des répétitions ([1]).

29. Le cas particulier où n est égal à 2 correspond au *tétraédroïde* de M. Cayley. En ce cas en effet, d'après les résultats du n° 26, il y a, sur la surface huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans : dans chacun de ces plans les points communs à deux coniques sont des points doubles de la surface. Ces propriétés caractérisent le tétraédroïde.

Pour qu'une surface de Kummer soit un tétraédroïde, il faut en vertu des raisonnements du n° 28, que les six points singuliers α_i, situés sur une des coniques ordinaires de la surface, soient liés à une involution formée de groupes de deux points de la conique de telle façon : 1° que trois groupes de l'involution soient formés respectivement par deux des points α_i; 2° qu'un des groupes de l'involution soit formé par un point compté deux fois. Cette dernière condition est remplie d'elle-même, puisqu'une involution de groupes de deux points a toujours deux points doubles. Donc enfin la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface de Kummer soit un tétraédroïde est que les six points doubles de la surface, situés sur une des seize coniques, forment trois couples en involution, ou encore soient les sommets d'un hexagone de Brianchon. C'est la condition trouvée par M. Klein (*Math. Annalen*, t. II).

30. Les conditions générales du n° 28 appliquées au cas particulier de $n = 4$ conduisent aisément à la proposition suivante.

Soit C une conique; dans son plan on considère un système quelconque de coniques bitangentes entre elles en deux mêmes points; parmi ces coniques quatre touchent la conique C en des points q_1, q_2, q_3, q_4 et la coupent en outre chacune en deux autres points, p_1 et p'_1, ..., p_4 et p'_4. Si l'on choisit arbitrairement trois des quatre couples p_i et p'_i on obtient, sur la conique C, six points qui forment la configuration la plus générale des six points doubles d'une surface de

[1] On verrait comme au n° 25 que la substitution qui permet de réduire l'intégrale est identique à la relation qui définit l'involution sur la conique C.

Kummer elliptique d'indice 4, situés sur une même conique de cette surface.

Analytiquement, si l'on désigne par p_i et q_i les arguments rationnels des points p_i et q_i sur la conique C, on peut dire que l'intégrale

$$\int \frac{(x-q_1)\,dx}{\sqrt{(x-p_2)(x-p'_2)(x-p_3)(x-p'_3)(x-p_4)(x-p'_4)}}$$

est réductible aux intégrales elliptiques, par une transformation d'ordre quatre, ainsi que les intégrales qu'on obtient en permutant dans l'intégrale précédente les indices 1, 2, 3, 4.

V. — Propriétés de la surface de Kummer elliptique d'indice trois.

31. Nous réunirons ici, relativement à la surface de Kummer d'indice 3, quelques propositions qui sont des répétitions ou des conséquences des théorèmes démontrés plus haut.

Une surface de Kummer est une surface elliptique d'indice 3 lorsque les six points doubles situés sur une de ses seize coniques peuvent se répartir en deux groupes de trois points, de telle sorte qu'il existe une conique inscrite au triangle formé par les points du premier groupe et circonscrite au triangle formé par les points du second.

La même propriété appartient aux quinze autres coniques de la surface.

On peut tracer sur la surface deux séries, simplement infinie chacune, de sextiques gauches de genre 1 ; une sextique quelconque de la première série et une sextique quelconque de la seconde sont sur une surface du troisième ordre et se coupent en dix-huit points.

Chacune des sextiques a trois sécantes quadruples : les sécantes quadruples des sextiques d'une série forment l'ensemble des génératrices rectilignes d'un même système d'une quadrique; les sécantes quadruples des sextiques de l'autre série forment l'ensemble des génératrices de l'autre système, sur la même quadrique.

Cette quadrique est une des dix quadriques fondamentales de la surface de Kummer, c'est-à-dire une des quadriques par rapport auxquelles la surface est sa propre polaire réciproque.

Les sextiques d'une série sont coupées par un plan tangent quelconque de la quadrique précédente en six points situés sur une conique :

celles de ces coniques qui sont dans un même plan tangent de la quadrique ont quatre points communs, dont deux sont situés sur la surface de Kummer.

Réciproquement, tout plan qui coupe une sextique de l'une ou de l'autre série en six points situés sur une conique est tangent à la quadrique fondamentale.

Parmi les sextiques d'une série figurent quatre cubiques gauches; chacune de ces cubiques passe par quatre points doubles de la surface de Kummer, qui sont les sommets d'un tétraèdre dont les faces sont des plans singuliers de la surface.

Les seize points doubles se répartissent ainsi, par rapport aux quatre cubiques d'une même série, en quatre tétraèdres n'ayant deux à deux aucun sommet et aucune face communs.

Un quelconque des tétraèdres de la première série et un quelconque des tétraèdres de la seconde ont un sommet commun; la face opposée à ce sommet est la même dans les deux tétraèdres : ce sommet et cette face sont polaires réciproques par rapport à la quadrique considérée plus haut.

Deux cubiques de séries différentes sont sur une quadrique qui coupe en outre la surface de Kummer suivant une conique; inversement par chaque conique de la surface passe par une quadrique contenant deux cubiques gauches.

VI. — Des courbes tracées sur les surfaces de Kummer elliptiques.

32. Sur une surface de Kummer générale, pour laquelle les fonctions coordonnées $x_h(u, v)$ satisfont aux relations (1), on obtient toutes les courbes algébriques en égalant à zéro une fonction thêta formée avec les mêmes paires de périodes que les $x_h(u, v)$, c'est-à-dire une fonction uniforme et entière vérifiant les relations

$$\begin{aligned} \Theta(u+2\pi i, v) &= \Theta(u, v+2\pi i) = \Theta(u, v), \\ \Theta(u+a, v+b) &= \Theta(u, v)\, e^{-mu+\alpha}, \\ \Theta(u+b, v+c) &= \Theta(u, v)\, e^{-mv+\beta}, \end{aligned}$$

où α et β sont des constantes quelconques, et m un entier positif qui est *l'ordre* de la fonction thêta (¹).

(¹) *Journ. de Math.*, 4e série, t. IX, p. 44 et 48.

Il est bien clair que, sur une surface de Kummer elliptique, il existe des courbes correspondantes, il n'y a rien a changer, à ce point de vue, à la théorie générale : mais en dehors de ces courbes, les surfaces elliptiques en possèdent d'autres, qui leur sont spéciales (par exemple les courbes $u=$ const.) et qui n'existent pas sur les surfaces ordinaires de Kummer. C'est l'étude de ces courbes *spéciales* que nous allons aborder brièvement.

33. En vertu des équations fondamentales (5), les coordonnées non homogènes, $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ d'un point d'une surface de Kummer elliptique sont des fonctions doublement périodiques séparément par rapport à deux paramètres u et v (aux périodes $2\pi i$) et na pour u, $2\pi i$ et nc pour v); il en résulte qu'on obtiendra l'équation de toute courbe algébrique de la surface en égalant à zéro une fonction doublement périodique séparément par rapport à u, v — et réciproquement. Au lieu d'une fonction doublement périodique, on peut évidemment égaler à zéro une fonction de la forme

$$\Phi(u, v)=\alpha_1 f_1(u) g_1 v)+\alpha_2 f_2(u) g_2(v)+\ldots,$$

où a_1, a_2, ... sont des constantes, $f_1(u)$, $f_2(u)$, ... des fonctions thêta elliptiques de v. Les périodes sont $2\pi i$ et na pour u; $2\pi i$ et nc pour v, et les fonctions f et g satisfont à des relations de la forme

$$\begin{aligned} f_i(u+2\pi i)&=f_i(u), & g_i(v+2\pi i)&=g_i(v),\\ f_i(u+na)&=f_i(u)\,e^{-hu+\gamma}, & g_i(v+nc)&=g_i(v)\,e^{-gv+\gamma'}, \end{aligned}$$

h et k désignent des entiers positifs, γ et δ des constantes quelconques.

La courbe $\Phi(u, v)=0$ est, comme on l'a dit, une courbe algébrique de la surface de Kummer (5); sur cette surface, le point u, v est d'ailleurs le même que le point $u+a$, $v+\frac{2\pi i}{n}$, ou que le point $u+\frac{2\pi i}{n}$, $v+c$, en vertu des équations (5); il en résulte que la courbe

$$\Phi\left(u+a,\ v+\frac{2\pi i}{n}\right)=0$$

est la même que les courbes

$$\Phi(u, v)=0 \qquad \text{et} \qquad \Phi\left(u+\frac{2\pi i}{n},\ v+c\right)=0.$$

En d'autres termes, si la condition $\Phi(u, v) = 0$ n'entraîne pas les conditions

$$\Phi\left(u+a,\, v+\frac{2\pi i}{n}\right)=0, \qquad \Phi\left(u+\frac{2\pi i}{n},\, v+c\right)=0,$$

l'équation de la courbe correspondante sur la surface de Kummer sera en réalité

$$\begin{aligned}\Phi(u, v)\,\Phi\left(u+a,\, v+\frac{2\pi i}{n}\right)\Phi\left(u+2a,\, v+2\frac{2\pi i}{n}\right)\cdots \\ \times\Phi\left[u+(n-1)a,\, v+(v-1)\frac{2\pi i}{n}\right] \\ \times\Phi\left(u+\frac{2\pi i}{n},\, v+c\right)\Phi\left(u+2\frac{2\pi i}{n},\, v+2c\right)\cdots \\ \times\Phi\left[u+n-1\,\frac{2\pi i}{n},\, v+(n-1)c\right]=0.\end{aligned}$$

Si la condition $\Phi(u, v) = 0$ entraînait $\Phi\left(u+\rho a,\, v+\rho\frac{2\pi i}{n}\right)=0$, on ne garderait dans la première ligne que les facteurs Φ jusqu'à

$$\Phi\left[n+(\rho-1)a,\, v+(\rho-1)\frac{2\pi i}{n}\right],$$

et une circonstance analogue peut se présenter pour la seconde ligne.

Ainsi, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer considérée s'obtiendra en annulant une fonction $\Phi(u, v)$, de la même forme que $\Phi(u, v)$, c'est-à-dire une fonction thêta elliptique, aux périodes $2\pi i$ et na de la variable u et aux périodes $2\pi i$ et nc de la variable v, et se reproduisant à *un facteur près* lorsqu'on change u, v en $u+a$, $v+\frac{2\pi i}{n}$ ou en $u+\frac{2\pi i}{n}$, $v+c$. Les facteurs qui interviennent dans ces relations sont nécessairement, comme on le voit sans difficulté, des exponentielles de la forme $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, λ et μ étant des constantes.

On a donc

$$\Phi(u+2\pi i,\, v) = \Phi(u,\, v+2\pi i) = \Phi(u, v),$$

$$(a) \qquad \Phi\left(u+a,\, v+\frac{2\pi i}{n}\right) = \Phi(u, v)\, e^{\lambda u+\mu v+\nu},$$

$$(c) \qquad \Phi\left(u+\frac{2\pi i}{n},\, v+c\right) = \Phi(u, v)\, e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'},$$

$$\Phi(u+na,\, v) = \Phi(u, v)\, e^{-hu+\gamma},$$

$$\Phi(u,\, v+nc) = \Phi(u, v)\, e^{-kv+\gamma'}.$$

De la comparaison de ces équations on déduit immédiatement

$$\mu = 0, \qquad \lambda' = 0, \qquad n\lambda = -h, \qquad n\mu' = -k,$$

de plus $2\pi i$ étant une période de u, il est clair que λ et μ' sont entiers, et les relations précédentes montrent que ces entiers sont négatifs. Enfin si l'on opère successivement les transformations (a) et (c) on obtient l'équation de condition

$$2\pi i(\lambda - \mu') = 2n\rho\pi i, \qquad \text{ou} \qquad \lambda - \mu' = n\rho,$$

ρ étant un entier.

34. On a donc définitivement, en remplaçant λ par $-p$:

$$\Phi(u + 2\pi i, v) \qquad = \Phi(u, v + 2\pi i) = \Phi(u, v),$$
$$\Phi\left(u + a, v + \frac{2\pi i}{n}\right) = \Phi(u, v)\, e^{-pu+\nu},$$
$$\Phi\left(u + \frac{2\pi i}{n}, v + c\right) = \Phi(u, v)\, e^{-(p+n\rho)v-\nu'},$$

p étant un entier positif, et ρ un entier, positif ou négatif, tel cependant que $p + n\rho$ soit positif.

Supposons d'abord ρ positif; considérons une fonction thêta elliptique de la variable u, $f(u)$, aux périodes $\frac{2\pi i}{n}$ et a, vérifiant les relations

$$f\left(u + \frac{2\pi i}{n}\right) = f(u),$$
$$f(u + a) \qquad = f(u)\, e^{-n\rho v+\delta},$$

où δ est une constante arbitraire : une telle fonction existe toujours. Il résulte de ces relations et des précédentes que la fonction $\Phi(u, v) f(u)$ est une fonction thêta hyperelliptique des deux variables u, v, et d'ordre $p + n\rho$ (n° 32).

Si ρ est négatif, on formerait de même une fonction thêta elliptique de v, $g(v)$, telle que le produit $\Phi(u, v)g(v)$ fût une fonction hyperelliptique de u, v et d'ordre p.

Or sur la surface de Kummer, la courbe $f(u) = 0$ se décompose en un certain nombre de courbes $u =$ const.; de même la courbe $g(v) = 0$ se décompose en courbes de la série $v =$ const.; donc :

Toute courbe spéciale tracée sur une surface de Kummer elliptique

devient une courbe ordinaire si on lui adjoint un certain nombre de courbes d'une des séries $u = \text{const.}$ ou $v = \text{const.}$

Nous avons établi dans notre Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques que la surface d'ordre minimum qui passe par une courbe tracée sur une surface de Kummer générale coupe en outre celle-ci suivant 0, 1, 2, 3 ou 4 coniques; il en résulte aisément que :

La surface d'ordre minimum qui passe par une courbe spéciale tracée sur une surface de Kummer elliptique coupe en outre celle-ci suivant 0, 1, 2, 3 ou 4 coniques et suivant une ou plusieurs courbes appartenant toutes soit à la série $u = \text{const.}$, soit à la série $v = \text{const.}$

Ce théorème est tout à fait analogue à cette proposition d'Halphen sur les quadriques :

La surface d'ordre minimum qui passe par une courbe tracée sur une quadrique ne coupe en outre cette surface que suivant des génératrices d'un même système.

SUR

UNE SURFACE DU SIXIÈME ORDRE

LIÉE AUX FONCTIONS ABÉLIENNES DE GENRE 3

Journal de Mathématiques, 2e série, t. III, 1896.

1. Les surfaces hyperelliptiques, pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, et que j'ai, après M. Picard, étudiées dans ce Journal (4e série, t. IX), peuvent être définies d'une manière purement géométrique.

Soit, en effet, C une courbe de genre 2; imaginons qu'une surface algébrique S soit liée à C de telle sorte qu'à un couple de points de C corresponde un seul point de S, c'est-à-dire que les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface puissent s'exprimer par les relations

$$X_i = F_i(\xi_1, \eta_1 : \xi_2, \eta_2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où ξ_1, η_1; ξ_2, η_2 désignent les coordonnées de deux points quelconques de la courbe C, et les F_i des fonctions rationnelles, qui restent inaltérées quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2; il est clair que S sera une surface hyperelliptique. En effet, représentons par $g_1(\xi)\,d\xi$ et $g_2(\xi)\,d\xi$ deux différentielles abéliennes distinctes de première espèce appartenant à la courbe C; si l'on pose

$$g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 = du,$$
$$g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + g_2(\xi_2)\,d\xi_2 = dv,$$

on sait, par la théorie de l'inversion, que toute fonction rationnelle symétrique en ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 est une fonction abélienne de u, v, à quatre paires de périodes; ce qui démontre la proposition.

Sous ce point de vue, les surfaces hyperelliptiques apparaissent comme un cas particulier de surfaces plus générales, qu'on obtient en remplaçant, dans la définition géométrique ci-dessus, la courbe C, de genre 2, par une courbe de genre quelconque, et dont on peut dire, plus brièvement, qu'*elles représentent les couples de points* d'une courbe quelconque. Le présent Mémoire a pour objet l'étude d'une de ces surfaces, qui correspond à une courbe de genre 3, et qui se trouve liée, d'une manière remarquable, à la surface de Kummer; ses propriétés conduisent aussi à quelques théorèmes simples sur la courbe plane du quatrième ordre.

2. Établissons d'abord une proposition relative au genre de nos surfaces, dans le cas général.

Supposons que la correspondance entre la surface S et la courbe C, de genre p, soit une correspondance *point par couple*, c'est-à-dire qu'à un couple de points de C corresponde un et un seul point de S, ainsi qu'on l'a admis plus haut, et, de plus, qu'à un point de S corresponde *un seul* couple sur C; il est aisé de déterminer le *genre* de la surface.

Ce genre en effet, par définition, est égal au nombre des intégrales doubles abéliennes, linéairement distinctes, de la forme

$$\int\int \varphi(X_1, X_2, X_3)\, dX_1\, dX_2,$$

qui restent finies sur toute la surface; or, en vertu des relations (1), une telle intégrale s'écrit

$$\int\int f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

f étant une fonction rationnelle de $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$,

$$f = \varphi\left[\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_1}\right],$$

qui *change de signe* quand on y permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 (¹).

Or, pour que la nouvelle intégrale double reste finie, il est nécessaire

(¹) $\frac{\partial F}{\partial \xi_1}$ désigne la dérivée de F par rapport à ξ_1, en considérant η_1 comme lié à ξ_1 par l'équation de la courbe C.

que l'intégrale simple

$$\int f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\, d\xi_1,$$

où ξ_2, η_2 sont supposés constants, demeure finie sur la courbe C; ce sera donc une intégrale abélienne de première espèce appartenant à C, c'est-à-dire qu'on aura

$$f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = A_1 g_1(\xi_1) + \ldots + A_p g_p(\xi_1),$$

en désignant par $A_1, \ldots, A_p$ des fonctions (rationnelles) de ξ_2, η_2 et par $g_i(\xi, \eta)\,d\xi$, ou plus simplement par $g_i(\xi, \eta)d\xi$, les p différentielles abéliennes de première espèce qui appartiennent à C. En raisonnant de même sur l'intégrale $\int f\,d\xi_2$, on voit que les A doivent être des combinaisons linéaires et homogènes des $g_i(\xi_2, \eta_2)$, en sorte qu'on a

$$f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = \sum a_{ik}\, g_i(\xi_1)\, g_k(\xi_2);$$

les a_{ik} désignant des constantes absolues. Pour que f change de signe quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2, il faut et il suffit que $a_{ik} = -a_{ki}$, c'est-à-dire que

$$f = \sum a_{ik}[g_i(\xi_1)\, g_k(\xi_2) - g_k(\xi_1)\, g_i(\xi_2)].$$

En donnant à i et k les valeurs $1, 2, \ldots, p\,(i \lessgtr k)$, on obtient ainsi $\frac{1}{2}p(p-1)$ fonctions f, linéairement distinctes.

Inversement, f étant une de ces fonctions, il est clair que l'intégrale

$$\int\int f\, d\xi_1\, d\xi_2$$

pourra se mettre sous la forme

$$\int\int \varphi(X_1, X_2, X_3)\, dX_1\, dX_2,$$

et φ sera une fonction rationnelle, car à un couple de points $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ ne correspond, par hypothèse, qu'*un seul* point X_1, X_2, X_3 de la surface S; ainsi :

Une surface qui correspond point par couple à une courbe de genre p est de genre $\frac{1}{2}(p-1)$.

Pour $p = 2$, le genre est 1, résultat connu de la théorie des surfaces hyperelliptiques,

Cas où la courbe est de genre trois.

3. Nous n'aborderons dans ce Mémoire que le cas de $p = 3$, et encore nous bornerons-nous à un exemple particulier; la courbe C est alors, si l'on veut, et sans que la généralité soit diminuée, une courbe plane du quatrième ordre.

On peut, dans ce cas, indiquer une représentation simple des coordonnées des points des surfaces correspondantes, à l'aide des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes. Gardons, en effet, les notations des numéros précédents et posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 + g_1(\xi_3)\,d\xi_3 = du, \\ g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = dv, \\ g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = dw. \end{array}\right.$$

Toute fonction rationnelle symétrique par rapport à (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) est une fonction abélienne de u, v, w; il en est de même si l'on suppose que le point ξ_3, η_3 est fixe, mais alors u, v, w sont liés par une relation, qui est, comme on le sait,

$$(3)\qquad \mathfrak{S}_0(u - \lambda,\ v - \mu,\ w - \nu) = 0,$$

$\mathfrak{S}_0(u, v, w)$ désignant la fonction thêta abélienne d'ordre un, de caractéristique nulle, et λ, μ, ν des constantes.

En d'autres termes, en augmentant u, v, w de constantes convenables, on voit que les surfaces qui correspondent au cas de $p = 3$ peuvent être représentées paramétriquement par les équations

$$(4)\qquad X_i = \varphi_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les φ_i sont des fonctions abéliennes, à six systèmes de périodes, des trois paramètres u, v, w, liés eux-mêmes par la relation

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$

où $\mathfrak{S}(u, v, w)$ est une des 64 fonctions thêta normales du premier ordre, qu'on peut choisir d'ailleurs à volonté.

4. Avant de définir par cette voie la surface particulière qui est l'objet

de ce travail, rappelons ou indiquons quelques propriétés des fonctions thêta de genre 3.

Supposons d'abord que les six systèmes de période aient été ramenés à être

$$\begin{array}{cccccc} 2\pi i, & 0, & 0, & a, & b, & c; \\ 0, & 2\pi i, & 0, & b, & d, & e; \\ 0, & 0, & 2\pi i, & c, & e, & h; \end{array}$$

on appelle *fonction thêta normale*, d'ordre m, une fonction uniforme, entière, de u, v, w, vérifiant les relations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta(u+2\pi i, v, w) &= e^{\varepsilon_1 \pi i}\,\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u, v+2\pi i, w) &= e^{\varepsilon_2 \pi i}\,\Theta)u, v, w), \\ \Theta(u, v, w+2\pi i) &= e^{\varepsilon_3 \pi i}\,\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u+a, v+b, w+c) &= e^{\eta_1 \pi i}\, e^{-mu-m\frac{a}{2}}\,\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u+b, v+d, w+e) &= e^{\eta_2 \pi i}\, e^{-mv-m\frac{d}{2}}\,\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u+c, v+e, w+h) &= e^{\eta_3 \pi i}\, e^{mw-m\frac{h}{2}}\,\Theta(u, v, w), \end{aligned}\right.$$

ε_1, ε_2, ε_3, η_1, η_2, η_3 désignant 0 ou 1. L'ensemble des six nombres

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \end{array}$$

est dit la *caractéristique* de la fonction thêta; la caractéristique est dite *nulle* si les six nombres sont nuls.

D'après cela, pour tout ordre m, il y a 64 caractéristiques différentes, c'est-à-dire 64 systèmes de fonctions thêta normales; en particulier, il y a 64 fonctions thêta normales d'ordre *un*. Parmi ces fonctions 36 sont paires et 28 sont impaires; chacune s'annule pour 28 demi-périodes, c'est-à-dire pour 28 systèmes de valeurs de u, v, w compris dans les formules

$$\left.\begin{aligned} u &= l\pi i + p\frac{a}{2} + q\frac{b}{2} + r\frac{c}{2} \\ v &= m\pi i + p\frac{b}{2} + q\frac{d}{2} + r\frac{e}{2} \\ w &= n\pi i + p\frac{c}{2} + q\frac{c}{2} + r\frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (l, m, n, p, q, r = 0 \text{ ou } 1).$$

5. L'algorithme suivant, que j'ai déjà fait connaître dans ce Journal

(4e série, t. X, p. 473), établit un lien entre les 64 fonctions thêta et les demi-périodes annulant chacune d'elles.

Soient α, β, γ, δ; α', β', γ', δ'; α'', β'', γ'', δ'' *trois séries de quatre caractères; les* 64 *symboles* $\alpha\alpha'\alpha''$ *représenteront les* 64 *fonctions thêta normales d'ordre un et les* 64 *symboles* $(\alpha\alpha'\alpha'')$ *représenteront les* 64 *demi-périodes, de telle sorte :*

1° *Que les* 28 *demi-périodes annulant la fonction* $\alpha\alpha'\alpha''$ *soient représentées par les symboles* $(pp'p'')$, *où les caractères* α, α', α'' *figurent, au total, un nombre impair de fois;*

2° *Que les* 28 *fonctions qui s'annulent pour la demi-période* $(\alpha\alpha'\alpha'')$ *soient également représentées par les symboles* p, p', p'', *où les caractères* α, α', α'' *figurent, au total, un nombre impair de fois.*

L'algorithme jouit de plus des propriétés suivantes :

I. Il peut être appliqué de telle sorte que deux fonctions thêta choisies à volonté aient deux symboles choisis à volonté.

II. Considérons le produit de fonctions thêta normales, d'ordre un, en nombre pair, telles que $\alpha\alpha'\alpha''$; $\beta\beta'\beta''$; ...; écrivons à la suite les uns des autres les caractères qui entrent dans les symboles de ces fonctions, et traitons cette expression comme un produit algébrique; elle sera de la forme

$$\alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\ldots\alpha''^{h''}\beta''^{k''}\ldots.$$

Si les exposants h, k, l, m sont entre eux de même parité, ainsi que les exposants h', k', l', m' et les exposants h'', k'', l'', m'', le produit des fonctions thêta considérées (produit qui est évidemment une fonction thêta normale) aura sa caractéristique nulle.

De plus, si la somme $h+h'+h''$ est paire, ce produit sera une fonction paire de u, v, w, c'est-à-dire ne changera pas quand on changera simultanément les signes des trois variables.

Ces propriétés s'établissent par les raisonnements que nous avons employés dans le cas des fonctions thêta de deux variables (4e série de ce Journal, t. IX, p. 56-60).

Définition analytique d'une surface d'ordre six.

6. Soient ϑ_1, ϑ_2 deux quelconques des 64 fonctions normales du premier ordre; nous pouvons les supposer représentées par les

symboles

$$\alpha\alpha'\alpha'' \text{ pour } \mathfrak{S}_1 \quad \text{et} \quad \alpha\alpha'\beta'' \text{ pour } \mathfrak{S}_2.$$

Le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ est une fonction normale d'ordre deux, paire ou impaire, de caractéristique non nulle. Il est clair que les 62 autres fonctions normales d'ordre un se groupent deux à deux de manière que le produit $\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_j$ de deux fonctions d'un groupe ait même caractéristique que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$; on forme ainsi, au total, 32 produits $\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_j$, parmi lesquels 16 sont des fonctions paires et 16 des fonctions impaires. Dans notre notation symbolique, le produit des deux fonctions

$$pp'\alpha'' \quad \text{et} \quad pp'\beta''$$

a même caractéristique que $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ et même parité, c'est-à-dire est pair ou impair selon que $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ est pair ou impair; le produit des fonctions

$$pp'\gamma'' \quad \text{et} \quad pp'\delta''$$

a même caractéristique que $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, mais a la parité contraire.

Or les fonctions thêta normales, d'ordre m, de caractéristique donnée, s'expriment en fonction linéaire et homogène de m^3 d'entre elles, linéairement distinctes; si la caractéristique donnée n'est pas nulle, et si m est pair, on peut prendre, pour ces m^3 fonctions, $\frac{m^3}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^3}{2}$ fonctions impaires. Il en résulte, en supposant $m = 2$, que les fonctions normales, d'ordre deux, de caractéristique non nulle et *paires* sont fonctions linéaires et homogènes de 4 d'entre elles; de même pour les fonctions analogues *impaires*.

Ajoutons enfin que les fonctions normales, d'ordre pair, de caractéristique non nulle, et *paires*, s'annulent toutes pour 32 demi-périodes; les fonctions analogues, *impaires*, s'annulent pour les 32 autres demi-périodes (*voir* ce Journal, 4e série, t. IX, p. 39-40).

7. Cela posé, désignons par Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 quatre fonctions normales d'ordre deux, linéairement distinctes, ayant la caractéristique du produit $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, et la parité contraire; considérons la surface $\mathfrak{S}$ définie paramétriquement par les relations

$$x_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les arguments u, v, w étant liés par la relation

$$\mathfrak{S}_1(u, v, w) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois; cherchons son ordre.

Observons à cet effet qu'à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent (abstraction faite de périodes) les deux systèmes d'arguments u, v, w et $-u$, $-v$, $-w$; car $\mathfrak{T}_1$ est une fonction paire ou impaire, et les quatre Θ_i sont simultanément paires ou impaires. De plus, les Θ_i s'annulent pour 32 demi-périodes (représentées par les symboles qui contiennent un des caractères γ'' ou δ'') et $\mathfrak{T}_1$ pour 28; et l'on reconnaît aisément que 12 demi-périodes annulent à la fois $\mathfrak{T}_1$ et les Θ_i; ce sont les 12 demi-périodes qui annulent simultanément $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$. De là résulte la détermination de l'ordre de $\mathfrak{S}$.

Cet ordre est le nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$a_1\Theta_1+\ldots+a_4\Theta_4=0, \qquad b_1\Theta_1+\ldots+b_4\Theta_4=0, \qquad \mathfrak{T}_1=0,$$

a_1, ..., b_4 étant des constantes; or, d'après M. Poincaré, trois fonctions thêta, de genre trois, d'ordres m, n, p, ont $6mnp$ solutions communes; nos trois équations en auront donc $6\times 2\times 2=24$, parmi lesquelles figurent 12 périodes. Les autres solutions, au nombre de $24-12=12$, sont deux à deux égales et de signes contraires, de sorte qui ne leur correspond que $\frac{1}{2}12=6$ points de $\mathfrak{S}$. *La surface $\mathfrak{S}$ est donc du sixième ordre.*

Étude de la surface du sixième ordre $\mathfrak{S}$.

8. Quel est le genre de $\mathfrak{S}$? Cette surface ne correspond pas *point par couple* à une courbe C de genre trois, car à un point de $\mathfrak{S}$ répondent deux systèmes de valeurs u, v, w, c'est-à-dire *deux* couples de points de C; le théorème du n° 2 n'est donc pas immédiatement applicable. Néanmoins, le genre est 3, comme dans le cas général $[\frac{1}{2}p(p-1)]$, car les trois intégrales doubles

$$\iint du\,dv, \quad \iint du\,dw, \quad \iint dv\,dw$$

restent finies à l'intérieur d'un parallélépipède des périodes : et, comme elles ne changent pas quand on change u, v, w en $-u$, $-v$, $-w$, ce sont des intégrales de première espèce sur la surface $\mathfrak{S}$. Celle-ci est

dès lors de genre 3, car la première partie de la démonstration du n° 2 établit que le genre ne peut dépasser $\frac{1}{2}p(p-1)$, ici trois.

9. Avant d'aller plus loin, il est utile de préciser la forme des fonctions Θ_i, qui définissent la surface $\mathfrak{S}$.

Observons que la fonction $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}$ se reproduisant, au signe près, quand on augmente u, v, w d'une période, les trois dérivées partielles logarithmiques

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u},\quad \frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v}-\frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v},\quad \frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial w}-\frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}$$

ne changent pas dans cette substitution; donc les fonctions

$$\mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}-\mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u},\quad \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}-\mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v},\quad \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}-\mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial w}$$

sont des fonctions normalse, d'ordre deux, de même caractéristique que le produit $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$; de plus, elles sont évidemment la parité contraire de celle de ce produit. Dès lors, ces trois fonctions peuvent être prises pour les fonctions Θ_1, Θ_2, Θ_3.

Or puisque, sur la surface $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ est nul, on pourra représenter paramétriquement $\mathfrak{S}$ par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}\\ x_2&=\mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}\\ x_3&=\mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}\\ x_4&=\Theta_4(u, v, w)\end{aligned}\right\}\quad \text{avec la relation}\quad \mathfrak{S}_1(u, v, w)=0.$$

Il résulte de là que les points de $\mathfrak{S}$ donnés par l'équation $\mathfrak{S}_2(u, v, w)=0$ se réduisent au point $x_1=x_2=x_3=0$, que nous désignerons par O. Ce point est un point triple de la surface, car la droite $x_1=0$, $x_2=0$, par exemple, coupe $\mathfrak{S}$, en dehors de O, aux points dont les arguments vérifient les équations

$$(6)\qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}=0,\qquad \mathfrak{S}_1=0;$$

or les fonctions $\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}$, si l'on suppose u, v, w liés par la rela-

tion $\mathfrak{S}_1 = 0$, satisfont évidemment, quand on augmente u, v, w de périodes, aux mêmes relations (5) que la fonction $\mathfrak{S}_1$ elle-même, c'est-à-dire qu'elles peuvent être considérées comme des fonctions thêta normales du premier ordre. Le théorème de M. Poincaré sur le nombre des solutions communes à trois fonctions thêta est dès lors applicable, de sorte que les équations (6) ont 6 solutions communes, auxquelles correspondent trois points distincts de $\mathfrak{S}$. Le point $\mathfrak{S}_2 = 0$ est donc bien un point triple.

10. Aux 28 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_1$ correspondent, sur $\mathfrak{S}$, des lignes et des points remarquables.

D'abord, aux 12 demi-périodes annulant à la fois $\mathfrak{S}_1$ et les quatre Θ_i [et dont les symboles sont $(\alpha\beta'\gamma'')$, $(\alpha\beta'\delta'')$; $(\alpha\gamma'\gamma'')$, $(\alpha\gamma'\delta'')$; $(\alpha\delta'\gamma'')$, $(\alpha\delta'\delta'')$; $(\beta\alpha'\gamma'')$; $(\beta\alpha'\delta'')$; $(\gamma\alpha'\delta'')$, $(\gamma\alpha'\delta'')$; $(\delta\alpha'\gamma'')$, $(\delta\alpha'\delta'')$]; correspondent évidemment 12 *droites*; ces droites passent par le point triple O, car les 12 demi-périodes considérées annulent $\mathfrak{S}_2$.

Aux 16 autres demi-périodes annulant $\mathfrak{S}_1$ et non les Θ_i répondent, sur la surface $\mathfrak{S}$, seize points *doubles;* supposons en effet que l'une des demi-périodes soit $u = v = w = 0$; les fonctions Θ_i, ne s'annulant pas pour $u = v = w = 0$, et étant paires ou impaires, seront toutes paires, de sorte que, aux environs de $u = 0$, on aura

$$\Theta_i = a_i + (A_i u^2 + A_i v^2 + C_i w^2 + D_i uv + E_i uw + F_i vw) + \ldots,$$

d'où l'on conclut aisément qu'une droite menée par le point $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ de la surface $\mathfrak{S}$ a avec celle-ci deux intersections confondues au point considéré.

11. Étudions maintenant les courbes qu'on définit, sur $\mathfrak{S}$ en annulant les 62 fonctions thêta normales du premier ordre, autres que $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$.

Parmi ces fonctions, il en est, comme on l'a dit, 32 qui, associées deux à deux, donnent des produits $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j$ ayant la caractéristique, mais non la parité, de $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$ (ce sont les couples de fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$); chacun de ces produits est fonction linéaire et homogène des quatre Θ_i, de sorte que les deux courbes qui ont pour équations, sur la surface $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_i = 0$ et $\mathfrak{S}_j = 0$ sont planes et situées dans un même plan. Leur ordre se détermine aisément; $\mathfrak{S}_i$ s'annule en effet pour 6 des demi-périodes

annulant $\mathfrak{S}_1$ et les quatre Θ_i; $\mathfrak{S}_j$ s'annule pour les 6 autres; l'ordre cherché de la courbe $\mathfrak{S}_i = 0$ est donc égal à $\frac{1}{2}[6 \times 2 - 6] = 3$. Observons de plus que $\mathfrak{S}_i$ et $\mathfrak{S}_j$ s'annulent simultanément pour 6 des 16 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_1$ et non les quatre Θ_i (toutes ces propositions se vérifient par l'usage de l'algorithme).

On voit par là qu'il existe, sur la surface $\mathfrak{S}$, 32 *cubiques planes situées par couples dans* 16 *plans:* des deux cubiques d'un même plan, la première rencontre 6 des 12 droites de la surface issues du point triple O, la deuxième rencontre les 6 autres; enfin elles passent toutes deux par 6 des 16 points doubles de $\mathfrak{S}$.

De là se déduit une conséquence importante : les 16 points doubles de $\mathfrak{S}$ forment une configuration de Kummer, c'est-à-dire sont situés 6 par 6 dans 16 plans, et de telle sorte qu'il passe 6 plans par chaque point. Cette dernière partie de la proposition s'établit en observant qu'une des 16 demi-périodes répondant aux points doubles annule douze fonctions $\mathfrak{S}_i$, qui, égalées à zéro, donnent 12 cubiques planes, situées par couples dans six plans. Donc :

Les 16 *points doubles de la surface* $\mathfrak{S}$ *sont les points doubles d'une surface de Kummer*, K.

Il reste à étudier les 30 courbes qu'on obtient en annulant les 30 fonctions $\mathfrak{S}_h$ et $\mathfrak{S}_k$, telles que le produit $\mathfrak{S}_h\mathfrak{S}_k$ ait la caractéristique et la parité du produit $\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2$ (ce sont les couples de fonctions $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$).

On voit immédiatement, en se servant de l'algorithme :

1° Que la fonction $\mathfrak{S}_h$ s'annule pour 4 des 12 demi-périodes qui annulent à la fois $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ et les quatre Θ_i; 2° qu'elle s'annule pour 8 des 16 demi-périodes annulant $\mathfrak{S}_1$ et non les Θ_i; 3° par suite, les équations $\mathfrak{S}_1 = 0$, $\mathfrak{S}_2 = 0$, $\mathfrak{S}_h = 0$ ont, en dehors des 4 demi-périodes ci-dessus (1°), deux solutions communes, égales et de signes contraires.

Il en résulte :

1° Que la courbe $\mathfrak{S}_h = 0$ est d'ordre $\frac{1}{2}[6 \times 2 - 4] = 4$, et rencontre quatre des douze droites de $\mathfrak{S}$; 2° qu'elle passe par huit des 16 points doubles de $\mathfrak{S}$; 3° qu'elle passe par le point triple, O, et y a un point simple.

D'après cela, la courbe $\mathfrak{S}_h = 0$, qui n'est évidemment pas plane, ne peut être qu'une biquadratique ou une unicursale gauche d'ordre quatre; nous verrons plus bas qu'elle est de genre un, ce qui écarte la seconde hypothèse, il y a donc, sur $\mathfrak{S}$, *trente biquadratiques* passant par le point triple et, respectivement, par 8 des 16 points doubles : on reconnaît, par l'étude des demi-périodes correspondantes, que ces 8 points doubles forment, sur la surface de Kummer, K, un des 30 octaèdres de Göpel, c'est-à-dire, en particulier, qu'ils sont la base d'un réseau (système linéaire doublement infini) de quadriques. Par les 8 points de chaque octaèdre et par le point triple O passe donc une biquadratique, qui coïncide nécessairement (comme la coupant en 9 points) avec une des 30 biquadratiques situées sur $\mathfrak{S}$.

12. De là résulte une détermination géométrique de la surface $\mathfrak{S}$.

Soient K une surface de Kummer, O le point triple de S; par chaque système de huit points doubles de K, formant un octaèdre de Göpel, et par le point O, passe une biquadratique; les 30 biquadratiques ainsi définies sont sur la surface d'ordre six, $\mathfrak{S}$, qu'elles déterminent évidemment d'une manière complète.

La surface de Kummer K et le point O peuvent-ils être choisis arbitrairement ? La surface K dépend (à une transformation homographique près) de trois invariants; quand elle est donnée, la position du point O comporte trois arbitraires, ce qui donne en tout 6 paramètres; or, la surface $\mathfrak{S}$ dépend de 6 paramètres, à savoir les 6 modules de la courbe de genre trois à laquelle elle correspond: il n'y a donc aucune liaison entre les trois invariants de la surface de Kummer et les coordonnées du point O par rapport à cette surface, c'est-à-dire que K et O sont complètement arbitraires.

13. Présentons une dernière remarque sur les 12 droites et les 30 biquadratiques de $\mathfrak{S}$; soient, comme plus haut, $\mathfrak{S}_h$ et $\mathfrak{S}_k$ deux fonctions thêta dont le produit a la caractéristique et la parité de $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$; on vérifie, à l'aide de l'algorithme, qu'elles s'annulent *simultanément* pour quatre des 12 demi-périodes qui correspondent aux 12 droites de $\mathfrak{S}$; de plus, ces demi-périodes sont associées deux à deux de telle sorte que toute fonction $\mathfrak{S}_h$, s'annulant pour l'une d'elles, s'annule ainsi pour l'autre. Géométriquement, on peut donc dire que les 30 biquadratiques

sont *associées* deux à deux, les biquadratiques d'un couple rencontrant quatre mêmes droites de $\mathfrak{S}$; les 12 droites de $\mathfrak{S}$ sont également *associées* deux à deux, de telle sorte que toute biquadratique rencontrant une droite d'un couple rencontre également l'autre. Dans notre notation symbolique, les biquadratiques $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$ sont associées; de même les droites $(\alpha\beta'\gamma'')$ et $(\alpha\beta'\delta'')$ dont les symboles ont les deux premiers caractères communs.

Correspondance entre $\mathfrak{S}$ et la courbe plane d'ordre quatre.

14. Nous savons qu'à un couple de points de la courbe plane d'ordre quatre, C, correspond un et un seul point de $\mathfrak{S}$, mais qu'à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent deux couples sur C; étudions de plus près cette relation.

Soient ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 deux points arbitraires de C; on a vu (n° 3) qu'en posant

$$(7)\quad \begin{cases} g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 = du, \\ g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + g_2(\xi_2)\,d\xi_2 = dv, \\ g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + g_3(\xi_2)\,d\xi_2 = dw, \end{cases}$$

et en déterminant convenablement les constantes d'intégration, u, v et w sont liés par la relation $\mathfrak{I}_1(u, v, w) = 0$; au couple (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) sur C correspond le point u, v, w sur $\mathfrak{S}$. Au même point de $\mathfrak{S}$ correspondent les arguments $-u$, $-v$, $-w$, c'est-à-dire, sur C, le couple (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4), tel que

$$g_1(\xi_3)\,d\xi_3 + g_1(\xi_4)\,d\xi_4 = -du,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} &g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 + g_1(\xi_3)\,d\xi_3 + g_1(\xi_4)\,d\xi_4 = 0, \\ &g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ &g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

équations qui établissent, comme il est bien connu, que les points ξ_3, η_3 et ξ_4, η_4 sont les deux points où la droite joignant (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) coupe de nouveau C. Donc :

A deux couples de points situés en ligne droite sur la courbe C correspond un seul et même point de la surface $\mathfrak{S}$, et réciproquement.

Désignons maintenant par $G_i(\xi)$ l'intégrale $\int g_i(\xi)\,d\xi$; les relations (7) donnent, si l'on choisit convenablement les limites inférieures des intégrales,

$$(8)\qquad \begin{cases} G_1(\xi_1)+G_1(\xi_2)=u, \\ G_2(\xi_1)+G_2(\xi_2)=v, \\ G_3(\xi_1)+G_3(\xi_2)=w, \end{cases}$$

la relation $\mathfrak{S}_1(u, v, w)=0$ étant toujours satisfaite. Cela posé, observons qu'une quelconque des fonctions thêta normales du premier ordre se déduit de $\mathfrak{S}_1$ (à un facteur exponentiel près) en augmentant u, v, w d'une demi-période; en d'autres termes, aux points de la courbe $\mathfrak{S}_1(u, v, w)=0$, sur $\mathfrak{S}$, correspondent, sur C, les couples de points ξ_1, ξ_2 et ξ'_1, ξ'_2, vérifiant les relations

$$G_1(\xi_1)+G_1(\xi_2)=G_1(\xi'_1)+G_1(\xi'_2)+\frac{\mathfrak{T}_1}{2},$$

$$G_2(\xi_1)+G_2(\xi_2)=G_2(\xi'_1)+G_2(\xi'_2)+\frac{\mathfrak{T}_2}{2},$$

$$G_3(\xi_1)+G_3(\xi_2)=G_2(\xi'_1)+G_3(\xi'_2)+\frac{\mathfrak{T}_3}{2}.$$

Désignons par ξ_3, ξ_4 les deux points de C en ligne droite avec ξ'_1 et ξ'_2; les équations précédentes s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \sum_j G_1(\xi_j)=\frac{\mathfrak{T}_1}{2} \\ \sum_j G_2(\xi_j)=\frac{\mathfrak{T}_2}{2} \\ \sum_j G_3(\xi_j)=\frac{\mathfrak{T}_3}{2} \end{aligned}\right\}\qquad (j=1, 2, 3, 4),$$

$\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ étant une période. Ces relations montrent que les quatre points ξ_j sont les points de contact de la courbe C avec une conique quadritangente; en d'autres termes, aux couples que forment les quatre points où C est touchée par une conique quadritangente variable, appartenant à un des 63 systèmes de coniques inscrites, correspond, sur la surface $\mathfrak{S}$, une des 63 courbes $\mathfrak{S}_h=0$ $(h>1)$. Ces 63 courbes sont, comme on l'a vu, les 32 cubiques planes, les 30 biquadratiques et le point triple, ou plutôt le cône des tangentes au point triple; d'après ce qui précède, chacune d'elles correspond,

point par tangente, à l'enveloppe des droites joignant deux à deux, sur C, les quatre points de contact des coniques inscrites d'un même système. Or, ces droites enveloppent, comme on sait, une courbe générale de troisième classe (de genre un), la *Cayleyenne* du système; les courbes $\mathfrak{Z}_h = 0$ de la surface $\mathfrak{S}$ sont donc *de genre un*, ce qui montre que les 32 cubiques planes n'ont pas de point double, et que les 30 courbes gauches d'ordre quatre sont bien des biquadratiques.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces correspondances, dont une image géométrique plus nette sera indiquée dans la suite.

Génération géométrique de la surface $\mathfrak{S}$.

15. Soient $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface quelconque d'ordre quatre; α_1, α_2, α_3, α_4 les coordonnées d'un point extérieur, O. Une sécante quelconque issue de O coupe K en quatre points, a_1, a_2, a_3, a_4, qui se répartissent, de trois manières, en deux couples.

Soit a_1, a_2 et a_3, a_4 un de ces groupements; les couples a_1, a_2 et a_3, a_4 déterminent sur la sécante une involution du second ordre, dans laquelle le point O a un conjugué, m. Cette construction donne trois points m sur toute sécante menée par O; le lieu des points m, quand la sécante tourne autour de O, est une surface du sixième ordre, dont la Géométrie analytique donne aisément l'équation. Cette équation est

$$(9)\qquad K(x_1, \ldots, x_4)\, H^2(x_1, \ldots, x_4) - K(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)\, P^2(x_1, \ldots, x_4) = 0,$$

où P et H désignent respectivement les premiers membres des équations de la première et de la troisième polaire du point O par rapport à la surface $K = 0$, c'est-à-dire

$$P = \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots + \alpha_4 \frac{\partial K}{\partial u_4},$$

$$6H = \alpha_1^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^3} + 3\alpha_1^2 \alpha_2 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^2\, dx_2} + \ldots + \alpha_4^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_4^3}.$$

Si K est une surface de Kummer, je dis que la surface du sixième

ordre (9) ainsi définie coïncide avec la surface $\mathfrak{S}$ dont les 16 points doubles seraient ceux de K, et dont le point triple serait O; il suffit, pour cela, d'établir (n° 12) que la surface (9) contient les 30 biquadratiques menées par O et par les sommets de chacun des octaèdres de Göpel que forment les 16 points doubles de K.

Considérons un de ces groupes de 8 points : ils sont, comme on sait, la base d'un réseau ponctuel de quadriques, dont les génératrices rectilignes forment un complexe du troisième ordre; sur chaque génératrice, les quadriques du réseau déterminent une involution. Cela posé, soit m un point quelconque de la biquadratique menée par O et par les points de base du réseau; la droite Om appartient au complexe, et les points O et m sont conjugués dans l'involution déterminée sur cette droite par les quadriques du réseau. D'un autre côté, désignons par a_1, a_2, a_3, a_4 les points où la droite Om coupe la surface de Kummer, K : sur cette surface, on sait qu'il existe une infinité simple de biquadratiques passant par les 8 points du groupe considéré; une de ces biquadratiques passe donc par a_1, je dis qu'elle passe aussi par un des points a_2, a_3, a_4. En effet, toute biquadratique passant par les 8 points de base et coupant en un point une droite du complexe, la coupe en un second point; donc, puisque Om est une droite du complexe, la biquadratique qui passe par a_1 passe par a_2; de même, celle qui passe par a_3 passe aussi par a_4. Il en résulte que les couples a_1 et a_2, a_3 et a_4, O et m sont trois couples d'une même involution sur la sécante Om, c'est-à-dire que m est sur la surface (9). Cette surface contient donc les 30 biquadratiques considérées, c'est-à-dire coïncide avec la surface $\mathfrak{S}$ qui a pour points doubles les 16 points doubles de K, et pour triple O. C. Q. F. D.

16. L'équation (9) et le mode de génération correspondant mettent en évidence plusieurs propriétés de la surface $\mathfrak{S}$. D'abord cette surface admet pour ligne double une cubique plane, intersection de la première polaire ($P = 0$) et du plan polaire ($H = 0$) du point O par rapport à la surface de Kummer K; de plus, les deux surfaces $\mathfrak{S}$ et K se touchent le long de la courbe de contact de la surface K avec le cône qui lui est circonscrit à partir de O : cela résulte immédiatement de l'équation (9), qui montre aussi que les 16 points doubles de K sont des points doubles de $\mathfrak{S}$.

La génération géométrique fait voir ensuite que $\mathfrak{S}$ contient les 12 tangentes doubles menées de O à la surface de Kummer; ces droites rencontrant nécessairement la cubique double, le cône des tangentes de $\mathfrak{S}$ au point triple O coïncide avec le cône de sommet O qui a la cubique double pour directrice.

17. On peut aussi, en partant de la génération géométrique, retrouver le lien qui rattache la surface $\mathfrak{S}$ à la courbe d'ordre quatre ou aux fonctions abéliennes de genre trois.

On sait, en effet, d'après un beau théorème de M. Klein, qu'à toute répartition en deux couples des quatre points où une droite Δ coupe la surface de Kummer K, correspond une répartition en deux couples des quatre plans tangents menés à K par Δ, et réciproquement. Supposons que la droite Δ passe par O; les plans tangents menés à K par Δ toucheront le cône de quatrième classe $\mathcal{C}$ circonscrit à K à partir du point O. Soient maintenant Π_1 et Π_2 deux plans tangents arbitraires du cône $\mathcal{C}$; Δ leur droite d'intersection; Π_3 et Π_4 les deux autres plans tangents menés au cône $\mathcal{C}$ par Δ : les quatre points où Δ coupe la surface de Kummer se répartissent en deux couples, correspondant aux couples de plans tangents Π_1, Π_2 et Π_3, Π_4 ; à cette répartition correspond un et un seul point m de la surface $\mathfrak{S}$, point situé sur Δ. En d'autres termes, à deux plans tangents du cône $\mathcal{C}$ correspond un point m de $\mathfrak{S}$; à un point m de $\mathfrak{S}$ correspondent deux couples de plans tangents de $\mathcal{C}$, ces quatre plans ayant une droite commune. C'est là précisément, sous forme *corrélative*, la relation signalée au n° 14 entre la surface $\mathfrak{S}$ et la courbe plane du quatrième ordre.

Ce mode de correspondance conduit à une conséquence simple : laissons fixe le plan Π_1 ; quand Π_2 variera, le point correspondant m de la surface $\mathfrak{S}$ reste dans le plan Π_1, où il décrit évidemment une courbe qui répond au cône $\mathcal{C}$ point par génératrice. Cette courbe est donc de genre trois et a les mêmes modules que le cône; en d'autres termes :

Les sections de la surface $\mathfrak{S}$ par les plans menés du point triple tangentiellement à la surface de Kummer sont des courbes du sixième ordre, de genre trois et de mêmes modules. Leurs modules sont ceux du cône de quatrième classe enveloppé par les plans considérés.

Sections de la surface $\mathfrak{S}$ par les surfaces adjointes.

18. L'emploi des fonctions abéliennes permet d'étudier assez simplement les courbes tracées sur la surface $\mathfrak{S}$, et, en particulier, les sections par les surfaces adjointes. La surface ayant une cubique plane double et un point triple, ses adjointes passeront simplement par la cubique et par le point; en particulier, les adjointes d'ordre deux se décomposeront en deux plans, dont l'un est celui de la courbe double et l'autre un plan quelconque mené par le point triple : elles sont donc en nombre doublement infini, comme on le savait *a priori*, puisque $\mathfrak{S}$ est de genre trois.

Proposons-nous d'abord de trouver l'équation des courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par les adjointes du troisième ordre : sans indiquer ici la méthode générale applicable à toutes les surfaces de même nature que $\mathfrak{S}$, nous profiterons de propriétés géométriques de cette surface pour parvenir directement au résultat.

19. Nous nous appuierons pour cela sur la propriété suivante. Sur une surface algébrique $S(X, Y, Z) = 0$ d'ordre n, les intégrales doubles abéliennes qui ne deviennent infinies que le long de la section plane (choisie au hasard), $Q(X, Y, Z) = 0$, sont comprises dans la formule

$$\int\int \frac{dX\,dY}{S'_Z}\,\frac{F(X, Y, Z)}{Q^q},$$

q étant un entier et $F(X, Y, Z)$ le premier membre de l'équation d'une surface d'ordre $n + q - 4$, *adjointe à* $S = 0$. En particulier, si l'élément de l'intégrale est infini du premier ordre le long de la section, $q = 1$.

Cela posé, observons que, d'après le n° 9, la surface $\mathfrak{S}$ est représentée paramétriquement par les équations

$$X = \frac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial u}\,\frac{\mathfrak{Z}_2}{\Theta_4}, \qquad \ldots, \qquad Z = \frac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial w}\,\frac{\mathfrak{Z}_2}{\Theta_4};$$

d'ailleurs $\int\int du\,dv$ est une intégrale de première espèce; elle s'écrit

$$\int\int \frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial\mathfrak{Z}_1}{\partial w}\right)}\,\frac{\Theta_4}{\mathfrak{Z}_2}\,Z,$$

et l'on a, d'après la forme générale des intégrales de première espèce sur la surface S = o (ici $\mathfrak{S}$),

$$\iint \frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial w}\right)} \frac{\Theta_4}{\vartheta_2} Z = \iint \frac{dX\,dY}{S'_Z} R(X, Y, Z),$$

R = o étant une surface adjointe d'ordre $n - 4 = 2$, qui se décompose (n° 18) en deux plans, dont l'un est celui H(X, Y, Z) = o, de la courbe double, et l'autre un plan mené par O, lequel est évidemment le plan Z = o. On a donc

(10)
$$\frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial w}\right)} = \frac{dX\,dY}{S'_Z} H \frac{\vartheta_2}{\Theta_4}.$$

Admettons maintenant, pour abréger le langage, que la fonction désignée jusqu'ici par $\vartheta_2(u, v, w)$ soit la fonction thêta normale, d'ordre un, *de caractéristique nulle* (cette fonction est paire); et désignons par $\theta(u, v, w)$ une fonction thêta normale, d'ordre trois, de caractéristique nulle et paire [il y a 14 de ces fonctions linéairement distinctes (¹)]. Considérons l'intégrale double

(11)
$$J = \iint \frac{\theta(u, v, w)}{\Theta(u, v, w)} \frac{du\,dv}{\left(\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial w}\right)},$$

où $\Theta(u, v, w)$ est une combinaison linéaire et homogène quelconque des quatre fonctions Θ_i; on peut l'écrire, d'après (10),

$$J = \iint \frac{dX\,dY}{S'_Z} H \frac{\vartheta_2 \theta}{\Theta_4 \Theta}.$$

Or, la fonction $\dfrac{\vartheta_2 \theta}{\Theta_4 \Theta}$ est une fonction abélienne *paire* : elle peut donc, lorsque u, v, w sont liés par la relation $\vartheta_1 = 0$, s'exprimer rationnellement en fonction des coordonnées X, Y, Z, d'un point de la surface $\mathfrak{S}$; c'est-à-dire que

$$J = \iint \frac{dX\,dY}{S'_Z} \frac{M(X, Y, Z)}{N(X, Y, Z)},$$

M et N étant des polynomes. Or l'intégrale J, d'après la forme (11), en

(¹) Car, en général, il y a $\frac{1}{2}[n^3 + 1]$ fonctions thêta d'ordre impair, n, de caractéristique nulle et *paires*.

devient infinie que pour les valeurs de u, v, w annulant simultanément ϑ_1 et Θ, c'est-à-dire pour les points de $\mathfrak{S}$ situés dans le plan de la section plane $\Theta = 0$. Si donc $Q(X, Y, Z)$ est l'équation de ce plan, on aura $\frac{M}{N} = \frac{F}{Q}$, F étant le premier membre de l'équation d'une surface *adjointe* d'ordre trois. Finalement on a

$$\frac{du\,dv}{\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial w}\right)}\,\frac{\theta(u, v, w)}{\Theta(u, v, w)} = \frac{dX\,dY}{S'_Z}\,\frac{F(X, Y, Z)}{Q(X, Y, Z)},$$

ce qui montre que la courbe $\theta(u, v, w) = 0$, sur $\mathfrak{S}$, est située sur la surface cubique adjointe $F = 0$.

Ainsi, $\theta(u, v, w)$ étant une fonction thêta quelconque, d'ordre trois, de caractéristique nulle, et paire, la courbe $\theta(u, v, w) = 0$ est l'intersection de la surface $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe du troisième ordre. Or il y a 14 fonctions $\theta(u, v, w)$ linéairement distinctes, parmi lesquelles *quatre* contiennent ϑ_1 en facteur (ce sont celles qui proviennent de la multiplication de ϑ_1 par les quatre fonctions thêta distinctes du second ordre, de même caractéristique et de même parité que $\vartheta_1\vartheta_2$); il reste donc *dix* fonctions $\theta(u, v, w)$, auxquelles correspondent autant de surfaces cubiques adjointes linéairement distinctes. Mais d'ailleurs il n'y a que *dix* surfaces cubiques linéairement distinctes adjointes à $\mathfrak{S}$, puisque ces surfaces doivent passer par une cubique plane et un point non situé dans le plan de cette courbe; il en résulte que, réciproquement, toute surface cubique adjointe coupe $\mathfrak{S}$ suivant une ligne dont l'équation est de la forme $\theta(u, v, w) = 0$. Donc :

Les courbes communes à $\mathfrak{S}$ et à ses adjointes d'ordre trois ont pour équation générale $\theta(u, v, w) = 0$, en désignant par θ une fonction normale d'ordre trois, paire, et de caractéristique nulle; et réciproquement.

20. La fonction $\theta(u, v, w)$ peut contenir ϑ_2 en facteur : la surface cubique adjointe correspondante a alors un point *double* en O, et l'on en conclut aisément que :

Les courbes communes à $\mathfrak{S}$ et à ses adjointes d'ordre trois qui ont un point double en O (point triple de $\mathfrak{S}$) ont pour équation générale $\eta(v, u, w) = 0$, en désignant par η une fonction normale d'ordre deux (paire) et de caractéristique nulle; et réciproquement.

Ces résultats se généraliseraient sans difficulté pour des surfaces adjointes d'ordre quelconque.

21. De là se déduisent quelques conséquences géométriques :

1° Le long de chacune des 30 biquadratiques situées sur $\mathfrak{S}$, on peut circonscrire à cette surface une surface cubique adjointe, ayant un point double en O, et coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant les quatre droites (issues de O) qui rencontrent la biquadratique (n°s 11 et 13).

Car si $\mathfrak{J}_h = 0$ est l'équation de la biquadratique, $\mathfrak{J}_h^2$ est une fonction normale paire, d'ordre deux et de caractéristique nulle; elle s'annule pour quatre des demi-périodes qui annulent à la fois $\mathfrak{J}_1$ et les quatre Θ_i. De même :

2° Le long de chacune des 32 cubiques planes situées sur $\mathfrak{S}$, on peut circonscrire à cette surface une surface cubique adjointe, ayant un point double en O, et coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant les six droites (issues de O) qui rencontrent la cubique.

3° Les 30 biquadratiques sont situées, par groupes de trois, sur 60 surfaces cubiques adjointes à $\mathfrak{S}$.

Car, d'après le n° 5, le produit des quatre fonctions thêta

$$\alpha\alpha'\beta'', \quad \alpha\beta'\beta'', \quad \beta\alpha'\beta'', \quad \beta\beta'\beta''$$

est pair et a sa caractéristique nulle; la fonction $\alpha\alpha'\beta''$, étant (n° 6) la fonction $\mathfrak{J}_2$, a la même propriété; le produit des trois autres thêta est donc une fonction d'ordre trois, paire et de caractéristique nulle, c'est-à-dire que les trois biquadratiques $\alpha\beta'\beta''$, $\beta\alpha'\beta''$, $\beta\beta'\beta''$, sont sur une surface cubique adjointe à $\mathfrak{S}$.

On reconnaît ainsi que, à une de ces biquadratiques, par exemple $\alpha\alpha'\beta''$, on peut associer *six* couples d'autres biquadratiques, ce qui donne les six groupes

$$\left.\begin{array}{lll}
\alpha\beta'\beta'', & \beta\alpha'\beta'', & \beta\beta'\beta'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \beta\alpha'\alpha'', & \beta\beta'\alpha'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \gamma\alpha'\beta'', & \gamma\beta'\beta'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \gamma\alpha'\alpha'', & \gamma\beta'\alpha'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \delta\alpha'\beta'', & \delta\beta'\alpha'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \delta\alpha'\alpha'', & \delta\beta'\alpha''
\end{array}\right\} \text{de trois biquadratiques situées sur une surface cubique adjointe.}$$

Six de ces surfaces cubiques passent donc par une biquadratique donnée, et, par suite, leur nombre total est égal à $\frac{30 \times 6}{3} = 60$.

Il résulte également de là que les tangentes menées en O aux 30 biquadratiques sont trois à trois dans 60 plans.

4° Il existe 240 groupes formés chacun de deux cubiques planes et d'une biquadratique de la surface $\mathfrak{S}$, et tels que les trois courbes d'un groupe soient sur une surface adjointe du troisième ordre; celle-ci coupe en outre $\mathfrak{S}$ suivant deux droites passant par O.

Par exemple, les cubiques $\alpha\beta'\gamma''$, $\alpha\alpha'\gamma''$ et la biquadratique $\alpha\beta'\alpha''$ sont sur une surface cubique adjointe, qui contient les droites $(\alpha\gamma'\delta'')$ et $(\alpha\delta'\delta'')$; on en conclut que ces deux droites et la tangente en O à la biquadratique sont dans un même plan.

En étudiant ces relations de plus près, à l'aide de l'algorithme, on reconnaît que le plan déterminé par deux des droites de la surface $\mathfrak{S}$ (issues de O) et le plan des deux droites associées (n° 13) se coupent suivant une droite qui touche, en O, une des 30 biquadratiques; les 240 surfaces adjointes du troisième ordre définies plus haut ont quatre à quatre même plan tangent au point O, etc.

Application aux courbes de quatrième classe.

22. On sait que, sur une courbe plane de quatrième classe, les 28 points doubles sont situés 12 par 12 sur 63 courbes du troisième ordre, dont la théorie se rattache intimement à celle de la proposée : Steiner, qui a établi l'existence des 63 cubiques, n'a pas abordé l'étude des relations géométriques que ces courbes peuvent avoir entre elles; il s'est borné à signaler l'intérêt de cette question ([1]), à laquelle se rapportent les remarques suivantes :

Soit toujours $\mathcal{C}$ le cône de quatrième classe de sommet O circonscrit à la surface de Kummer K : c'est, comme on sait, un cône général de classe quatre, de même que les sections planes de K sont des courbes générales d'ordre quatre. Le cône $\mathcal{C}$ a 28 droites doubles, qui sont les 12 bitangentes menées de O à la surface K, et les 16 droites qui joignent O aux points doubles de cette surface : d'après le théorème

([1]) *Journal de Crelle*, t. 49, p. 272.

de Steiner, rappelé plus haut, les 28 droites doubles sont, 12 par 12, sur 63 cônes cubiques, qui sont ici les cônes de sommet O ayant respectivement pour directrices : 1° les 30 biquadratiques; 2° les 32 cubiques planes; 3° la cubique double, situées sur $\mathfrak{S}$. Chacun de ces cônes, en effet, contient bien douze droites de $\mathcal{C}$, car : 1° une biquadratique passe par huit points doubles de K et rencontre quatre des douze bitangentes menées de O à K; 2° une cubique plane contient six points doubles et rencontre six bitangentes de K; 3° le cône, G, de sommet O, qui a pour base la cubique double, contient les douze bitangentes (n° 16).

On obtient de cette manière une représentation géométrique des 63 cônes, dits *cônes cayleyens de* $\mathcal{C}$ (n° 14), et l'on met en évidence plusieurs de leurs propriétés.

23. La cubique double de $\mathfrak{S}$ est située sur la polaire du point O par rapport à la surface K (n° 16); les douze points où elle coupe cette surface sont donc sur la courbe de contact de K et du cône $\mathcal{C}$, et les sections, par le plan de la cubique double, du cône $\mathcal{C}$ et de la surface K, se touchent en ces douze points. Ainsi :

Une courbe de quatrième classe, $\mathcal{C}^4$, *est coupée par une quelconque de ses 63 cubiques cayleyennes (en dehors de 12 points doubles) en douze points simples : elle touche en ces douze points une courbe de quatrième ordre,* C_4.

Nous verrons plus bas que les deux courbes $\mathcal{C}^4$ et C_4 sont liées d'une manière intéressante.

24. Steiner a montré, dans le Mémoire cité plus haut que les 63 cubiques cayleyennes de $\mathcal{C}^4$ forment, trois à trois, des groupes remarquables : les trois cubiques γ, γ_1 et γ_2, d'un même *groupe de Steiner*, sont telles, que, parmi les douze points doubles de $\mathcal{C}^4$ que contient chacune d'elles, six appartiennent à la deuxième et les six autres à la troisième; les cubiques γ, γ_1, γ_2 ne contiennent donc, en tout, que 18 points doubles de $\mathcal{C}^4$, répartis en trois systèmes de six, et, d'après Aronhold, les six points doubles de chaque système sont sur une conique. Il y a 336 groupes de Steiner, d'où $3 \times 336 = 1008$ coniques passant par six points doubles de $\mathcal{C}^4$.

Cela posé, soient G_1 et G_2 deux cônes, de sommet O, ayant pour bases respectives deux cubiques de la surface $\mathfrak{S}$, situées dans un même plan : ces cônes, et le cône G qui a pour base la cubique double de $\mathfrak{S}$, forment évidemment un groupe steinérien de trois cônes cayleyens, par rapport au cône $\mathcal{C}$. Or les deux cubiques, bases de G_1 et G_2, ont neuf points communs, dont six sont les points doubles de K (et de $\mathfrak{S}$) contenus dans leur plan, et dont les trois autres sont nécessairement sur la courbe double de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire sur le cône G; de plus ces trois derniers points sont en ligne droite, puisque la courbe double est plane. Donc :

Trois cubiques cayleyennes γ, γ_1 et γ_2, d'une courbe de quatrième classe, $\mathcal{C}^4$, formant un groupe de Steiner, ont trois points communs; ces points sont sur une même droite, Δ.

On en déduit une autre propriété : les cubiques γ et γ_1 se coupent en neuf points, dont trois sont sur Δ, et les six autres, qui sont des points doubles de $\mathcal{C}^4$, sur une conique, $\omega_2 = 0$; on a donc identiquement

$$\gamma - \gamma_1 = \Delta\omega_2,$$

et de même

$$\gamma - \gamma_2 = \Delta\omega_1;$$

d'où

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \Delta(\omega_1 - \omega_2),$$

c'est-à-dire que la conique $\omega_1 - \omega_2 = 0$, qui contient les six points doubles de $\mathcal{C}^4$ communs à γ_1 et γ_2, passe par les quatre points d'intersection des coniques ω_1 et ω_2. Ainsi :

Trois cubiques cayleyennes d'une courbe de quatrième classe, $\mathcal{C}^4$, formant un groupe de Steiner, contiennent en tout 18 points doubles de $\mathcal{C}^4$, situés 6 à 6 sur trois coniques : ces trois coniques se coupent en quatre mêmes points.

Ou encore :

Les 1008 coniques qui contiennent chacune 6 points doubles de $\mathcal{C}^4$ se répartissent en 336 groupes de trois, de telle sorte que les 3 coniques d'un groupe n'aient en commun aucun point double de $\mathcal{C}^4$, et se coupent en quatre mêmes points.

Cette proposition peut s'énoncer d'une autre manière :

Les douze bitangentes menées d'un point O à une surface de Kummer,

K, *se répartissent de* 16 *manières en deux groupes de six, les six bitangentes de chaque groupe étant sur un cône de second ordre* (propriété connue) : *les deux cônes qui correspondent ainsi aux deux groupes d'une même répartition se coupent suivant* 4 *droites qui s'appuient sur une même conique de la surface de Kummer* [1].

25. Une cayleyenne γ de $\mathcal{C}^4$ appartient à $\frac{336 \times 3}{63} = 16$ groupes de Steiner; si γ est la cubique double de $\mathfrak{S}$ ($\mathcal{C}^4$ étant la section du cône $\mathcal{C}$ par le plan de cette cubique), les seize droites Δ, qui correspondent respectivement aux 16 groupes, sont les intersections du plan de γ avec les seize plans singuliers de la surface de Kummer K : elles sont donc des tangentes doubles de la courbe du quatrième ordre, C_4, définie au n° 23, et les propriétés connues de la surface de Kummer conduisent aux propositions suivantes sur les courbes $\mathcal{C}^4$ et C_4 :

Une cubique cayleyenne, γ, *de* $\mathcal{C}^4$ *appartient à* 16 *groupes de Steiner, à chacun desquels correspond* (n° 24) *une droite,* Δ.

---

[1] Le même théorème conduit à une propriété des surfaces de troisième classe. On sait, en effet (Geiser), que la section d'une telle surface par un plan tangent est une courbe de quatrième classe, qui admet pour points doubles les intersections du plan avec les 27 droites de la surface. D'ailleurs les 27 droites sont, 6 à 6, sur 360 quadriques (Cremona) qui, comme on le voit aisément, se groupent 3 à 3, de manière que les douze droites situées sur deux quadriques quelconques d'un groupe appartiennent à un même double-six (par exemple, dans la notation de M. Cremona, les quadriques qui contiennent respectivement les trois systèmes de six droites : a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, b_6; b_1, b_2, b_3, a_4, a_5, a_6; c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{45}, c_{46}, c_{56} forment un des 120 groupes). En vertu du théorème énoncé dans le texte, les sections de trois quadriques d'un même groupe par un plan tangent *quelconque* de la surface de troisième classe se coupent en quatre mêmes points, d'où il résulte que les trois quadriques appartiennent à un même faisceau ponctuel. Donc :

Les 360 *quadriques qui contiennent six droites d'une surface de troisième classe se répartissent en* 120 *groupes de trois, de telle sorte que les trois quadriques d'un groupe se coupent suivant une même courbe du quatrième ordre.*

On voit aisément que cette courbe du quatrième ordre passe par 12 des 45 points triples de la surface de troisième classe, en sorte que : *les* 45 *points triples d'une surface de troisième classe sont situés, douze par douze, sur* 120 *biquadratiques.*

Les seize droites Δ *ainsi définies se coupent* 2 *à* 2 *en* 120 *points, qui sont respectivement sur les* 120 *droites joignant deux à deux les* 16 *points doubles de* $\mathcal{C}^4$ *non situés sur* γ.

Les seize droites Δ *sont doublement tangentes à une même courbe du quatrième ordre*, C_4, *qui touche* $\mathcal{C}^4$ *en douze points, situés sur la cubique* γ.

Les deux points de contact avec C_4 *de chacune des droites* Δ *sont sur une conique qui contient six points doubles de* $\mathcal{C}^4$, *non situés sur* γ; *inversement : les deux tangentes menées à* $\mathcal{C}^4$ *en un point double non situé sur* γ *sont tangentes à une conique qui touche six des droites* Δ.

D'autres propositions se déduiraient des résultats du n° 21 ; nous les avons énoncées dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (22 avril 1895); comme on peut les établir directement, sans s'appuyer sur les propriétés de la surface $\mathfrak{S}$, il nous paraît inutile d'y revenir ici.

Cas des fonctions abéliennes hyperelliptiques de genre trois.

26. On a supposé, dans l'étude de la surface $\mathfrak{S}$, définie analytiquement au n° 7, que les fonctions thêta considérées ne provenaient pas d'une courbe de genre trois *hyperelliptique* : s'il en est autrement, la définition du n° 7 conduit toujours à une surface algébrique, que nous désignerons par $\mathfrak{T}$, mais dont le degré est *cinq*, au lieu de six.

En effet, ce qui caractérise le cas hyperelliptique, c'est qu'une des 64 fonctions thêta normales, *paires*, d'ordre un, s'annule pour $u = v = w = 0$; d'où il résulte que chacune de ces 64 fonctions s'annule pour une demi-période qui n'est pas un de ces zéros dans le cas général. Il est facile de voir qu'on peut appliquer l'algorithme du n° 5 de telle façon que les fonctions $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$ s'annulent respectivement pour les demi-périodes $(pp'\gamma'')$ et $(pp'\delta'')$, et de même que les fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$ s'annulent respectivement pour les demi-périodes $(pp'\alpha'')$ et $(pp'\beta'')$.

Cela posé, soient toujours $\alpha\alpha'\alpha''$ la fonction $\mathfrak{I}_1$ et $\alpha\alpha'\beta''$ la fonction $\mathfrak{I}_2$: les quatre fonctions Θ_i du n° 7 s'annulent pour les 32 demi-périodes $(pp'\gamma'')$ et $(pp'\delta'')$, dont l'une, $(\alpha\alpha'\gamma'')$, qui n'annulait pas $\mathfrak{I}_1$ dans le cas général, l'annule dans le cas hyperelliptique. De plus, cette demi-période compte pour *deux* dans le nombre des solutions communes

aux trois équations $\Theta_i = 0$, $\Theta_j = 0$ et $\mathfrak{S}_1 = 0$; car si, par exemple, il s'agit de la demi-période $u = v = w = 0$, les Θ_i sont des fonctions impaires et $\mathfrak{S}_1$ une fonction paire. Il en résulte que le degré de $\mathfrak{T}$ est

$$\frac{1}{2}(6 \times 2 \times 2 - 12 - 2) = 5.$$

La surface $\mathfrak{T}$ est donc du cinquième ordre.

27. D'après le n° 10, la surface $\mathfrak{T}$ a seize points doubles, correspondant aux seize demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_1$, sans annuler les Θ_i; aux deux fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$ correspondent (n° 11) deux courbes de $\mathfrak{T}$ situées dans un même plan; ce plan qui, dans le cas général, contenait *six* points doubles de $\mathfrak{S}$, contient *sept* points doubles de $\mathfrak{T}$, car il renferme, en plus, un point double qui correspond à l'une des demi-périodes $(pp'\alpha'')$ ou $(pp'\beta'')$. En étudiant ainsi la répartition des points doubles entre les 16 plans, on voit qu'ils sont situés quatre à quatre sur huit droites, et, d'une manière plus précise, qu'ils sont à l'intersection de quatre droites ne se coupant pas avec quatre droites s'appuyant sur les premières : ces huit droites D sont d'après cela des génératrices d'une même quadrique, Q; quatre appartiennent à un système et quatre à l'autre système.

Comme dans le cas général, la surface a un point triple O; elle contient nécessairement les huit droites D ci-dessus, et le plan mené par O et par l'une d'elles touche $\mathfrak{T}$ le long de cette droite. Il en résulte que $\mathfrak{T}$ passe par la conique polaire de O par rapport à Q [1]. La surface $\mathfrak{T}$ contient également les 12 droites issues de O et qui s'appuient sur deux droites D non concourantes.

L'équation de $\mathfrak{T}$ s'obtient assez facilement, en partant de ces propriétés. Voici le résultat :

Soient $Q(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la quadrique Q; $\Pi = 0$ celle d'un des systèmes de quatre plans tangents à Q qui découpent sur cette quadrique les huit droites D; si les coordonnées de O sont 0, 0, 0, 1, et si dans Q et Π, les coefficients de la plus haute puissance de t sont égaux à l'unité, l'équation de $\mathfrak{T}$ est

$$(12) \qquad Q\left(\Pi'_t - \frac{1}{6}Q\Pi'''_{t^3}\right) + Q'_t(Q^2 - \Pi) = 0.$$

---

[1] Cette conique correspond à la demi-période $(\alpha\alpha'\gamma'')$.

On vérifie sans difficulté que cette surface possède toutes les propriétés indiquées ci-dessus; inversement, on peut établir sa liaison avec les fonctions hyperelliptiques, en suivant une marche analogue à celle indiquée par M. Darboux à propos de la surface de Kummer (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 1493).

Une droite de O coupe la surface $\mathfrak{T}$ en deux points mobiles; si donc on projette $\mathfrak{T}$, à partir du point O, sur un plan Π, à chaque point m de ce plan correspondront deux points M_1 et M_2 de $\mathfrak{T}$: M_1 et M_2 coïncideront lorsque m sera sur la trace du cône de sommet O circonscrit à $\mathfrak{T}$ (courbe de passage). Or ce cône, du huitième ordre, se décompose en huit plans, qui sont les huit plans menés par O et par les huit droites D, et qui d'ailleurs touchent le cône du second ordre, Σ, de sommet O, circonscrit à la quadrique Q. Si donc on représente le point m, du plan Π, par les deux paramètres, λ et μ, des deux plans tangents qu'on peut mener par ce point au cône Σ, les points M_1 et M_2 coïncideront lorsque λ ou μ prendra une des huit valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_8$ qui correspondent aux huit plans ci-dessus; en d'autres termes, les coordonnées de M_1 seront fonctions rationnelles des paramètres λ, μ et du radical $\sqrt{(\lambda - a_1)\ldots(\lambda - a_8)(\mu - a_1)\ldots(\mu - a_8)}$.

Observons, pour terminer, que les plans tangents au cône Σ coupent la surface $\mathfrak{T}$ suivant des courbes du cinquième ordre, hyperelliptiques, de genre trois, et de mêmes modules : car les modules d'une de ces courbes sont les rapports anharmoniques que forment, quatre à quatre, les huit tangentes qu'on peut mener par son point triple O; ces huit tangentes sont les intersections du plan de la courbe avec les huit plans menés par O et les huit droites D, et leurs rapports anharmoniques (quatre à quatre) sont constants, puisque les huit plans et le plan mobile enveloppent un cône du second ordre, Σ. Ce sont les fonctions abéliennes appartenant à une des courbes hyperelliptiques considérées qui définissent analytiquement la surface $\mathfrak{T}$.

SUR

LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES

(Premier Mémoire).

Journal de Mathématiques, 5e série, t. V, 1899.

Considérons un système de fonctions abéliennes, à deux variables u et v, ayant pour périodes normales

$$\begin{array}{llllll} u: & 1, & 0, & g, & h, \\ v: & 1, & 1, & h, & g'; \end{array}$$

nous dirons que ces périodes vérifient une *relation de forme singulière* ou *relation singulière*, si elles sont liées par l'équation

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers, qu'on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, n'avoir aucun diviseur commun.

Les fonctions abéliennes dont les périodes vérifient une ou plusieurs relations singulières, et que nous appellerons *fonctions abéliennes singulières*, jouissent de propriétés importantes; on peut leur rattacher des *fonctions intermédiaires singulières* qui ne sont pas des fonctions thêta aux mêmes périodes. De plus, les fonctions abéliennes singulières admettent des *transformations* qui n'existent pas dans le cas général, et ce sont enfin les seules qui soient susceptibles d'une *multiplication singulière*, extension de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Le présent Mémoire est consacré à quatre questions principales qui correspondent à ses quatre parties :

1° La réduction, au moyen de transformations du premier ordre,

d'une relation singulière; on y verra apparaître un invariant entier, qui joue un rôle capital;

2° et 3° L'étude des *fonctions* intermédiaires singulières et des *courbes* qui leur correspondent sur la surface de Kummer;

4° La formation de l'équation *algébrique* qui lie les modules d'une fonction abélienne dont les périodes vérifient une relation singulière.

Nous réserverons, pour un second Mémoire, l'étude des transformations singulières et celles des multiplications complexes.

Il va sans dire que toutes ces théories s'étendent aux fonctions abéliennes d'un nombre quelconque de variables; nous aurons à revenir sur ce sujet général.

PREMIÈRE PARTIE.

Invariant d'une relation singulière.

1. Soit la relation singulière

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}g+\mathrm{B}h+\mathrm{C}g'+\mathrm{D}(h^2-gg')+\mathrm{E}=0.$$

Faisons subir aux périodes une transformation d'ordre quelconque k; soient G, H, G' les périodes nouvelles qui correspondent à g, h, g'; si l'on désigne par $(ab)_{ij}$ la quantité $a_i b_j - a_j b_i$, on a entre les périodes les relations d'Hermite (¹)

$$\text{(2)} \left\{ \begin{aligned} g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}\mathrm{G}+2(db)_{03}\mathrm{H}+(db)_{02}\mathrm{G}'+(db)_{23}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}\mathrm{G}+2(ab)_{03}\mathrm{H}+(ab)_{02}\mathrm{G}'+(ab)_{23}(\mathrm{H}^2+\mathrm{GG}')}, \\ h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}\mathrm{G}+[2(ad)_{03}-k]\mathrm{H}+(ad)_{02}\mathrm{G}'+(ad)_{23}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{(ab)_{01}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}, \\ g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}\mathrm{G}+2(ac)_{03}\mathrm{H}+(ac)_{02}\mathrm{G}'+(ac)_{23}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{(ab)_{01}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}, \\ h^2-gg' &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}\mathrm{G}+2(cd)_{03}\mathrm{H}+(cd)_{02}\mathrm{G}'+(cd)_{23}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{(ab)_{01}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}; \end{aligned} \right.$$

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL, 1855.

les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont seize entiers vérifiant les relations de la transformation d'ordre k :

$$(3) \quad \begin{cases} (ad)_{01}+(bc)_{01}=(ad)_{02}+(bc)_{02}=(ad)_{13}+(bc)_{13}=(ad)_{23}+(bc)_{23}=0, \\ (ad)_{03}+(bc)_{03}=(ad)_{12}+(bc)_{12}=k. \end{cases}$$

On peut remplacer ces relations par les suivantes qui leur sont équivalentes d'après M. Hermite :

$$(4) \quad \begin{cases} (ab)_{03}+(ab)_{22}=(ac)_{03}+(ac)_{12}=(bd)_{03}+(bd)_{12}=(cd)_{03}+(cd)_{12}=0, \\ (ad)_{03}+(ad)_{12}=(bc)_{03}+(bc)_{12}=k. \end{cases}$$

Inversement, des équations (2), on peut tirer G, H, G′, H^2-GG' en fonction de g, h, g' :

$$(5) \quad \begin{cases} G=\dfrac{(cd)_{02}+(ac)_{02}g+2(bc)_{02}h+(db)_{02}g'+(ab)_{02}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+2(bc)_{23}h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Il résulte de la forme des équations (2) que toute relation singulière $Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E=0$, entre g, h, g', se transforme en une relation singulière entre G, H, G′,

$$(6) \qquad A_1G+B_1H+C_1G'-D_1(H^2-GG')+E_1=0,$$

où

$$(7) \quad \begin{cases} A_1= A(db)_{31}+ B(ad)_{31} + C(ac)_{31}+ D(cd)_{31}+ E(ab)_{31}, \\ B_1=2A(db)_{03}+B[2(ad)_{03}-k]+2C(ac)_{03}+2D(cd)_{03}+2E(ab)_{03}, \\ C_1= A(db)_{02}+ B(ad)_{02} + C(ac)_{02}+ D(cd)_{02}+ E(ab)_{02}, \\ D_1= A(db)_{23}+ B(ad)_{23} + C(ac)_{22}+ D(cd)_{23}+ E(ab)_{23}, \\ E_1= A(db)_{01}+ B(ad)_{01} + C(ac)_{01}+ D(cd)_{01}+ E(ab)_{01}. \end{cases}$$

2. Cela posé, on vérifie immédiatement, en se servant de ces expressions et des relations (3) et (4) entre les a_i, b_i, c_i, d_i, l'identité fondamentale

$$(8) \qquad B_1^2-4A_1C_1-4D_1E_1=k^2(B^2-4AC-4DE).$$

Par exemple, dans le premier membre, où A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont remplacés par leurs valeurs (7), le coefficient de $4A^2$ est

$$(db)_{03}^2-(db)_{31}(db)_{02}-(db)_{23}(db)_{01};$$

on peut l'écrire, puisque, d'après (4), $(db)_{03} + (db)_{12} = 0$:

$$-(db)_{03}(dc)_{12} - (db)_{31}(db)_{01} - (db)_{23}(db)_{01},$$

ce qui est nul identiquement. De même, le coefficient de $4AB$ dans le premier membre de (8) est

$$(db)_{03}[2(ad)_{03} - k] - (db)_{02}(ad)_{31} - (db)_{31}(ad)_{02} \\ - (db)_{23}(ad)_{01} - (db)_{01}(ad)_{23},$$

ce qu'on peut écrire, en tenant compte de (3) et de (4),

$$-(db)_{03}(ad)_{11} - (db)_{12}(ad)_{03} - (db)_{02}(ad)_{31} - (db)_{31}(ad)_{02} \\ - (db)_{23}(ad)_{01} - (db)_{01}(ad)_{23},$$

quantité nulle identiquement.

Calculons de même le coefficient de B^2 dans le premier membre de (8); c'est, en remplaçant $2(ad)_{03} - k$ par $(ad)_{03} - (ad)_{12}$:

$$[(ad)_{03} - (ad)_{12}]^2 - 4(ad)_{31}(ad)_{02} - 4(ad)_{12}(ad)_{01};$$

ou

$$[(ad)_{03} + (ad)_{12}]^2,$$

c'est-à-dire, d'après (4), k^2, comme dans le second membre de (8). On vérifierait d'une manière toute pareille les autres termes de la relation (8), qui se trouve ainsi démontrée.

Observons maintenant que A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, obtenus sous la forme (7), peuvent avoir un plus grand diviseur commun ρ, de sorte que, si $A_1 = \rho A'$, $B_1 = \rho B'$, ..., $E_1 = \rho E'$, l'identité (8) s'écrit

$$(9) \qquad \rho^2(B'^2 - 4A'C' - 4D'E') = k^2(B^2 - 4AC - 4DE).$$

Inversement, si l'on transforme la relation

$$A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0,$$

en y remplaçant G, H, G', $H^2 - GG'$ par leurs valeurs (5), en g, h, g', $h^2 - gg'$, on retombe évidemment sur la relation singulière (1) dont on est parti, mais à un facteur entier près σ, de sorte qu'on obtient l'identité, analogue à (9),

$$(10) \qquad \sigma^2(B^2 - 4AC - 4DE) = k^2(B'^2 - 4A'C' - 4D'E').$$

Bornons-nous, pour le moment, au cas d'une *transformation du premier ordre* ($k = 1$); les identités (9) et (10) donnent immédiatement

$\rho^2\sigma^2 = 1$, c'est-à-dire $\rho^2 = \sigma^2 = 1$, et par suite

$$B'^2 - 4A'C' - 4D'E' = B^2 - 4AC - 4DE,$$

c'est-à-dire que la quantité $B^2 - 4AC - 4DE$ reste invariable par les transformations du premier ordre. Ainsi :

3. *Une transformation quelconque du premier ordre des périodes change la relation singulière*

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E *sont des entiers sans diviseur commun, en une relation singulière analogue par rapport aux nouvelles périodes; dans cette opération, la quantité*

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

demeure invariable.

On appellera cette quantité Δ l'*invariant* de la relation singulière; c'est un entier de la forme $4N$ ou $4N + 1$, selon que B est pair ou impair. Il résulte de là que la *parité* du coefficient B ne varie pas par les transformations du premier ordre.

Réduction d'une relation singulière à la forme canonique.

4. On peut, par une série de transformations du premier ordre, ramener une relation singulière à une forme canonique extrêmement simple, ne dépendant que l'invariant.

5. Je dis d'abord qu'on peut faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$.

Effectuons, en effet, une transformation du premier ordre pour laquelle on ait

$$a_3 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = 0,$$
$$a_2 = 1, \qquad d_0 = -1.$$

Les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

$$(11) \qquad b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1,$$

les autres étant identiquement satisfaites.

La relation

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

devient alors, si l'on remplace g, h, g', $h^2 - gg'$ par leurs valeurs (2), une relation de même forme en G, H, G′, où le coefficient de $H^2 - GG'$ et le terme indépendant ont pour valeurs

$$(12)\qquad \begin{cases} D_1 = -Cc_2 - Eb_2, \\ E_1 = -Ab_1 + Dc_1 + a_0(Cc_1 + Eb_1). \end{cases}$$

Il est aisé de faire disparaître D_1 : soit δ le plus grand commun diviseur de C et de E; on prendra

$$c_2 = \frac{E}{\delta}, \qquad b_2 = -\frac{C}{\delta};$$

b_2 et c_2 seront premiers entre eux, de sorte qu'on pourra toujours trouver des entiers b_1 et c_1 vérifiant (11); quant à a_0 il restera arbitraire.

6. Je dis, en second lieu, qu'on peut faire disparaître le terme constant.

Supposons, en effet, la relation singulière privée de terme en $h^2 - gg'$:

$$Ag + Bh + Cg' + E = 0;$$

effectuons la transformation du premier ordre qui n'altère pas h et g', et qui remplace g par $g + \theta$, θ étant un entier quelconque; la relation singulière devient

$$Ag + Bh + Cg' + E' = 0, \qquad E' = E + A\theta.$$

Je dis qu'on peut disposer de θ de manière que le plus grand commun diviseur de C et de E′ divise A.

Soient en effet :

δ_1 le plus grand commun diviseur de A, C, E;
$\delta_1\delta_2$ le plus grand commun diviseur de A et E;
$\frac{C}{\delta_1}$ sera premier avec δ_2.

D'après le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, on pourra choisir θ de manière que

$$\frac{E}{\delta_1\delta_2} + \theta\frac{A}{\delta_1\delta_2}$$

soit un nombre premier p, supérieur à C : le premier terme et la raison de la progression sont en effet premiers entre eux; on aura alors

$$E' = E + A\theta = \delta_1 \delta_2 p.$$

Le plus grand commun diviseur de E′ et de C est alors δ_1, puisque $\frac{C}{\delta_1}$ est premier avec $\delta_2 p$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi la relation singulière peut être supposée de la forme

(13) $$Ag + Bh + Cg' + E = 0,$$

le plus grand commun diviseur, δ, de C et E divisant A.

Effectuons maintenant la même transformation du premier ordre qu'au n° 5, la relation (13) devient

$$A_1 G + B_1 H + C_1 G' + D_1 (H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

avec (12) :

$$D_1 = -Cc_2 - Eb_2, \qquad E_1 = -Ab_1 + a_0(Cc_1 + Eb_1),$$

et je dis qu'on peut annuler D_1 et E_1.

Pour annuler D_1 prenons

$$c_2 = \frac{E}{\delta}, \qquad b_2 = -\frac{C}{\delta};$$

la relation (11) devient

$$b_1 \frac{E}{\delta} + c_1 \frac{C}{\delta} = 1,$$

et elle a des solutions en b_1, c_1, puisque $\frac{E}{\delta}$ et $\frac{C}{\delta}$ sont premiers entre eux. Soit b_1, c_1 une solution quelconque; on annulera E_1 si l'on peut choisir a_0 de manière que

$$a_0(Cc_1 + Eb_1) = Ab_1,$$

c'est-à-dire

$$a_0 \delta = Ab_1;$$

cela est possible, puisque δ divise A, par hypothèse.

Ainsi une transformation convenable du premier ordre permet de ramener la relation singulière générale à la forme

(14) $$Ag + Bh + Cg' = 0.$$

7. On peut encore pousser plus loin la réduction en employant les transformations du premier des deux types suivants :

8. *Premier type.* — Prenons

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = 0.$$

Il résulte des formules (7) que la relation (14) garde la même forme en G, H, G′, c'est-à-dire qu'il ne s'introduit ni terme en $H^2 - GG'$, ni terme constant : les quantités $(db)_{01}$, $(ad)_{01}$, $(ac)_{01}$, $(db)_{23}$, $(ad)_{23}$, $(ac)_{23}$ sont en effet toutes nulles.

Prenons en outre

$$c_2 = a_0, \qquad c_3 = -a_1, \qquad d_1 = -b_0, \qquad d_2 = b_1;$$

les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

(15) $$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1,$$

et l'on a, pour exprimer g, h, g' en G, H, G′ :

$$\begin{aligned} g &= \quad b_1^2 G - 2 b_0 b_1 H + b_0^2 G', \\ h &= - a_1 b_1 G + (a_0 b_1 + a_1 b_0) H - a_0 b_0 G', \\ g' &= \quad a_1^2 G - 2 a_0 a_1 H + a_0^2 G'. \end{aligned}$$

La relation singulière (14) devient alors

$$A_1 G + B_1 H + C_1 G' = 0,$$

étant posé

$$\begin{aligned} A_1 &= A b_1^2 - B a_1 b_1 + C a_1^2, \\ B_1 &= - 2 A b_0 b_1 + B(a_0 b_1 + a_1 b_0) - 2 C a_0 a_1, \\ C_1 &= A b_0^2 - B a_0 b_0 + C a_0^2. \end{aligned}$$

Les coefficients A_1, $-B_1$, C_1 sont précisément ceux qu'on obtient en effectuant sur la forme quadratique

$$A x^2 - B x y + C y^2$$

la substitution de déterminant 1 [à cause de (15)]

$$x = b_1 x' + b_0 y', \qquad y = a_1 x' + a_0 y'.$$

Ainsi, en désignant par $(A_1, -B_1, C_1)$ une forme quadratique quelconque équivalente à la forme $(A, -B, C)$, la relation singulière $Ag + Bh + Cg' = 0$ peut se ramener, par une transformation du premier ordre, à

$$A_1 g + B_1 h + C_1 g' = 0.$$

9. *Second type*. — Prenons maintenant

$$a_1 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_1 = d_2 = 0,$$
$$a_0 = d_0 = 1.$$

Les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

(16) $$\begin{cases} d_3 - a_3 = 1, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1, \end{cases}$$

et la relation singulière $Ag + Bh + Cg' = 0$ devient

$$A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0.$$

étant posé :

$$A' = A d_3 b_1 + C a_3 c_1,$$
$$B' = B,$$
$$C' = A b_2 + C c_2,$$
$$D' = - A d_3 b_2 - C a_3 c_2.$$
$$E' = A b_1 + C c_1.$$

Annulons D′ et E′ : à cet effet, désignons par δ le plus grand commun diviseur de A et de C, de sorte que

$$A = \delta\alpha, \qquad C = \delta\gamma,$$

α et γ étant premiers entre eux.

Pour annuler E′, posons

$$b_1 = \gamma, \qquad c_1 = -\alpha;$$

annulons D′ :

(17) $$\alpha d_3 b_2 + \gamma a_3 c_2 = 0.$$

Les formules (16) s'écrivent alors

(18) $$d_3 = 1 + a_3, \qquad \gamma c_2 + \alpha b_2 = 1.$$

Soit (b_2, c_2) une solution quelconque de la dernière équation (il en existe, puisque α et γ sont premiers entre eux); la relation (17) donne, en tenant compte de (18) :

$$a_3 = -\alpha b_2;$$

d'où

$$d_3 = 1 + a_3 = 1 - \alpha b_2,$$

et tous les nombres a_i, b_i, c_i, d_i sont déterminés.

On a alors

$$\begin{aligned}A' &= \delta\alpha\gamma(1-\alpha b_2)+\delta\alpha\gamma\alpha b_2 = \delta\alpha\gamma,\\ B' &= B,\\ C' &= \delta\alpha b_2+\delta\gamma c_2 = \delta(\gamma c_2+\alpha b_2) = \delta;\end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut faire en sorte, par une transformation du premier ordre, que C' se réduise au plus grand commun diviseur de A et de C et divise A'.

10. Cela posé, la relation singulière étant ainsi ramenée à la forme

$$C\alpha g + Bh + Cg' = 0,$$

on peut supposer B et C sans diviseur commun. Effectuons maintenant une des transformations du premier type pour laquelle on ait

$$a_0 = b_1 = a_1 = 1, \qquad b_0 = 1;$$

la relation singulière ci-dessus devient, par les formules du n° 8 :

$$(C\alpha - B + C)G + (B - 2C)H + CG' = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients de G et G', c'est-à-dire de $C(\alpha-1)-B$ et de C, est celui de B et de C, c'est-à-dire l'*unité;* on pourra donc, par une transformation du second type, ramener la relation singulière précédente à une forme analogue, où le coefficient de g' sera l'*unité*,

$$(19) \qquad Ag + Ch + g' = 0.$$

11. Distinguons maintenant deux cas selon que B est pair ou impair (on a vu au n° 3 que la parité de B ne changeait pas dans les transformations du premier ordre).

1° Si $B = 2B'$, la forme quadratique

$$Ax^2 - 2B'xy + y^2$$

peut s'écrire

$$(y - B'x)^2 + (A - B'^2)x^2;$$

elle est donc équivalente à la forme

$$(A - B'^2)X^2 + Y^2,$$

où il n'y a pas de terme en XY. Par suite, d'après le n° 8, la relation

singulière (19) peut, par une transformation du premier type, se ramener à la forme

(19 *bis*) $$A_1 g + g' = 0.$$

2° Si $B = 2B' + 1$, la forme

$$Ax^2 - (2B' + 1)xy + y^2$$

est équivalente à la forme

$$(A - B'^2 - B')X^2 - XY + Y^2,$$

car elle s'écrit

$$(y - B'x)^2 - (y - B'x)x + (A - B'^2 - B')x^2;$$

donc la relation singulière (19) peut se ramener à la forme

(19 *ter*) $$A'_1 g + h + g' = 0.$$

Observons maintenant que la quantité $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$ est un invariant; si donc Δ est la valeur de cet invariant pour la relation singulière générale dont on est parti; on aura

$$-4A_1 = \Delta, \qquad \text{si B est pair,}$$
$$1 - 4A'_1 = \Delta, \qquad \text{si B est impair;}$$

ce qui détermine A_1 et A'_1 en fonction de Δ. Voici donc le théorème final :

12. Théorème. — *Soit une relation singulière quelconque*

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0:$$

si son invariant $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$ *est divisible par* 4, *c'est-à-dire si* B *est pair, on peut, par des transformations du premier ordre des périodes, la ramener au type*

$$-\frac{\Delta}{4}g + g' = 0;$$

et si Δ *est de la forme* $4 + 1$, *c'est-à-dire si* B *est impair, au type*

$$-\frac{\Delta - 1}{4}g + h + g' = 0.$$

13. *Corollaire.* — Il résulte de là que deux relations singulières quelconques, de même invariant, sont *équivalentes*, c'est-à-dire peuvent

être ramenées l'une à l'autre par une transformation du premier ordre : l'une et l'autre en effet peuvent être ramenées à un seul et même type, où ne figure que l'invariant. Ainsi, dans le sens qui vient d'être attribué à l'équivalence,

Toutes les relations singulières de même invariant sont équivalentes.

Propriétés de l'invariant.

14. Théorème. — *L'invariant est essentiellement positif.*

Prenons, en effet, la relation singulière sous la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0, \tag{20}$$

on a

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Pour qu'il existe des fonctions abéliennes de u, v ayant pour couples de périodes 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', il faut (et il suffit), comme on sait, qu'en désignant par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g' ($g = g_2 + ig_1$, ...), on ait

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0.$$

On a entre g_1, h_1, g'_1 la relation, déduite de (20) :

$$\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1 = 0,$$

et si l'on tire h_1 de cette équation pour le porter dans l'inégalité précédente, celle-ci devient

$$\alpha^2 g_1^2 + (2\alpha\gamma - \beta^2) g_1 g'_1 + \gamma^2 g'^2_1 < 0.$$

Pour qu'il puisse exister des valeurs réelles de g_1, g'_1 vérifiant l'inégalité, il faut évidemment que le trinome en g_1 et g'_1 ait ses racines réelles et distinctes, c'est-à-dire que

$$(2\alpha\gamma - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\gamma^2 > 0 \quad \text{ou} \quad \beta^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) > 0,$$

c'est-à-dire $\Delta > 0$, ce qui démontre le théorème.

15. Théorème. — *Si l'invariant d'une relation singulière est carré parfait, une intégrale abélienne de première espèce correspondant aux périodes considérées est réductible à une intégrale elliptique; et réciproquement.*

En effet, pour qu'une intégrale de première espèce se réduise à une

intégrale elliptique, il faut et il suffit que les périodes de $u+\lambda v$ se réduisent à deux, λ désignant une constante convenable. Les périodes simultanées de u, v étant 1, 0; g, h; h, g', les périodes de $u+\lambda v$ sont

$$1, \quad \lambda, \quad g+\lambda h, \quad h+\lambda g';$$

si donc ω et ω' sont les périodes elliptiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 &= m_0\omega + n_0\omega', \\ \lambda &= m_1\omega + n_1\omega', \\ g+\lambda h &= m_2\omega + n_2\omega', \\ h+\lambda g' &= m_3\omega + n_3\omega', \end{aligned} \right.$$

les m_i, n_i étant des entiers. On en conclut, en éliminant λ, ω et ω', la relation de *forme singulière*, entre g, h, g',

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = (nm)_{03}g + [(nm)_{13} - (nm)_{02}]h \\ - (nm)_{12}g' + (nm)_{01}(h^2 - gg') - (nm)_{23}. \end{aligned} \right.$$

Je dis que l'invariant correspondant est un carré parfait, ce qui revient à établir que l'expression

$$[(nm)_{13} - (nm)_{02}]^2 + 4(nm)_{03}(nm)_{12} + 4(nm)_{01}(nm)_{23}$$

est un carré : c'est en effet le carré de $(nm)_{13} + (nm)_{02}$.

Ainsi, *dans le cas elliptique*, il existe entre les périodes une relation singulière dont l'invariant est un carré; *réciproquement*, si l'invariant d'une relation singulière est le carré n^2, cette relation est équivalente à la relation $nh - 1 = 0$, qui a même invariant : le tableau des périodes peut donc être ramené, par une transformation du premier ordre, à

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & \dfrac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \dfrac{1}{n}, & g', \end{matrix}$$

ce qui prouve bien qu'on est dans le cas elliptique; et il y a deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

16. *Remarque I.* — Les considérations précédentes fournissent une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass-Picard[1] *sur la*

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI, p. 43.

réduction des intégrales hyperelliptiques de genre deux aux intégrales elliptiques; elles montrent également, ainsi que M. Picard l'a vérifié directement(¹), que la formule de Weierstrass

$$h = \frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad nh - m = 0$$

est équivalente à la forme $nh - 1 = 0$, car l'invariant est n^2 dans les deux cas.

17. *Remarque II.* — L'invariant Δ étant positif et de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$ a pour plus petite valeur 1 : ce cas ne correspond pas à de véritables fonctions abéliennes, puisque le tableau des périodes peut se ramener, en faisant $n = 1$, à

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & 1, \\ 0, & 1, & 1, & g'; \end{matrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & g'; \end{matrix}$$

les fonctions hyperelliptiques correspondantes sont alors des combinaisons rationnelles *quelconques* de fonctions séparément elliptiques par rapport aux variables u et v.

18. *Intégrales réductibles.* — Lorsque Δ est un carré parfait, $\Delta = n^2$, on obtient les deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques par la formule $u + \lambda v$, où λ est choisi de manière que les périodes de $u + \lambda v$ se réduisent à deux : ces deux périodes, ω et ω', et la quantité λ vérifient les relations (21), d'où l'on a déduit la relation singulière (22).

Soit donc $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$ la relation entre les périodes; en écrivant qu'elle est identique à (22), on a

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} (nm)_{03} &= \rho A, \\ (nm)_{13} - (nm)_{02} &= \rho B, \\ -(nm)_{12} &= \rho C, \\ (nm)_{01} &= \rho D, \\ -(nm)_{23} &= \rho E. \end{aligned} \right.$$

(¹) *Ibid.*, t. XII, p. 153.

ρ étant un entier. Éliminant ω et ω' entre les équations (21), on trouve

$$(nm)_{12} - \lambda(nm)_{02} + (g + \lambda h)\,(nm)_{01} = 0,$$
$$(nm)_{13} - \lambda(nm)_{03} + (h + \lambda g')\,(nm)_{01} = 0.$$

Multiplions la seconde de ces relations par λ et ajoutons à la première, il vient, en tenant compte de (23),

$$-\rho C + \lambda\rho B + (g + \lambda h)\,\rho D - \lambda^2\rho A + \lambda(h + \lambda g')\,\rho D = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à λ,

$$\lambda^2(Dg' - A) + \lambda(2Dh + B) + Dg - C = 0,$$

ce qui donne pour λ les deux valeurs

$$\lambda = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{4D^2(h^2 - gg') + 4DBh + 4DAg + 4DCg' + B^2 - 4AC}}{2(Dg' - A)}.$$

En vertu de la relation $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') = -E$, la quantité sous le radical est $B^2 - 4AC - 4DE$, c'est-à-dire Δ ; donc

$$\lambda = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{\Delta}}{2(Dg' - A)}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{\Delta}}{2(Dg - C)},$$

ce qui donne les deux valeurs cherchées de λ.

19. *Extension d'un théorème de M. Poincaré.* — M. Poincaré a montré que, s'il existe plus de deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques, il en existe une infinité ; ce qui, dans notre langage, s'énonce ainsi :

S'il existe entre les périodes deux relations singulières pour chacune *desquelles l'invariant soit carré parfait, il existe une infinité de telles relations* ([1]).

Plus généralement, nous allons établir que :

*S'il existe entre les pérodes deux relations singulières dont l'*une *ait pour invariant un carré parfait, il y a une infinité de telles relations.*

Soient, en effet, les relations

$$(24) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$
$$(25) \qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

([1]) *American Journal of Mathematics*, t. VIII, p. 306.

où

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

est le carré n^2.

On en déduit, en multipliant par les entiers ρ et σ et ajoutant, la nouvelle relation singulière

$$\begin{aligned} o = (A\rho + A_1\sigma)g + (B\rho + B_1\sigma)h \\ + (C\rho + C_1\sigma)g' + (D\rho + D_1\sigma)(h^2 - gg') + E\rho + E_1\sigma, \end{aligned}$$

dont l'invariant (à un facteur carré près) est

$$\Delta\rho^2 + M\rho\sigma + \Delta_1\sigma^2;$$

Δ_1 désigne l'invariant de la relation (25) et M une fonction de A, B, ..., E; $A_1, \ldots, E_1$, qu'il est inutile d'expliciter.

Le théorème est qu'on peut déterminer la fraction $\frac{\rho}{\sigma}$ d'une infinité de manières différentes, de telle sorte que le nombre $\Delta\rho^2 + M\rho\sigma + \Delta^1\sigma^2$ soit un carré; or on peut écrire ce nombre, en remplaçant Δ par n^2, et en désignant par θ un entier quelconque,

$$(n\rho + \theta\sigma)^2 + \sigma[M\rho + \Delta_1\sigma - 2n\theta\rho - \theta^2\sigma],$$

et ce sera un carré si l'on prend $\frac{\rho}{\sigma}$ de telle sorte que le terme entre crochets s'annule, c'est-à-dire si

$$\frac{\rho}{\theta^2 - \Delta_1} = \frac{\sigma}{M - 2n\theta},$$

d'où, puisque θ est quelconque, une infinité de solutions.

C. Q. F. D.

DEUXIÈME PARTIE.

Fonctions intermédiaires singulières.

20. Soit un système de périodes normales des variables u et v

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g'; \end{matrix}$$

en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément, on a le droit de supposer que la partie imaginaire, g_1, de g est *positive*; il en sera de même de la partie imaginaire, g'_1, de g', à cause de l'inégalité nécessaire $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$.

A l'exemple de Briot et Bouquet (¹) et de M. Poincaré (²), nous appellerons *fonction intermédiaire* toute fonction entière de u, v qui se reproduit, multipliée par une exponentielle $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, quand u, v augmentent d'une période.

En désignant par $f(u, v)$ une telle fonction, on a ainsi

$$\begin{aligned}
f(u+1, v) &= e^{\lambda_1 u+\mu_1 v+\nu_1} f(u, v),\\
f(u, v+1) &= e^{\lambda_2 u+\mu_2 v+\nu_2} f(u, v),\\
f(u+g, v+h') &= e^{\lambda_3 u+\mu_3 v+\nu_3} f(u, v),\\
f(u+h, v+g') &= e^{\lambda_4 u+\mu_4 v+\nu_4} f(u, v).
\end{aligned}$$

En multipliant $f(u, v)$ par une exponentielle $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, $a, b, \ldots$ étant des constantes, on peut évidemment disposer de ces constantes de manière que le produit de l'exponentielle par $f(u, v)$, produit que nous désignerons par $\varphi(u, v)$, vérifie les relations

$$\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= e^{\theta u}\varphi(u, v);
\end{aligned}$$

il suffit pour cela de prendre

$$2a = -\lambda_1 \qquad b = -\mu_1, \qquad d+a = -\nu_1,$$
$$2c = -\mu_2, \qquad f+c = -\nu_2;$$

θ est une constante égale à $-\mu_1$.

La fonction $\varphi(u, v)$ satisfait donc aux conditions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{\theta u},\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{\lambda u+\mu v+\nu},\\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'}.
\end{aligned}\right.$$

Pour que les deux premières équations soient compatibles, il faut que

$$\theta = 2\pi i n,$$

(¹) *Traité des fonctions elliptiques.*

(²) *American Journal of Mathematics*, t. VIII, p. 316.

n étant entier; de même, la première et la seconde combinées successivement avec les deux autres donnent

$$\lambda = -2\pi i l, \qquad \lambda' = 2\pi i l', \qquad \mu = 2\pi i(m - ng), \qquad \mu' = 2\pi i(m' - nh),$$

l, l', m, m' étant entiers. Enfin la combinaison des deux dernières relations (1) donne

$$\lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h + 2q\pi i,$$

q étant entier. En remplaçant λ, μ, λ', μ' par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$l' g + (m' + l) h - m g' - n(h^2 - g g') + q = 0;$$

si donc les entiers l', $m' + l$, m, n, q ne sont pas nuls à la fois, il existe entre g, h, g' une relation singulière.

Dans le cas où

$$l' = m' + l = m = n = q = 0,$$

les relations deviennent

$$\begin{gathered} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = e^{-2\pi i l u + \nu} \varphi(u, v), \\ \varphi(u+h, v+g') = e^{-2\pi i l v + \nu'} \varphi(u, v); \end{gathered}$$

la fonction $\varphi(u, v)$ est alors une *fonction thêta*. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de relation singulière entre les périodes, les seules fonctions intermédiaires sont les fonctions thêta et leurs produits par des exponentielles $e^{au^2 + buv + \ldots}$.

21. Supposons, au contraire, qu'il y ait entre g, h, g' une relation singulière, et ramenons-la, par une transformation du premier ordre des périodes, à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

On a alors, en désignant par k un entier,

$$l' = -\alpha k, \qquad m' + l = -\beta k, \qquad m = \gamma k, \qquad n = q = 0,$$

et les relations (1) s'écrivent

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) &= e^{2\pi i[-lu + k\gamma v] + \nu} \varphi(u, v), \\ \varphi(u+h, v+g') &= e^{2\pi i[-k\alpha u - (l + k\beta) v] + \nu'} \varphi(u, v). \end{aligned} \right.$$

Si k est nul, la fonction $\varphi(u, v)$ est une *fonction thêta d'ordre l*; si

$k \gtrless 0$, il entre dans la définition de $\varphi(u, v)$ *deux* nombres entiers, l et k, que nous appellerons les *indices* de la *fonction intermédiaire singulière* $\varphi(u, v)$.

22. Considérons maintenant le déterminant δ des coefficients de u, v dans les exponentielles qui figurent aux seconds membres des deux dernières équations (2)

$$\delta = l(l + k\beta) + \alpha\gamma k^2 = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2.$$

Je dis que, en général, δ *n'est pas nul*. Car si $\delta = 0$, on a

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2},$$

ce qui exige que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant Δ de la relation singulière entre les périodes, soit un carré parfait. Ainsi, δ *ne peut être nul que dans le cas elliptique*.

23. *Cas elliptique.* — Avant d'aller plus loin, supposons-nous placés dans le cas elliptique, l et k étant tels que $\delta = 0$, et étudions les fonctions $\varphi(u, v)$ correspondantes.

A cet effet, supposons $\gamma = 1$, comme nous en avons le droit, dans la relation entre les périodes; soit

$$\beta^2 - 4\alpha = n^2,$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{\beta^2 - n^2}{4}.$$

Les nombres β et n sont nécessairement de même parité.

On a pour $\frac{l}{k}$, en écrivant $\delta = 0$,

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta \pm n}{2}.$$

Supposons, par exemple,

$$\frac{l}{k} = -\frac{\beta + n}{2}.$$

Cela posé, nous savons qu'il y a deux fonctions de la forme $u + \lambda v$, ou $\frac{1}{\lambda} u + v$, qui n'ont que deux périodes; les deux valeurs correspon-

dantes de $\frac{1}{\lambda}$ sont (n° 18)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-\beta \pm n}{-2}.$$

Prenons pour variables nouvelles, à la place de u et v, ces deux fonctions, en posant

$$n\mathrm{U} = v + \frac{\beta + n}{2} u,$$
$$n\mathrm{V} = v + \frac{\beta - n}{2} u;$$

la fonction $\varphi(u, v)$, qui vérifie les relations (2), devient une fonction $\chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, et ces relations donnent sans difficulté

$$\chi\left(\mathrm{U} + \frac{1}{n}, \mathrm{V} + \frac{1}{n}\right) + \chi\left(\mathrm{U} + \frac{\beta + n}{2n}, \mathrm{V} + \frac{\beta - n}{2n}\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$
$$\chi\left(\mathrm{U} + \frac{\beta + n}{2n} g + \frac{h}{n}, \mathrm{V} + \frac{\beta - n}{2n} g + \frac{h}{n}\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i k n \mathrm{U} + \nu},$$
$$\chi\left(\mathrm{U} + \frac{\beta + n}{2n} h + \frac{g'}{n}, \mathrm{V} + \frac{\beta - n}{2n} h + \frac{g'}{n}\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i k n \frac{n - \beta}{2} \mathrm{U} + \nu'}.$$

Si l'on pose

$$\Omega = \frac{\beta + n}{2n} g + \frac{h}{n}, \qquad \Omega' = \frac{\beta - n}{2n} g + \frac{h}{n},$$

on déduit de là, en tenant compte de la relation singulière

$$(3) \qquad \frac{\beta^2 - n^2}{g} g + \beta h + g' = 0,$$

les équations nouvelles :

$$(4) \qquad \begin{cases} \chi(\mathrm{U} + 1, \mathrm{V}) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V} + 1) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V}), \\ \chi(\mathrm{U} + \Omega, \mathrm{V} + \Omega') = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i k n \mathrm{U} + \nu}, \\ \chi\left(\mathrm{U} + \frac{n - \beta}{2}\Omega, \mathrm{V} - \frac{n + \beta}{2}\Omega'\right) = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i k n \frac{n - \beta}{2} \mathrm{U} + \nu'}. \end{cases}$$

La combinaison des deux dernières donne facilement

$$(5) \qquad \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V} + n\Omega') = \chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{\nu''},$$

ν'' étant une constante.

D'ailleurs $\chi(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ ayant, en vertu de (4), les périodes 1, 0; 0, 1, et étant une fonction entière, peut se développer par la formule de

Fourier

(6) $$\chi(U, V) = \sum A_{pq} e^{2\pi i(pU+qV)}.$$

Exprimons que cette série vérifie (5); il vient, si $A_{pq} \gtrless 0$,

$$e^{2\pi i q n \Omega'} e^{\nu''},$$

d'où, en remplaçant Ω' par sa valeur,

$$q\left[\frac{\beta - n}{2} g + h\right] = \frac{\nu''}{2\pi i} + E,$$

E étant un entier. Une telle relation ne peut avoir lieu pour deux valeurs q et q_0 de l'entier q; car on en déduirait, par soustraction,

$$(q - q_0)\left[\frac{\beta - n}{2} g + h\right] = E - E_0.$$

Soient alors g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g'; on aurait

$$h_1 = \frac{n - \beta}{2} g_1,$$

et de la relation (3) entre les périodes on tirerait

$$g'_1 = \left(\frac{n - \beta}{2}\right)^2 g_1,$$

d'où

$$h_1^2 = g_1 g'_1 = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

Par suite, dans la série de Fourier (6), q est constant et égal à q_0; en supprimant le facteur $e^{2\pi i q_0 V}$, on voit que $\chi(U, V)$ est une fonction de la seule variable U, et les relations (4) montrent que c'est une fonction thêta.

Inversement, on établit sans difficulté qu'une fonction thêta (elliptique) de U vérifie des équations de la forme (2), avec $\delta = 0$.

Remarque. — Si l'on avait supposé

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta + n}{2},$$

on aurait trouvé de même une fonction thêta de la seule variable V.

Ainsi, *dans le cas elliptique, δ peut être nul; les fonctions intermé-*

diaires correspondantes sont, à un facteur exponentiel près, des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable.

24. Laissant de côté le cas de ces fonctions thêta elliptiques, nous avons le droit de supposer δ différent de zéro; nos résultats s'appliqueront aussi bien au cas elliptique qu'au cas général.

Reprenons la relation entre les périodes sous la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

et revenons aux équations (2) qui caractérisent une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u, v)$, d'indices l et k; δ n'étant pas nul, on peut faire le changement de variables

$$(7) \qquad \begin{cases} u = -(l + k\beta)U - k\gamma V, \\ v = \qquad k\alpha\, U - \ lV; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta U = - lu + k\gamma v, \\ \delta V = - k\alpha u - (l + k\beta)v, \end{cases} \qquad \delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2.$$

La fonction $\varphi(u, v)$ devient alors une fonction $\theta(U, V)$, et les deux premières équations (2) donnent

$$(9) \qquad \theta\left(U - \frac{l}{\delta}, V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l + k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V),$$

d'où l'on déduit, en désignant par ρ et σ deux entiers arbitraires,

$$\theta\left(U - \rho\frac{l}{\delta} + \sigma\frac{k\gamma}{\delta}, V - \rho\frac{k\alpha}{\delta} - \sigma\frac{l + k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V).$$

En prenant $\rho = -l - k\beta$, $\sigma = k\alpha$, on a

$$\theta(U + 1, V) = \theta(U, V),$$

et l'on voit de même que

$$\theta(U, V + 1) = \theta(U, V).$$

Enfin, si l'on pose

$$G = \frac{-lg + k\gamma h}{\delta}, \qquad H = \frac{+lh + k\gamma g'}{\delta} = \frac{-k\alpha g - (l + k\beta)h}{\delta} \ (^1),$$

$$G' = \frac{-k\alpha h - (l + k\beta)g'}{\delta},$$

---

(1) Les deux valeurs de H sont les mêmes, en vertu de la relation

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

les deux dernières équations (2) donnent

$$(10) \quad \begin{cases} \theta(U+G, V+H) = e^{2\pi i \delta U + \nu}\,\theta(U, V), \\ \theta(U+H, V+G') = e^{2\pi i \delta V + \nu'}\,\theta(U, V); \end{cases}$$

en y joignant

$$\theta(U+1, V) = \theta(U, V+1) = \theta(U, V),$$

on voit que $\theta(U, V)$ est une fonction *thêta, d'ordre* δ, aux périodes 1, 0; 0, 1; G, H; H, G'; mais ce n'est pas une fonction θ quelconque, à cause des relations (9)

$$(9) \quad \theta\left(U - \frac{l}{\delta}, V = \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V).$$

25. *Conditions d'existence des fonctions intermédiaires singulières.* — Pour qu'il existe des fonctions thêta de U, V vérifiant (10), deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

1° En désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', il faut que $H_1^2 - G_1 G'_1 < 0$.

Or on a, en désignant par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g',

$$G_1 = \frac{-lg_1 + k\gamma h_1}{\delta}, \qquad H_1 = \frac{-lh_1 + k\gamma g'_1}{\delta} = \frac{-k\alpha g_1 - (l+k\beta)h_1}{\delta},$$

$$G_1 = \frac{-k\alpha h_1 - (l+k\beta)g'_1}{\delta},$$

d'où

$$\begin{aligned} H_1^2 - G_1 G'_1 &= \frac{1}{\delta^2}[-lh_1 + k\gamma g'_1][-k\alpha g_1 - (l+k\beta)h_1] \\ &\quad - \frac{1}{\delta^2}[-lg_1 + k\gamma h_1][-k\alpha h_1 - (l+k\beta)g'_1] \\ &= \frac{1}{\delta^2}\delta(h_1^2 - g_1 g'_1), \end{aligned}$$

et l'inégalité à vérifier devient, puisque $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$,

$$(11) \qquad \delta > 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 > 0.$$

2° En second lieu, il faut que δ, ordre de la fonction thêta, ait le signe contraire à celui de la partie imaginaire de G, c'est-à-dire que G_1 soit négatif; ainsi

$$(12) \qquad -lg_1 + k\gamma h_1 < 0,$$

inégalité évidemment compatible avec la précédente, et sur laquelle nous reviendrons.

26. Si les inégalités (11) et (12) sont vérifiées, il existe des fonctions thêta $\theta(U, V)$, satisfaisant aux relations (10); elles sont, comme l'on sait, fonctions linéaires et homogènes de δ^2 d'entre elles. Il reste à voir si, parmi ces fonctions, on peut en trouver qui vérifient les relations (9).

27. Observons d'abord, pour simplifier l'écriture, qu'en faisant le changement de variables $U = U_1 + \lambda$, $V = V_1 + \mu$, λ et μ étant des constantes, on peut déterminer ces constantes de manière que $\theta(U_1, V_1)$ satisfasse aux égalités (10), où ν et ν' ont des valeurs fixées à l'avance. On a donc le droit de supposer $\nu = 2\pi i \frac{G\delta}{2}$, $\nu' = 2\pi i \frac{G'\delta}{2}$, de sorte que la fonction $\theta(U, V)$ est telle que

$$
(13)\qquad \begin{cases} \theta(U+1, V) = \theta(U, V+1) = \theta(U, V), \\ \theta(U+G, V+H) = e^{2\pi i\delta\left(U+\frac{G}{2}\right)}\theta(U, V), \\ \theta(U+H, V+G') = e^{2\pi i\delta\left(V+\frac{G}{2}\right)}\theta(U, V); \end{cases}
$$

$$
(14)\qquad J\left(U - \frac{l}{\delta}, V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U - \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V).
$$

Or on peut exprimer les fonctions $\theta(U, V)$ qui satisfont aux équations (13) en fonction linéaire et homogène des δ^2 fonctions Θ_{00}, $\Theta_{01}, \ldots, \Theta_{pq}, \ldots$ $(0 \leqq p, q < \delta)$ définies par

$$
(15)\qquad \Theta_{pq}(U, V) = \sum_\rho \sum_\sigma e^{2\pi i[(p+\rho\delta)U + (q+\sigma\delta)V]}\, e^{\frac{\pi i}{\delta} f(p+\rho\delta,\, q+\sigma\delta)},
$$

ρ et σ variant par valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, et $f(x, y)$ désignant la forme $-(Gx^2 + 2Hxy + G'y^2)$; on a mis le signe $-$ devant $Gx^2 + \ldots$ parce que la partie imaginaire G_1 de G est négative.

Les fonctions Θ_{pq} vérifient les relations (13); de plus, il est évident que

$$
(16)\qquad \begin{cases} \Theta_{pq}\left(U + \frac{1}{\delta}, V\right) = e^{2\pi i \frac{p}{\delta}}\Theta_{pq}(U, V), \\ \Theta_{pq}\left(U, V + \frac{1}{\delta}\right) = e^{2\pi i \frac{q}{\delta}}\Theta_{pq}(U, V). \end{cases}
$$

Pour que Θ_{pq} satisfasse aux équations (14), il faut et il suffit que p et q soient choisis de manière que

(17) $$-lp-k\alpha q=m\delta, \qquad k\gamma p-(l+k\beta)q=n\delta,$$

m et n étant entiers; c'est-à-dire

(18) $$p=-m(l+k\beta)+nk\alpha, \qquad q=-mk\gamma-nl.$$

Combien y a-t-il de systèmes de valeurs de p et q de cette forme, compris entre o inclus et δ exclus?

Pour le voir, considérons p et q comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan; tous les points p, q représentés par les formules (18), où m et n prennent toutes les valeurs entières, sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes, construit avec les périodes $-(l+k\beta)-ik\gamma$ et $k\alpha-il$, et dont un sommet est à l'origine. Tout revient à chercher combien il y a de ces sommets à l'intérieur du carré de côté δ construit sur les parties positives des axes : si l'on observe que les quatre sommets de ce carré sont des sommets du réseau (ce qui se reconnaît de suite), on en conclut que le nombre cherché est le quotient de l'aire du carré et de l'aire du parallélogramme. L'aire du carré est δ^2; celle du parallélogramme est $(l+k\beta)l+k\gamma k\alpha$, c'est-à-dire δ; il y a donc $\frac{\delta^2}{\delta}=\delta$ sommets du réseau dans le carré, l'origine étant comptée, mais non les trois autres sommets du carré.

Soient alors p_1, q_1; p_2, q_2; ...; p_δ, q_δ les δ systèmes de valeurs correspondantes de p, q; les δ fonctions

$$\Theta_{p_1q_1}(U, V), \quad \Theta_{p_2q_2}(U, V), \quad \ldots, \quad \Theta_{p_\delta q_\delta}(U, V)$$

satisfont seules, parmi les fonctions Θ_{pq}, aux équations (13) et (14); en d'autres termes, les fonctions entières qui vérifient ces équations s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Remontons maintenant des variables U, V aux variables u, v, nous avons ce théorème :

28. *Soit un système de périodes* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix}$, *telles qu'on ait la relation*

$$\alpha g+\beta h+\gamma g'=0,$$

α, β, γ *étant entiers sans diviseur commun; désignons par* g_1, h_1, g'_1 *les*

parties imaginaires de g, h, g' et supposons $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, g_1 *et* $g'_1 > 0$.

Soient l et k deux entiers, tels que la quantité $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ *soit positive et que* $-lg_1 + k\gamma h_1$ *soit négatif* [1]; *il existe des fonctions* intermédiaires singulières $\varphi(u, v)$, *d'indices l et k, c'est-à-dire vérifiant les relations*

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(u+1, v) &&= \varphi(u, v+1) = (u, v), \\ &\varphi(u+g, v+h) &&= \varphi(u, v)e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\nu}, \\ &\varphi(u+h, v+g') &&= \varphi(u, v)e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\nu'}, \end{aligned} \right.$$

ν *et* ν' *désignant des constantes arbitraires données.* Ces fonctions s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Il serait aisé d'avoir le développement en série de chacune de ces δ fonctions en se servant de celui de $\Theta_{pq}(U, V)$; nous trouverons plus loin des développements un peu plus généraux d'une manière directe.

29. *Remarque I.* — Reprenons les inégalités nécessaires

$$(11) \qquad l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 > 0,$$

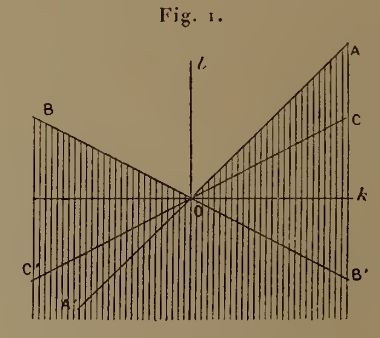
$$(12) \qquad -lg_1 + k\gamma h_1 < 0.$$

La première s'écrit

$$(2l + \beta k)^2 - k^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) > 0,$$

et l'on sait (n° 14) que l'invariant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0.

Fig. 1.



Regardons l et k comme les coordonnées d'un point dans un plan et construisons les deux droites *réelles* A'OA, B'OB qui ont pour équation

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = 0;$$

elles passent par l'origine O.

---

[1] On verra plus bas (n° 29) que ces deux conditions se réduisent à une seule.

Construisons de même la droite C′OC qui a pour équation

$$-lg_1 + k\gamma h_1 = 0;$$

je dis qu'elle est dans l'angle des droites A′OA et B′OB qui ne comprend pas l'axe des l. En effet, en substituant dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ les valeurs $l = \infty$, $k = 0$, on trouve le signe $+$; en substituant $l = \gamma h_1$, $k = g_1$, on trouve

$$\gamma^2 h_1^2 + \gamma g_1(\beta h_1 + \alpha g_1),$$

c'est-à-dire, puisque $\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1$ est nul, $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$, résultat négatif.

Il résulte de là que les deux inégalités (11) et (12) ne sont vérifiées que si le point l, k est dans l'angle BOA, qui comprend la partie *positive* de l'axe des l (région non ombrée) : g_1 est en effet > 0.

Comme il y a, dans cet angle, une infinité de points à coordonnées entières, il y a une infinité de systèmes de valeurs de l, k correspondant à des fonctions intermédiaires singulières.

Pour un quelconque de ces systèmes de valeurs, la quantité $2l + \beta k$ est positive : en effet, la droite $2l + \beta k = 0$ est dans la région ombrée, car en faisant $l = \beta$, $k = -2$ dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve

$$-(\beta^2 - 4\alpha\gamma),$$

quantité négative; par suite, pour tous les points de l'angle BOA, $2l + \beta k$ est positif.

L'inégalité (11) : $(2l + \beta k)^2 - k^2\Delta > 0$ donne alors

$$2l + \beta k > \sqrt{\Delta} \bmod k \tag{19}$$

et il est clair, géométriquement, que cette inégalité, si elle est vérifiée, entraîne les inégalités (11) et (12) : c'est donc la seule à laquelle les indices l et k soient assujettis.

30. *Remarque II.* — Il résulte de ce qui précède que, si l, k est un système de valeurs vérifiant l'inégalité (19) et m un entier positif, les systèmes ml, mk et $l + m$, k vérifieront aussi cette inégalité.

On peut voir aussi que, si l', k' est un système analogue, la même propriété appartient au système $l + l'$, $k + k'$; cela résulte de ce que le produit de deux fonctions singulières d'indices l, k et l', k' est évidem-

ment une fonction singulière d'indices $l+l'$, $k+k'$; c'est une fonction thêta si $k+k'=0$.

31. *Remarque III.* — Si l, k vérifient l'inégalité (19), on pourra trouver une infinité d'entiers l'' tels que le système l'', $-k$ la vérifie aussi : cela résulte immédiatement de ce que la partie positive de l'axe des l est dans l'angle BOA. En d'autres termes, étant donnée une fonction intermédiaire singulière φ, on peut en trouver une infinité d'autres φ' telles que le produit $\varphi\varphi''$ soit une fonction thêta.

Zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières.

32. Reprenons les relations de transformation du n° 24

$$\begin{aligned} u &= -(l+k\beta)U - k\gamma V,\\ v &= k\alpha\ U - lV, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \delta U &= -lu + k\gamma v,\\ \delta V &= -k\alpha u - (l+k\beta)v. \end{aligned}$$

Je dis qu'à un système (U, V), déterminé aux périodes près, ne correspond qu'un seul système (u, v), aux périodes près : car si l'on augmente U et V d'une période du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & G, & H,\\ 0, & 1, & H, & G', \end{matrix}$$

où

$$G = \frac{-lg + k\gamma h}{\delta},$$

$$H = \frac{-lh + k\gamma g'}{\delta} = \frac{-k\alpha g - (l+k\beta)h}{\delta},$$

$$G' = \frac{-k\alpha h - (l+k\beta)g'}{\delta},$$

on reconnaît immédiatement que u et v augmentent d'une période du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h,\\ 0, & 1, & h, & g'. \end{matrix}$$

Inversement, je dis qu'à un système (u, v) correspondent δ sys-

tèmes U, V. Donnons, en effet, à u, v les valeurs

$$x + \theta + \rho g + \sigma h, \qquad v + \theta' + \rho h + \sigma' g,$$

θ, θ', ρ, σ étant des entiers quelconques, il vient

$$\mathrm{U} = \frac{-lu + k\gamma v}{\delta} + \frac{-l\theta + k\gamma\theta'}{\delta} + \rho\frac{-lg + k\gamma h}{\delta} + \sigma\frac{-lh + k\gamma g'}{\delta},$$

$$\mathrm{V} = \frac{-k\alpha u - (l + k\beta)v}{\delta} + \frac{-k\alpha\theta - (l + k\beta)\theta'}{\delta}$$
$$+ \rho\frac{-k\alpha g - (l + k\beta)h}{\delta} + \sigma\frac{-k\alpha h - (l + k\beta)g'}{\delta}.$$

Les coefficients de ρ dans les deux seconds membres étant respectivement G et H, ceux de σ étant H et G', on peut supposer $\rho = 0$, $\sigma = 0$, sans changer U, V *aux périodes près;* tout revient ainsi à chercher combien on obtient de systèmes distincts aux périodes près par les formules

$$\mathrm{U}' = \frac{-l\theta + k\gamma\theta'}{\delta}, \qquad \mathrm{V}' = \frac{-k\alpha\theta - (l + k\beta)\theta'}{\delta},$$

lorsque θ et θ' prennent toutes les valeurs entières.

Deux systèmes θ, θ' et θ_1, θ'_1 donnent le même système U', V' aux périodes près si

$$\frac{-l(\theta - \theta_1) + k\gamma(\theta' - \theta'_1)}{\delta} = m + \rho'\mathrm{G} + \sigma'\mathrm{H},$$

$$\frac{-k\alpha(\theta - \theta_1) - (l + k\beta)(\theta' - \theta'_1)}{\delta} = n + \rho'\mathrm{H} + \sigma'\mathrm{G}'.$$

Les entiers ρ' et σ' sont nécessairement nuls, sinon, en égalant les parties imaginaires dans les deux membres, on trouverait

$$\rho'\mathrm{G}_1 + \sigma'\mathrm{H}_1 = 0, \qquad \rho'\mathrm{H}_1 + \sigma'\mathrm{G}'_1 = 0,$$

d'où $\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1\mathrm{G}'_1 = 0$, ce qui est impossible (n° 25). On a donc

$$-l(\theta - \theta_1) + k\gamma(\theta' - \theta'_1) = m\,\delta,$$
$$-k\alpha(\theta - \theta_1) - (l + k\beta)(\theta' - \theta'_1) = d\,\delta,$$

et l'on en conclut, comme au n° 27, qu'en considérant θ et θ' comme les coordonnées d'un point, deux points θ, θ' et θ_1, θ'_1 donnent le même système (U', V') s'ils sont deux points homologues d'un réseau de parallélogrammes, et réciproquement.

Ce réseau est construit sur les périodes

$$-(l+k\beta)+ik\alpha, \qquad -k\gamma-il;$$

il a l'origine pour un de ses sommets, et l'aire de son parallélogramme est δ.

Il y aura autant de systèmes (U, V) correspondant à un système (u, v) qu'il y a de points (θ, θ') à coordonnées entières dans un parallélogramme du réseau; or, l'aire du parallélogramme étant δ, ce nombre de points est évidemment δ, en comptant l'origine et en excluant les trois autres sommets. Ainsi :

A un système (u, v) *correspondent* δ *systèmes* (U, V) *distincts aux périodes près.*

33. Il est maintenant facile de trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières; c'est-à-dire le nombre des solutions communes aux deux équations $\varphi(u, v)=0$, $\varphi_1(u, v)=0$: deux solutions qui ne diffèrent que de périodes ne sont pas regardées comme distinctes.

Supposons que les deux fonctions intermédiaires considérées aient pour indices l, k et l', k'; nous les représenterons par $\varphi_{l,k}$, $\varphi_{l',k'}$, et leur nombre de zéros communs par

$$N(l, k; l', k');$$

il est clair, en effet, qu'il ne dépend que des nombres l, k; l', k'. [*Voir*, par exemple, le raisonnement de M. Poincaré pour trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions thêta [1].]

34. Distinguons maintenant plusieurs cas.

1° Supposons $l'=l$, $k'=k$. En ce cas, la transformation employée au n° 24 change $\varphi_{l,k}$ et $\varphi_{l',k'}$ en deux fonctions thêta de U et V, d'ordre δ. Ces deux fonctions ayant, d'après M. Poincaré [2], $2\delta^2$ zéros communs, et δ systèmes (U, V) correspondant à un système (u, v), le nombre des zéros communs à $\varphi_{l,k}$ et $\varphi_{l',k'}$ est $\frac{2\delta^2}{\delta}=2\delta$; on a donc

$$(20) \qquad N(l, k; l, k)=2l^2+2\beta kl+2\alpha\gamma k^2.$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X.

[2] *Ibid.*

2° Supposons $l'=1$, $k'=0$. La fonction $\varphi_{l',k'}$ est alors une fonction thêta $\mathfrak{S}(u, v)$, du premier ordre; si l'on désigne par $j(x)$ et $j_1(x)$ deux intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe de genre deux $f(x, y)=0$, qui correspond au système de périodes 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', on a identiquement

$$\mathfrak{S}[j(x)+\nu, j_1(x)+\nu_1]=0,$$

ν et ν_1 étant des constantes.

D'après cela, le nombre des zéros communs à $\varphi_{l,k}(u, v)$ et à $\mathfrak{S}(u, v)$ est le nombre des racines de l'équation

$$(21) \qquad \varphi_{l,k}[j(x)+\nu, j_1(x)+\nu_1]=0.$$

On sait trouver ce nombre lorsque $\varphi_{l,k}$ est une fonction thêta, c'est-à-dire une fonction admettant les périodes 1, 0; 0, 1 et telle que

$$\Theta(u+g, v+h)=e^{-2\pi i l u+\text{const.}}\Theta(u, v),$$
$$\Theta(u+h, v+g')=e^{-2\pi i l v+\text{const.}}\Theta(u, v);$$

on établit, dans la théorie des fonctions abéliennes, que le nombre cherché est la somme du coefficient de $-2\pi i u$ dans la première exponentielle et du coefficient de $-2\pi i v$ dans la seconde, c'est-à-dire $l+l$, ou $2l$. Le même raisonnement, *appliqué dans les mêmes termes* (¹) à la fonction $\varphi_{l,k}$ qui a les périodes 1, 0; 0, 1 et qui satisfait à

$$\varphi_{l,k}(u+g, v+h)=e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\text{const.}}\varphi_{l,k}(u, v),$$
$$\varphi_{l,k}(u+h, v+g')=e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\text{const.}}\varphi_{l,k}(u, v),$$

montre que le nombre des racines de l'équation (21) est encore la somme des coefficients de $-2\pi i u$ dans la première exponentielle et de $-2\pi i v$ dans la seconde, c'est-à-dire $l+l+\beta k=2l+\beta k$.

Ainsi

$$\mathrm{N}(l, k; 1, 0)=2l+\beta k,$$

quantité qu'on sait être toujours positive (n° 29).

Si l'on observe que le produit de l' fonctions thêta du premier ordre est une fonction thêta d'ordre l', il est clair que

$$(22) \qquad \mathrm{N}(l, k; l', 0)=l'(2l+\beta k)=2ll'+\beta kl'.$$

(¹) *Voir*, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. II, p. 617-618.

3° Supposons $k' = k$. Soit, par exemple, $l > l'$. Le produit de $\varphi_{l',k}$ par une fonction thêta d'ordre $l - l'$ est une fonction $\varphi_{l,k}$, par suite

$$N(l, k; l', k) = N(l, k; l, k) - N(l, k; l - l', 0),$$

d'où, en vertu de (20) et (22),

$$N(l, k; l', k) = 2ll' + \beta k(l + l') + 2\alpha\gamma k^2. \tag{23}$$

4° Supposons l, k, l', k' quelconques, mais toutefois k et k' de même signe. Si m est entier et positif, la puissance m de $\varphi_{l,k}$ est une fonction $\varphi_{ml,mk}$, et, par suite,

$$N(ml, mk; nl', nk') = mn N(l, k; l', k'),$$

m et n étant entiers et positifs.

Prenons $m = \varepsilon k'$, $n = \varepsilon k$, ε étant $+1$ si k et $k' > 0$, et ε étant -1 si k et $k' < 0$; on a

$$N(l, k; l', k') = \frac{1}{kk'} N(\varepsilon k' l, \varepsilon kk'; \varepsilon kl', \varepsilon kk'),$$

et, d'après (23),

$$N(l, k, l', k') = \frac{1}{kk'}[2kk'll' + \beta\varepsilon kk'(\varepsilon k'l + \varepsilon kl') + 2\alpha\gamma k^2 k'^2],$$

c'est-à-dire

$$N(l, k, l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk' \qquad (\text{si } kk' > 0). \tag{24}$$

5° Enfin, si l, k, l', k' sont quelconques et $k > 0$, $k' < 0$, en multipliant $\varphi_{l',k'}$ par $\varphi_{l'',-k'}$, le produit sera une fonction thêta $\varphi_{l'+l'',0}$; on a en effet observé (n° 31) qu'on peut toujours trouver une infinité d'entiers l'' tels qu'il existe une fonction $\varphi_{l'',-k'}$. Il résulte de là que

$$N(l, k; l', k') = N(l, k; l' + l'', 0) - N(l, k; l'', -k'),$$

et, d'après les formules (22) et (24),

$$N(l, k; l', k') = 2l(l' + l'') + \beta k(l' + l'') - 2ll'' - \beta(-lk' + kl'') + 2\alpha\gamma kk',$$

c'est-à-dire que, *dans tous les cas*,

$$N(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk', \tag{25}$$

formule générale qui contient toutes les précédentes.

35. *Remarque I.* — Il est aisé de vérifier que si l, k et l', k' satisfont,

comme cela doit être, à l'inégalité (19), c'est-à-dire si les points l, k et l', k' sont situés dans l'angle BOA (n° 29), le nombre

$$2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'$$

est toujours positif. Car la droite

$$2yl' + \beta(k'y + l'x) + 2\alpha\gamma xk' = 0,$$

où y et x sont les coordonnées courantes, est la polaire du point l', k' par rapport aux droites A'OA et B'OB; elle n'est donc pas dans l'angle AOB : si donc on substitue à y et x, dans le premier membre de l'équation de la droite, les coordonnées l, k et l', k' de deux points de cet angle, on obtient des résultats de même signe, c'est-à-dire que

$$[2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'][2l'^2 + 2\beta k'l' + 2\alpha\gamma k'^2] > 0,$$

et le second facteur étant > 0, le premier l'est également.

36. *Remarque II.* — La formule générale (25) qui donne le nombre des zéros communs à deux fonctions intermédiaires sigulières $\varphi_{l,k}$, $\varphi_{l',k'}$ s'applique au cas, exclu jusqu'ici (n° 24), où $\varphi_{l,k}$ est une fonction thêta d'une seule variable (correspondant à un cas elliptique et à $\delta = 0$). Car si $\varphi_{l'',k''}$ est une fonction intermédiaire telle que δ'' ne soit pas nul, le produit $\varphi_{l,k}\varphi_{l'',k''}$ est une fonction intermédiaire qui n'est pas une fonction thêta d'une variable, et l'on a évidemment

$$\begin{aligned} N(l, k; l', k') &= N(l + l'', k + k''; l', k') - N(l'', k''; l', k') \\ &= 2(l + l'')l' + \beta[(l + l'')k' + l'(k + k'')] + 2\alpha\gamma(k + k'')k' \\ &\quad - 2l''l' - \beta(l''k' + l'k'') - 2\alpha\gamma k'k'', \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$N(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'.$$

C. Q. F. D.

Fonctions intermédiaires normales.

37. Cherchons s'il peut exister des fonctions intermédiaires paires ou impaires en u et v.

La fonction intermédiaire la plus générale étant (n°s 20-21) le produit d'une fonction $\varphi_{l,k}$ par une exponentielle $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, il s'agit de reconnaître si le produit $e^{du+fv}\varphi_{l,k}(u, v)$ peut être pair ou impair. En

le désignant par $F_{l,k}(u, v)$, on voit que $F_{l,k}(u, v)$ satisfait aux relations

$$\begin{aligned}
F(u+1, v) &= A_1 F(u, v),\\
F(u, v+1) &= B_1 F(u, v),\\
F(u+g, v+h) &= A_2 e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)} F(u, v),\\
F(u+h, v+g') &= B_2 e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]} F(u, v),
\end{aligned}$$

les A et B étant des constantes.

De plus, $F(-u, -v) = \pm F(u, v)$; en exprimant que cette dernière relation est compatible avec chacune des précédentes, on trouve sans difficulté les valeurs des constantes A_1, B_1, A_2, B_2, de sorte que, en désignant par ω, ω', θ, θ' des nombres égaux à 0 ou à 1, on obtient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
F(u+1, v) &= e^{\omega\pi i} F(u, v),\\
F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v),\\
F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i} e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\pi i(-lg+k\gamma h)} F(u, v),\\
F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i} e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\pi i[-k\alpha h-(l+k\beta)g']} F(u, v).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, les fonctions intermédiaires paires ou impaires, d'indices l et k, vérifient nécessairement les relations (26); inversement, nous appellerons *fonctions intermédiaires normales* celles qui satisfont à ces relations, *qu'elles soient ou non paires ou impaires*.

Nous dirons que la *caractéristique* de $F(u, v)$ est $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

Les fonctions normales de caractéristique nulle sont celles pour lesquelles $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

38. Nous aurons besoin des fonctions intermédiaires normales pour étudier les courbes tracées sur les surfaces de Kummer singulières et former l'équation aux modules qui correspond à une relation singulière entre les périodes; en particulier, nous étudierons celles des fonctions normales qui sont paires ou impaires et nous rechercherons pour quelles demi-périodes elles s'annulent.

A cet effet, nous commencerons par indiquer le développement en série d'une fonction normale.

Développements en série.

39. La fonction normale $F(u, v)$, d'indices l et k, qui vérifie les deux premières relations (26), peut se développer en série de Fourier

sous la forme

$$F(u, v) = \sum_{m,n} A_{m,n} e^{2\pi i\left(m+\frac{\omega}{2}\right)u + 2\pi i\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)v}.$$

Pour abréger les calculs ultérieurs, nous poserons

$$A_{m,n} = B_{m,n} e^{\pi i\left[G_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)^2 + 2H_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\left(n+\frac{\omega'}{2}\right) + G'_0\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)^2\right]},$$

où G_0, H_0, G'_0 désignent les quantités

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} G_0 &= \frac{(l+k\beta)g + k\gamma h}{\delta}, \\ H_0 &= \frac{-k\alpha g + lh}{\delta} = \frac{(l+k\beta)h + k\gamma g'}{\delta}, \\ G'_0 &= \frac{-k\alpha h + lg'}{\delta}. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} g &= lG_0 - k\gamma H_0, \\ h &= k\alpha G_0 + (l+k\beta)H_0 = lH_0 - k\gamma G'_0, \\ g' &= k\alpha H_0 + (l+k\beta)G'_0. \end{aligned}$$

Le terme général de la série $F(u, v)$ s'écrit ainsi

$$B_{m,n} e^{2\pi i\left(m+\frac{\omega}{2}\right)u + 2\pi i\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)v} e^{\pi i\left[G_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)^2 + 2H_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\left(n+\frac{\omega'}{2}\right) + G'_0\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)^2\right]},$$

ce que nous écrirons également

$$B_{m,n} T_{m,n}(u, v).$$

Exprimons maintenant que $F(u, v)$ vérifie la troisième des relations (26), c'est-à-dire que

$$e^{\theta\pi i} B_{m,n} T_{m,n} e^{2\pi i\left[\left(m+\frac{\omega}{2}\right)g + \left(n+\frac{\omega'}{2}\right)h\right]} = B_{m+l,n-k\gamma} T_{m+l,n-k\gamma} e^{2\pi i\left(-lu+k\gamma v-\frac{1}{2}lg+\frac{1}{2}k\gamma h\right)}.$$

Les exponentielles en u et v se détruisent dans les deux membres, et il reste, après un calcul qui ne présente aucune difficulté,

$$B_{m,n} = e^{\theta\pi i} B_{m+l,n-k\gamma}.$$

De même, en exprimant que $F(u, v)$ vérifie la quatrième des relations (26), on trouve

$$B_{m,n} = e^{\theta'\pi i} B_{m+k\alpha,n+l+k\beta}.$$

Enfin, si l'on pose

$$B_{m.n} = C_{m.n} e^{\frac{\pi i}{\delta}[\theta(ml+k\beta)-nk\alpha)+\theta'(mk\gamma+nl)]},$$

on a

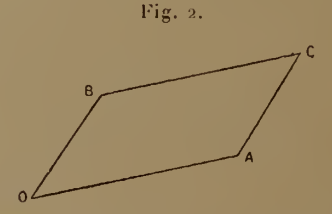
$$C_{m,n} = C C_{m+l,n-k\gamma} = C_{m+k\alpha,n+l+k\beta}.$$

Ainsi $C_{m,n}$ ne change pas quand on augmente m et n de l et $-k\gamma$, ou de $k\alpha$ et $l+k\beta$; géométriquement, si m, n sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, $C_{m,n}$ a la même valeur en tous les points homologues d'un réseau de parallélogrammes, construit sur les périodes $l-ik\gamma$, $k\alpha+i(l+k\beta)$. Construisons ce réseau à partir de l'origine, et appelons *parallélogramme principal* celui qui a pour sommets les points O, A, B, C de coordonnées :

$$\begin{array}{llll} O: x = 0, & y = 0; & B: x = k\alpha, & y = l+k\beta; \\ A: x = l, & y = -k\gamma; & C: x = l+k\alpha, & y = -k\gamma+l+k\beta. \end{array}$$

L'aire de ce parallélogramme est δ, il y a donc, à son intérieur et sur les côtés OA, OB, δ points de coordonnées entières; soit p, q, un

Fig. 2.



de ces points (parmi lesquels figure l'origine); à ce point et aux points homologues dans le réseau correspondent, dans $F(u,v)$ les termes pour lesquels $m = p + l\rho + k\alpha\sigma$, $n = q - k\gamma\rho + (l+k\beta)\sigma$, ρ et σ étant des entiers quelconques. La somme de ces termes est, à un facteur constant près, la série $\Phi_{p,q}(u,v)$:

$$\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left[q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{1}\right]v}$$
$$\times e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')} e^{\pi i f\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2},\, q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right)},$$

$f(x,y)$ désignant la forme

$$G_0 x^2 + 2H_0 xy + G'_0 y^2.$$

Comme p et q peuvent recevoir δ systèmes de valeurs, correspondant

aux points à coordonnées entières du parallélogramme principal, on voit que toute fonction singulière normale, d'indices l et k, $F(u, v)$, est une *fonction linéaire et homogène, quelconque d'ailleurs, des δ séries correspondantes* $\Phi_{p,q}$. Ces séries sont *convergentes*, car si l'on désigne par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G_0, H_0, G'_0, je dis que

$$H_1^2 - G_1 G'_1 < 0 \quad \text{et} \quad G_1 > 0.$$

En effet, d'après (27),

$$\begin{aligned}\delta^2(H_1^2 - G_1 G'_1) = [-k\alpha g_1 + l h_1][(l+k\beta)h_1 + k\gamma g'_1] \\ - [(l+k\beta)g_1 + k\gamma h_1][-k\alpha h_1 + l g'_1] = (h_1^2 - g_1 g'_1)\delta,\end{aligned}$$

ce qui démontre la première inégalité. Reste à établir que

$$(l + k\beta)g_1 + k\gamma h_1 > 0.$$

Or, l et k étant des coordonnées courantes, la droite

$$(l + k\beta)g_1 + k\gamma h_1 = 0$$

n'est pas dans l'angle BOA (n° 29), car, si l'on fait $l = \beta g_1 + \gamma h_1$, $k = -g_1$ dans le trinome $l^2 + \beta k l + k^2 \alpha\gamma$, on trouve $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$, résultat négatif. Comme g_1 est > 0, l'expression $l g_1 + k(\beta g_1 + \gamma h_1)$ est positive pour tous les points l, k de l'angle BOA, ce qui établit la proposition.

Les δ fonctions $\Phi_{p,q}$ sont évidemment distinctes linéairement.

Remarque. — *Dans toute la suite de ce Mémoire, nous supposerons, comme nous en avons le droit,* $\gamma = 1$, *c'est-à-dire que nous ramènerons la relation singulière entre les périodes à la forme*

$$\alpha g + \beta h + g' = 0.$$

Fonctions normales singulières paires et impaires.

40. Cherchons maintenant s'il y a des fonctions normales paires ou impaires. Plusieurs cas sont à distinguer.

41. *Caractéristique nulle.* — On a

$$\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0;$$

la fonction $\Phi_{p,q}(u, v)$ est

$$\Phi_{p,q}(u, v) = \sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i(p+l\rho+k\alpha\sigma)u+2\pi i[q-k\rho+(l+k\beta)\sigma]} e^{\pi i f[(p+l\rho+k\alpha\sigma,\, q-k\rho+(l+k\beta)\sigma]}.$$

Si ε et ε' désignent des entiers quelconques, il est clair qu'on ne change pas $\Phi_{p,q}$ en changeant p en

$$p + \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha$$

et q en

$$q - \varepsilon k + \varepsilon'(l + k\beta),$$

car cela revient à augmenter ρ et σ de ε et ε'.

Maintenant, changeons dans $\Phi_{p,q}(u, v)$ les signes de u et v : cela revient à changer simultanément les signes de p, q, ρ, σ sans altérer u et v, et, par suite,

$$(28) \qquad \Phi_{p,q}(-u, -v) = \Phi_{-p,-q}(u, v)$$

et, d'après la remarque précédente, pour que $\Phi_{p,q}(u, v)$ soit paire, il faut et il suffit que

$$p = -p + \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha, \qquad q = -q - \varepsilon k + \varepsilon'(l + k\beta),$$

c'est-à-dire

$$(29) \qquad 2p = \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha, \qquad 2q = -\varepsilon k + \varepsilon'(l + k\beta).$$

On peut supposer, sans diminuer la généralité, que ε et ε' sont égaux à o ou à 1 ; car augmenter ε, par exemple, de 2, revient à augmenter p et q de l et $-k$, ce qui ne change pas la fonction $\Phi_{p,q}$. En d'autres termes, on trouvera les fonctions $\Phi_{p,q}$ paires en prenant les valeurs entières de p et de q données par les équations (29), où ε et ε' désignent o ou 1 ; il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ impaire.

On voit que les équations (29) sont toujours satisfaites pour $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, $p = q = 0$, c'est-à-dire que $\Phi_{0,0}$ est toujours paire. Résolvons ces équations par rapport à ε et ε' :

$$(30) \qquad \begin{cases} \varepsilon\delta = 2p(l + k\beta) - 2qk\alpha, \\ \varepsilon'\delta = 2pk + 2ql. \end{cases}$$

42. Faisons maintenant des hypothèses :

1° δ (c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \alpha k^2$) *est impair*. — Les relations (30) montrent que ε et ε' sont pairs, c'est-à-dire $\varepsilon = \varepsilon' = 0$.

Il n'y a donc pas d'autre fonction $\Phi_{p,q}$ paire que $\Phi_{0,0}$. Mais la somme de $\Phi_{p,q}(u,v)$ et $\Phi_{-p,-q}(u,v)$ est paire, d'après (28), et la différence impaire. On voit ainsi qu'il existe $1+\frac{\delta-1}{2}=\frac{\delta+1}{2}$ fonctions normales paires d'indices l, k, et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires, linéairement distinctes.

2° *δ est pair.* — Ce cas se subdivise en deux autres :

a. k pair, l (nécessairement) *pair.* — Les équations (29) donnent des valeurs entières de p, q pour les quatre systèmes de valeurs (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) de ε et ε' : il y a donc quatre fonctions $\Phi_{p,q}$ paires ; les $\delta-4$ autres combinées deux à deux donnent $\frac{\delta-4}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-4}{2}$ impaires. Donc, on a finalement $\frac{\delta+4}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-4}{2}$ impaires, linéairement distinctes.

b. k impair. — Alors δ, c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\alpha k^2$ étant pair, α est de la parité de $l^2+\beta l$ ou $l(l+\beta)$.

Les équations (29) s'écrivent *suivant le module* 2 :

$$0\equiv\varepsilon l+\varepsilon' l(l+\beta),\qquad 0\equiv\varepsilon+\varepsilon'(l+\beta)\qquad(\text{mod}\,2).$$

Quelle que soit la parité de l, elles se réduisent à une seule, la seconde. On peut donc faire $\varepsilon'=0$ ou 1, ε s'en déduit : il y a donc deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires, et, par suite, on a $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires, linéairement distinctes.

Ainsi, en résumé :

Nombre des fonctions normales singulières d'indices l, k et de caractéristique nulle.

		Paires.	Impaires.	
δ *impair*		$\frac{\delta+1}{2}$	$\frac{\delta-1}{2}$	
δ *pair*	*k pair*	$\frac{\delta+4}{2}$	$\frac{\delta-4}{2}$	$(\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2)$
	k impair	$\frac{\delta+2}{2}$	$\frac{\delta-2}{2}$	

43. *Caractéristique quelconque.* — La fonction $\Phi_{p,q}$ a pour expression

$$\Phi_{p,q}(u, v) = \sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left[q-k\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right]v}$$
$$\times\, e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')} e^{\pi i f\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2},\, q-k\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Si ε et ε' sont des entiers quelconques, on voit que, si l'on change p et q en $p+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha$ et $q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta)$, cela revient à changer ρ et σ en $\rho+\varepsilon$, $\sigma+\varepsilon'$ dans la première et la troisième exponentielle : $\Phi_{p,q}$ se reproduit donc multiplié par le facteur $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta')}$, qui est égal à ± 1.

Changeons maintenant u, v en $-u$, $-v$: cela revient à changer simultanément p, q, ρ, σ en $-p-\omega$, $-q-\omega'$, $-\rho$, $-\sigma$, dans la première et la troisième exponentielle; comme la deuxième demeure inaltérée par ce changement, on voit que

$$\Phi_{p,q}(-u, -v) = \Phi_{-p-\omega,-q-\omega'}(u, v).$$

Par suite, pour que $\Phi_{p,q}(u, v)$ soit paire ou impaire, il faut et il suffit qu'on ait, en désignant par ε, ε' deux entiers égaux à 0 ou 1 :

$$p = -p-\omega+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha,$$
$$q = -q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta);$$

$\Phi_{p,q}$ sera paire si $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon\theta')} = 1$, impaire si $= -1$.

Les relations précédentes s'écrivent

$$(31)\qquad \begin{cases} 2p+\omega = \varepsilon l+\varepsilon' k\alpha, \\ 2q+\omega' = -\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta), \end{cases}$$

d'où

$$(32)\qquad \begin{cases} \varepsilon\delta = (2p+\omega)(l+k\beta)-(2q+\omega')k\alpha, \\ \varepsilon'\delta = (2p+\omega)k \qquad\qquad +(2q+\omega')l. \end{cases}$$

44. Distinguons deux cas :

1° δ *impair.* — Les relations (32) donnent alors, suivant le module 2,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \omega(l+k\beta)-\omega' k\alpha \\ \varepsilon' &\equiv \omega k+\omega' l \end{aligned}\right\} \pmod 2;$$

ce qui donne un seul système de valeurs pour ε et ε', c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire.

Elle est paire si $\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta' \equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire si

$$\omega[(l+k\beta)\theta + k\theta'] + \omega'[-k\alpha\theta + l\theta'] \equiv 0 \pmod 2;$$

et impaire dans le cas contraire. Il y a donc, par un raisonnement déjà fait, $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions normales impaires, ou inversement.

2° δ *pair*. — Subdivisons encore ce cas en deux :

a. *k pair, l* (nécessairement) *pair*. — Les relations (31) donnent, suivant le module 2,

$$\omega \equiv 0, \qquad \omega' \equiv 0,$$

c'est-à-dire $\omega = \omega' = 0$. Si donc ω et ω' ne sont pas nuls à la fois, il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire; c'est-à-dire qu'il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

Si $\omega = \omega' = 0$, on peut satisfaire aux équations (31) en prenant ε et ε' égaux à volonté à 0 ou 1 ; il y a donc quatre fonctions $\Phi_{p,q}$ qui sont paires ou impaires, selon la parité de $\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta'$, c'est-à-dire suivant la parité des quatre nombres 0, θ, θ', $\theta + \theta'$. Comme θ et θ' ne sont pas nuls simultanément, puisque la caractéristique n'est pas nulle, deux de ces quatre nombres sont pairs et deux impairs. Donc il y a deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires et deux impaires; par suite, il y a $2 + \frac{\delta-4}{2} = \frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

En résumé, dans le cas de δ pair et k pair, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires, linéairement distinctes.

b. *k impair*. — En ce cas, δ étant pair, on a

$$\alpha \equiv l(l+\beta) \pmod 2,$$

et les équations (31) s'écrivent, suivant le module 2,

$$(33) \qquad \begin{cases} \omega \equiv \varepsilon l + \varepsilon' l(l+\beta) \\ \omega' \equiv \varepsilon + \varepsilon'(l+\beta) \end{cases} \pmod 2;$$

on en conclut

$$\omega \equiv l\omega' \pmod 2.$$

Si donc ω n'est pas de même parité que $l\omega'$, il n'y a pas de fonc-

tion $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire, et, par suite, il existe $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires, linéairement distinctes.

Si $\omega' \equiv l\omega' \pmod 2$, la première équation (33) est une conséquence de la seconde, qui donne

$$\varepsilon \equiv \omega' + \varepsilon'(l + \beta) \qquad \pmod 2.$$

On peut donc prendre $\varepsilon' = 0$ et 1 : on a deux valeurs correspondantes de ε, et par suite deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires ou impaires, selon la parité de $\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta'$, c'est-à-dire du nombre

$$\theta\omega' + \varepsilon'[\theta' + \theta(l + \beta)].$$

Si $\theta' + \theta(l + \beta)$ est impair, la parité de ce nombre change avec celle de ε', de sorte qu'il y a une fonction $\Phi_{p,q}$ paire et une impaire, d'où $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

Si $\theta' + \theta(l + \beta)$ est pair, les deux fonctions $\Phi_{p,q}$ sont paires lorsque $\theta\omega'$ est pair; elles sont impaires dans le cas contraire. On a donc $\frac{\delta - 2}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta - 2}{2}$ impaires, ou inversement, selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair.

45. Le tableau suivant résume tous ces résultats.

Nombre des fonctions normales singulières d'indices l, k, et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \theta \\ \omega' & \theta' \end{vmatrix}$, *non nulle.*

		Paires.	Impaires.
δ *impair*	$\omega[(l + k\beta)\theta + k\theta'] + \omega'[-k\alpha\theta + l\theta']$ *pair*....	$\frac{\delta + 1}{2}$	$\frac{\delta - 1}{2}$
	id. *impair*....	$\frac{\delta - 1}{2}$	$\frac{\delta + 1}{2}$
δ *pair*	k *pair*........	$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$
	k *impair*........	$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$
	toutefois si k *impair*, $\omega + l\omega'$ et $\theta' + \theta(l + \beta)$ *pairs* : $\theta\omega'$ *pair*.......	$\frac{\delta + 2}{2}$	$\frac{\delta - 2}{2}$
	id. : $\theta\omega'$ *impair*....	$\frac{\delta - 2}{2}$	$\frac{\delta + 2}{2}$

$$(\delta = l^2 + \beta k l + \alpha k^2).$$

Ces résultats supposent que la relation singulière entre g, h, g' a été ramenée à $\alpha g + \beta h + g' = 0$; l et k sont les deux indices des fonctions considérées, et $\delta = l^2 + \beta k l + \alpha k^2$.

46. *Remarque I.* — Désignons par $\mathrm{F}(u, v)$ une fonction normale, d'indices l, k, de caractéristique nulle et qui soit paire ou impaire; considérons la demi-période

$$\frac{\mathfrak{P}}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h, \qquad \frac{\mathfrak{P}'}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon' + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g',$$

où ε, ε', λ, λ' sont 0 ou 1, et posons

$$(34) \qquad \psi(u, v) = e^{\pi i \{(l\lambda + k\alpha\lambda')u + [-k\lambda + (l+k\beta)\lambda']v\}}\,\mathrm{F}\left(u + \frac{\mathfrak{P}}{2},\, v + \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right).$$

On vérifie aisément que $\psi(u, v)$ est une fonction normale, soit paire, soit impaire, d'indices l, k, et dont la caractéristique est définie par

$$(35) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \omega \equiv l\lambda + k\alpha\lambda', & \theta \equiv -l\varepsilon + k\varepsilon' \\ \omega' \equiv -k\lambda + (l + k\beta)\lambda', & \theta' \equiv -k\alpha\varepsilon - (l + k\beta)\varepsilon' \end{array}\right. \pmod 2.$$

Inversement, si l'on se donne ω, θ, ω', θ', *et si l'on suppose δ impair*, ces équations donnent toujours pour λ, λ' et ε, ε' des valeurs entières (0 ou 1), car le déterminant $\delta \equiv 1 \pmod 2$, par hypothèse. On en conclut, puisque les δ fonctions normales d'indices l, k, et de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires (ou inversement, n° 45): 1° que les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions du premier groupe se déduisent des $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires de mêmes indices et de caractéristique nulle par l'addition à u, v d'une même demi-période; 2° que les $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions du second groupe se déduisent des $\frac{\delta-1}{1}$ fonctions impaires de caractéristique nulle par l'addition de la même demi-période, le tout à un même facteur exponentiel près (34).

Aux quinze demi-périodes, autres que $u = 0$, $v = 0$, correspondent ainsi les fonctions des quinze caractéristiques non nulles.

47. *Remarque II.* — *Supposons δ pair et k impair.* Les δ fonctions normales d'indices l, k et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ se divisent en

$\frac{\delta}{2}$ paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires, sauf pour les caractéristiques qui vérifient les congruences

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \pmod 2, \qquad (\text{n}^\text{o}\ 45).$$

Ces caractéristiques *remarquables* sont au nombre de quatre, à savoir :

$$\begin{matrix} \omega \equiv 0 & 0 & l & l \\ \omega' \equiv 0 & 0 & 1 & 1 \\ \theta \equiv 0 & 1 & 0 & 1 \\ \theta' \equiv 0 & l-\beta & 0 & l+\beta \end{matrix} \pmod 2;$$

parmi elles figure la caractéristique nulle.

Supposons alors que, dans la formule (34), $F(u, v)$ désigne une fonction normale, paire ou impaire, d'indice l, k et de caractéristique nulle; la caractéristique de $\psi(u, v)$ sera, en faisant $k \equiv 1$ dans (35) et $\alpha \equiv l(l+\beta)$,

$$\begin{matrix} \omega \equiv l[\lambda + (l+\beta)\lambda'], & \theta \equiv l\varepsilon + \varepsilon' \\ \omega' \equiv \lambda + (l+\beta)\lambda', & \theta' \equiv (l+\beta)(l\varepsilon + \varepsilon') \end{matrix} \pmod 2,$$

c'est-à-dire que

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta);$$

$\psi(u, v)$ appartient donc à une des *quatre caractéristiques remarquables*. On déduit de là, sans difficulté, les résultats suivants :

1° Si l'on augmente u, v d'une des quatre demi-périodes telle que

$$\lambda + (l+\beta)\lambda' \equiv 0, \qquad l\varepsilon + \varepsilon' \equiv 0,$$

c'est-à-dire d'une des quatre demi-périodes définies par

$$\begin{matrix} \varepsilon \equiv 0 & 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon' \equiv 0 & 0 & l & l \\ \lambda \equiv 0 & l+\beta & 0 & l+\beta \\ \lambda' \equiv 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \pmod 2,$$

les fonctions singulières paires (ou impaires) de mêmes indices l, k, ayant une des quatre caractéristiques remarquables, se transforment respectivement les unes dans les autres,

2° Les δ fonctions normales d'indices (l, k), de l'une des trois caractéristiques remarquables, autre que la caractéristique nulle, se divisent

en $\frac{\delta+2}{2}$ paires et $\frac{\delta-2}{2}$ impaires, ou inversement (n° 45) : les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions se déduisent des $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle par l'addition à u, v d'une même demi-période ; et les $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions se déduisent des $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires de caractéristique nulle par l'addition de la même demi-période. Il y a d'ailleurs quatre demi-périodes répondant à la question.

TROISIÈME PARTIE.

Courbes singulières sur les surfaces de Kummer.

48. Considérons une surface hyperelliptique singulière quelconque, c'est-à-dire une surface pour laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions abéliennes singulières de deux paramètres, u et v.

Dans mon Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (ce *Journal*, t. IX, 4e série, p. 42 et 45), j'ai reconnu, en partant d'un important théorème de M. Appell [1], que l'équation de toute courbe algébrique, tracée sur une quelconque de ces surfaces, s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire, et réciproquement.

Si la surface hyperelliptique est singulière, elle admettra donc des courbes algébriques qui n'existent pas dans le cas général, et qu'on obtient en annulant les fonctions intermédiaires singulières; ce sont ces *courbes singulières* que nous allons maintenant étudier, en supposant que la surface hyperelliptique sur laquelle elles sont tracées est une *surface de Kummer*.

49. Nous représenterons paramétriquement la surface de Kummer par le procédé de M. Weber (*Crelle*, t. 84) : les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point sont des fonctions thêta du second ordre, normales

---

[1] *Journal de Math.*, 4e série, t. VII, p. 195-196.

et à caractéristique nulle. Ces fonctions étant toutes paires, à un point de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ correspondent (aux périodes près) les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$; il en résulte sans difficulté que l'équation d'une courbe quelconque tracée sur $\mathfrak{K}$ s'obtient en annulant une fonction intermédiaire paire ou impaire, et réciproquement (*voir*, par exemple, notre Mémoire cité plus haut, p. 48 et 49); en d'autres termes :

L'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire normale, paire ou impaire, de caractéristique quelconque; et réciproquement.

Si la fonction intermédiaire est une fonction thêta, c'est-à-dire si son indice k est nul (n° 21), la courbe est une courbe *ordinaire*, existant sur toute surface de Kummer; si k est différent de zéro, la fonction intermédiaire et la courbe correspondante sont *singulières* et réciproquement.

D'après cela, les courbes ordinaires sont un cas particulier des courbes singulières; il suffira, dans les formules relatives aux secondes, de supposer $k=0$ pour les appliquer aux premières.

50. *Degré d'une courbe singulière.* — Soit $F_{l,k}(u, v)=0$ l'équation d'une telle courbe; son degré est la moitié du nombre des zéros communs à $F_{l,k}(u, v)$ et à une fonction thêta paire, d'ordre deux, et de caractéristique nulle; c'est-à-dire à $F_{l,k}(u, v)$ et à une fonction $F_{2,0}(u, v)$; d'après la formule (25) du n° 34, le degré est donc

$$\frac{1}{2}(2.2l+\beta.2k), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2l+\beta k,$$

quantité toujours positive (n° 29).

Si $\beta\equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire si l'invariante Δ de la relation fondamentale entre les périodes est de la forme $4n$, on voit que le degré des courbes singulières est toujours pair; si $\beta\equiv 1 \pmod 2$, c'est-à-dire si Δ est de la forme $4n+1$, le degré peut être pair ou impair, selon la parité de k.

51. *Familles de courbes singulières.* — Les fonctions singulières nor-

males, de mêmes indices l, k, de même caractéristique (quelconque d'ailleurs), et qui sont soit paires, soit impaires, sont des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles (nos 40-44) : les courbes qu'on obtient sur la surface de Kummer en les égalant à zéro, appartient donc à une série *linéaire;* nous dirons qu'elles forment une *famille de courbes singulières*.

Une famille est donc déterminée : 1° par les indices l et k; 2° par la caractéristique; 3° par le caractère de fonction paire ou impaire des fonctions normales correspondantes. Par suite, à des indices donnés l, k correspondent, puisqu'il y a seize caractéristiques, *trente-deux* familles de courbes singulières.

Si $k=0$, les trente-deux famille deviennent des familles de courbes ordinaires, puisque les fonctions normales correspondantes sont de fonctions thêta.

52. Les courbes d'une même famille singulière passent *toutes* par un certain nombre de points doubles de la surface de Kummer, comme on va l'établir. Auparavant il est utile de rappeler quelques définitions et propriétés relatives aux points doubles.

53. *Points doubles de la surface de Kummer.* — Ils sont au nombre de seize, situés six à six dans seize plans dits *singuliers*, qui touchent respectivement $\mathfrak{K}$ suivant une conique. Leurs arguments u, v sont les seize demi-périodes, c'est-à-dire

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\lambda g+\frac{1}{2}\lambda' h,$$

$$v=\frac{1}{2}\varepsilon'+\frac{1}{2}\lambda h+\frac{1}{2}\lambda' g',$$

où ε, ε', λ, λ' sont égaux à 0 ou 1.

Rappelons d'abord la notation que nous avons proposée (¹) pour les seize plans singuliers et les seize points doubles; les plans singuliers sont représentés respectivement par un des seize symboles :

$$11',\quad 12',\quad 13',\ 14',\quad 21',\quad 22',\quad \ldots,\quad 44',$$

(¹) Ce *Journal*, t. IX. 4e série, p. 58.

obtenus en combinant un des caractères 1, 2, 3, 4 avec un des caractères 1′, 2′, 3′, 4′; les seize points doubles sont représentés par les mêmes symboles (avec parenthèses)

$$(11'),\quad (12',)\quad \ldots,\quad (44').$$

Les six points doubles situés dans le plan $\alpha\alpha'$ sont

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\delta\alpha);$$

de même, les six plans singuliers qui passent par le point $(\alpha\alpha')$ sont

$$\alpha\beta',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha\delta',\quad \beta\alpha',\quad \gamma\alpha',\quad \delta\alpha'.$$

Quatre points doubles forment un *groupe de Rosenhain*, lorsque le tétraèdre qui les a pour sommets a pour faces quatre plans singuliers : il y a quatre-vingt de ces tétraèdres. Si l'on dispose les caractères 1′, 2′, 3′, 4′ sur une ligne horizontale, dans un ordre quelconque, les caractères 1, 2, 3, 4 sur une ligne parallèle située au-dessous, dans un ordre également quelconque, et si l'on représente le point $(\alpha\alpha')$ par la droite qui joint les caractères α et α', les *symboles graphiques* des groupes ou tétraèdres de Rosenhain sont

$\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ $\quad \alpha'$ $\quad \alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ $\quad \alpha'\ \delta'$

α $\quad \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ $\quad \alpha\ \beta$ $\quad \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$

De même quatre points doubles forment un *groupe de Göpel*, lorsque le tétraèdre qui les a pour sommets n'a pour face aucun plan singulier : il y a soixante tétraèdres de Göpel ayant pour symboles graphiques

Le symbole graphique des six points doubles situés dans un même plan singulier est

Indiquons enfin les symboles de groupes remarquables de huit points,

formant ce qu'on peut appeler un *octaèdre de Göpel*, et que nous retrouverons par la suite : ce sont

Il y a trente de ces octaèdres.

54. Quant à la relation entre la notation symbolique et les demi-périodes correspondantes, elle est marquée au Tableau suivant :

Symboles.	Demi-périodes correspondantes. ε.	ε'.	γ.	γ'.
(11')	0	0	0	0
(12')	0	1	0	0
(21')	1	0	0	0
(22')	1	1	0	0
(31')	0	0	1	0
(32')	0	1	1	0
(41')	1	0	1	0
(42')	1	1	1	0
(13')	0	0	0	1
(14')	0	1	0	1
(23')	1	0	0	1
(24')	1	1	0	1
(33')	0	0	1	1
(34')	0	1	1	1
(43')	1	0	1	1
(44')	1	1	1	1

La demi-période ε, ε, λ, λ' est

$$u = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h,$$

$$v = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g'.$$

55. Il est intéressant de voir ce que deviennent les symboles ci-dessus, quand on ajoute aux seize demi-périodes une même demi-période, autre que $u=0$, $v=0$; voici les résultats qu'on vérifie immédiatement à l'aide du Tableau précédent.

Ajouter la demi-période $u = \frac{1}{2}$, $v = 0$ revient à permuter 1 et 2, 3 et 4

sans changer 1′, 2′, 3′, 4′; c'est-à-dire que la demi-période, qu'on obtient en ajoutant $\frac{1}{2}$, o à (23′), est (13′). Ainsi :

L'addition de la demi-période	$\varepsilon = 0$,	$\varepsilon' = 1$,	$\lambda = 0$,	$\lambda' = 0$	permute	1 et 2 ; 3 et 4 ; ... de même :
» »	1	0	0	0	»	1′, 2′; 3′, 4′;
» »	1	1	0	0	»	1, 2 ; 3, 4 ; 1′, 2′; 3′, 4′;
» »	0	0	1	0	»	1, 3 ; 2, 4 ;
» »	0	1	1	0	»	1, 4 ; 2, 3 ;
» »	1	0	1	0	»	1, 3 ; 2, 4 ; 1′, 2′; 3′, 4′;
» »	1	1	1	0	»	1, 4 ; 2, 3 ; 1′, 2′; 3′, 4′;
» »	0	0	0	1	»	1′, 3′; 2′, 4′;
» »	0	1	0	1	»	1, 2 ; 3, 4 ; 1′, 3′; 2′, 4′;
» »	1	0	0	1	»	1′, 4′; 2′, 3′;
» »	1	1	0	1	»	1, 2 ; 3, 4 ; 1′, 4′; 2′, 3′;
» »	0	0	1	1	»	1, 3 ; 2, 4 ; 1′, 3′; 2′, 4′;
» »	0	1	1	1	»	1, 4 ; 2, 3 ; 1′, 3′; 2′, 4′;
» »	1	0	1	1	»	1, 3 ; 2, 4 ; 1′, 4′; 2′, 3′;
» »	1	1	1	1	»	1, 4 ; 2, 3 ; 1′, 4′; 2′, 3′;

zéros remarquables des fonctions normales, paires ou impaires.

56. *Toutes* les fonctions normales paires de caractéristique donnée correspondant à des indices l et k donnés, ou *toutes* les fonctions normales impaires correspondantes, s'annulent pour une demi-période quelconque, c'est-à-dire pour

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2}\varepsilon' + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' g, \\ v = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g. \end{cases}$$

On a en effet, d'aprés les relations mêmes qui définissent une fonction normale $F(u, v)$, d'indices l et k,

$$\begin{aligned} &F(u + \varepsilon + \lambda g + \lambda' h', v + \varepsilon' + \lambda h + \lambda' g') \\ &\quad = F(u, v)\, e^{\pi i(\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta')} \times e^{2\pi i\lambda(-lu+kv) + 2\pi i\lambda'[-k\alpha u - (l+k\beta)v]} \\ &\quad \times e^{\pi i\lambda^2(-lg+kh) + 2\pi i\lambda\lambda'(-lh+kg')} \times e^{\pi i\lambda'^2[-k\alpha h - (l+kg']\beta)}. \end{aligned}$$

Si l'on fait, dans cette relation,

$$u = -\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda g - \frac{1}{2}\lambda' h, \qquad v = -\frac{1}{2}\varepsilon' - \frac{1}{2}\lambda h - \frac{1}{2}\lambda' g',$$

et si, pour abréger, on désigne par $-\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $-\frac{\mathfrak{P}'}{2}$ ces valeurs de u, v, il vient

$$F\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) = F\left(-\frac{\mathfrak{P}}{2}, -\frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) e^{\pi i[\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\lambda\theta+\lambda'\theta'+l(\varepsilon\lambda+\varepsilon'\lambda')+k(\varepsilon'\lambda+\varepsilon'\lambda')+k(\varepsilon'+\lambda\alpha\varepsilon\lambda'+\beta\varepsilon'\lambda')]}.$$

Si donc le nombre

$$(2) \qquad N = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + k(\varepsilon'\lambda + \alpha\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')$$

est *pair*, la relation précédente montre que les fonctions $F(u, v)$ *impaires* s'annulent pour la demi-période $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'}{2}$; si ce nombre est *impair*, ce sont les fonctions $F(u, v)$ *paires* qui s'annulent.

57. Il est aisé de trouver les demi-périodes *qui* annulent les fonctions $F(u, v)$ paires ou impaires. Plusieurs cas sont à distinguer :

58. Premier cas : *k est pair*. — Le nombre $N(2)$ est alors de même parité que

$$\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') :$$

donc, ω, ω', θ, θ' étant donnés, c'est-à-dire la caractéristique étant donnée, les fonctions normales paires (impaires), pour lesquelles l a la même parité, s'annulent pour les mêmes demi-périodes. En particulier, elles s'annulent pour les mêmes demi-périodes que les fonctions thêta normales paires (impaires) dont l'ordre a la parité de l; géométriquement, si k est pair, les courbes des familles singulières passent sur la surface de Kummer par les mêmes groupes de points doubles que les courbes des familles ordinaires. Ainsi ([1]) :

k étant pair,
Si l est pair, $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2$ l'est également :

1° *Les $\frac{\delta+4}{2}$ fonctions singulières normales paires, d'indices l, k et de caractéristique nulle, ne s'annulent simultanément par aucune demi-période : il leur correspond une famille, $\frac{\delta+4}{2} - 1$ fois infinie, de courbes singulières ne passant par aucun point double de la surface de Kummer;*

([1]) *Voir* notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX de ce *Journal*, 4e série, p. 72-74.

2° *Les* $\frac{\delta-4}{2}$ *fonctions singulières normales impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les seize demi-périodes; il leur correspond une famille,* $\frac{\delta-4}{2}-1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par les seize points doubles;*

3° Les $\frac{\delta}{2}$ *fonctions singulières normales paires, de caractéristique donnée non nulle, s'annulent pour huit demi-périodes et les* $\frac{\delta}{2}$ *fonctions normales impaires de même caractéristique s'annulent pour les huit autres; il correspond à ces deux séries de fonctions deux familles* $\frac{\delta}{2}-1$ *fois infinie, de chacune, de courbes singulières; les courbes de la première famille passent toutes par huit points doubles formant un octaèdre de Göpel, les courbes de la seconde famille passent par les huit autres points doubles qui forment aussi un pareil octaèdre.*

Si l *est impair,* δ *est également impair :*

Les δ *fonctions singulières normales, de caractéristique donnée quelconque, se divisent en* $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions paires et* $\frac{\delta-1}{2}$ *fonctions impaires, ou inversement, selon que la caractéristique est paire ou impaire* ([1]) *: aux* $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions correspond une famille,* $\frac{\delta+1}{2}-1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par six points doubles situés dans un même plan singulier de la surface de Kummer; aux* $\frac{\delta-1}{2}$ *fonctions correspond une famille,* $\frac{\delta-1}{2}-1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par les dix autres points doubles.*

59. Deuxième cas : k *est impair.* — Le nombre N(2) a la parité de

$$\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\lambda\theta+\lambda'\theta'+l(\varepsilon\lambda+\varepsilon'\lambda')+\varepsilon'\lambda+\alpha\varepsilon\lambda'+\beta\varepsilon'\lambda'.$$

D'ailleurs $l^2+\beta l+\alpha\equiv\delta \pmod 2$, et en remplaçant α par sa valeur

([1]) La caractéristique est paire ou impaire, selon que $\omega\theta=\omega'\theta'$ est pair ou impair.

tirée de cette congruence, on est ramené au nombre

$$(3)\quad \begin{cases} 3\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \varepsilon'\theta' \\ \quad + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + \delta\varepsilon\lambda' + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda'. \end{cases}$$

Distinguons maintenant trois sous-cas désignés ci-dessous par I, II, III.

60. 1° δ *est impair.* — D'après le n° 46 les fonctions singulières normales paires et impaires, de caractéristique donnée quelconque, se déduisent (à un facteur exponentiel près) des fonctions singulières normales, paires et impaires ou impaires et paires, par l'addition à u, v d'une demi-période,

Il suffit donc d'étudier les demi-périodes qui annulent les fonctions paires et impaires de caractéristique nulle.

Le nombre (3) est alors, en y faisant $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$ et $\delta = 1$,

$$l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + \varepsilon\lambda' + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon' + \varepsilon l][\lambda + \lambda'(l+\beta)] + \varepsilon\lambda'.$$

S'il est $\equiv 1$, les fonctions paires de caractéristique nulle s'annulent pour la demi-période $(\varepsilon, \varepsilon', \lambda, \lambda')$, sinon ce sont les fonctions impaires. Or l'équation

$$xy + zt \equiv A \pmod 2,$$

où x, y, z, t sont 0 ou 1, a *six* solutions si $A \equiv 1$, et *dix* si $A \equiv 0$; pour $A \equiv 1$, ces solutions sont

$$\begin{array}{lllllll} x = 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ y = 0, & 1, & 0, & 1, & 1, & 1, \\ z = 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1, \\ t = 1, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0. \end{array}$$

Les fonctions paires, caractéristique nulle, d'indice l et k, s'annulent donc pour les six demi-périodes

$$\begin{array}{lllllll} \varepsilon \equiv & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ \varepsilon' \equiv & l, & l, & l+1, & 1, & 1, & l+1, \\ \lambda \equiv & l+\beta, & l+\beta+1, & l+\beta, & 1, & l+\beta+1, & 1, \\ \lambda' \equiv & 1, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0, \end{array} \pmod 2.$$

Les notations symboliques de ces six demi-périodes sont les suivantes, suivant la parité de β et de l :

β *pair*
- *l pair*..... (23′), (43′), (24′), (32′), (34′), (42′)
- *l impair*... (44′), (24′), (43′), (32′), (14′), (41′)

β *impair*
- *l pair*..... (43′), (23′), (44′), (32′), (14′), (42′)
- *l impair*... (24′), (44′), (23′), (32′), (34′), (41′)

On a ainsi trois types de groupes de six points doubles de $\mathfrak{K}$ (les deux derniers revenant évidemment au même) qu'on peut caractériser aisément au point de vue géométrique.

Le premier type : (23′), (43′), (24′), (32′), (34′), (42′) est formé par les six sommets non communs à deux tétraèdres de Göpel qui ont un sommet commun (22′).

Le deuxième type : (44′), (24′), (43′), (32′), (14′), (41′) est formé par les six sommets non communs à deux tétraèdres de Rosenhain qui ont un sommet commun (42′).

Le troisième type : (43′), (23′), (44′), (32′), (14′), (42′) est formé par les six sommets non communs à un tétraèdre de Göpel et à un tétraèdre de Rosenhain qui ont un sommet commun (41′).

Les fonctions impaires, de caractéristique nulle, d'indices l et k, s'annulent pour les *dix* demi-périodes n'annulant pas les fonctions paires.

On passe enfin du cas de la caractéristique nulle à celui des caractéristiques non nulles en ajoutant une même demi-période à chacun des groupes ci-dessus; les notations symboliques des groupes nouveaux se déduisent des précédentes par les règles du n° 55, et l'on reconnaît que les systèmes de six points doubles correspondants possèdent encore les mêmes propriétés géométriques. En résumé :

61. I. *k étant impair, si δ est impair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l et k, de caractéristique

donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions paires et* $\frac{\delta-1}{2}$ *fonctions impaires, ou inversement* [1] : *aux* $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions correspond une famille* $\frac{\delta+2}{2}-1$ *fois infinie, de courbes singulières passant toutes par six points doubles, non situés dans un même plan singulier, de la surface de Kummer; aux* $\frac{\delta-1}{2}$ *fonctions correspond une famille,* $\frac{\delta-1}{2}-1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par les dix autres points doubles.*

Comme il y a seize caractéristiques, on trouve ainsi, pour l et k donnés (k impair), *seize groupes* remarquables de six points doubles, qui ne dépendent que de la parité de l et de β et qui se déduisent de l'un d'eux par l'addition d'une des quinze demi-périodes autres que (o, o) : on vérifie sans difficulté que deux quelconques de ces groupes ont toujours deux points communs et deux seulement; les huit points non communs forment un octaèdre de Göpel; enfin un même point singulier appartient à six groupes.

62. 2° δ *est pair, et la caractéristique est telle que*

$$\omega \equiv l\omega'; \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2).$$

Comme d'après le n° 47 on passe au cas de la caractéristique non nulle en ajoutant une demi-période convenable aux fonctions normales, paires et impaires, de caractéristique nulle, nous supposons encore

$$\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0.$$

Le nombre (3) est alors, en faisant $\delta \equiv 0$, de la parité de

$$l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon' + \varepsilon l][\lambda + \lambda'(l+\beta)].$$

On a donc à étudier une congruence de la forme

$$xy \equiv \text{A} \qquad (\text{mod } 2).$$

Si $\text{A} \equiv 1$, on a nécessairement $x = 1$, $y = 1$, d'où

$$\varepsilon' + \varepsilon l \equiv 1, \qquad \lambda + \lambda'(l+\beta) = 1 \qquad (\text{mod } 2),$$

---

[1] Selon que $\omega[(l+\beta)\theta + \theta'] + \omega'[-\alpha\theta + l\theta']$ est pair ou impair (n° 45).

ce qui donne pour zéros des fonctions *paires*, de caractéristique nulle, d'indices l, k, les *quatre* demi-périodes

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon \equiv 0, & 0, & 1, & 1, \\
\varepsilon' \equiv 1, & 1, & l+1, & l+1, \\
\lambda \equiv 1, & l+\beta+1, & 1, & l+\beta+1, \\
\lambda' \equiv 0, & 1, & 0, & 1.
\end{array}$$

Les notations symboliques correspondantes sont, suivant la parité de β et de l :

β *pair*	l *pair*....................	(32'), (34'), (42'), (44')
	l *impair*..................	(32'), (14'), (41'), (23')
β *impair*	l *pair*..................	(32'), (14'), (42'), (24')
	l *impair*.................	(32'), (34'), (41'), (43')

Si β est pair, les quatre points forment donc un *groupe de Göpel*; si β est impair, *un groupe de Rosenhain*.

Les fonctions impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les *douze* demi-périodes qui n'annulent pas les fonctions paires.

Pour passer au cas des trois caractéristiques remarquables non nulles telles que $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta\,(l+\beta)$, il suffit d'ajouter une demi-période aux groupes de quatre points ci-dessus; on retrouve soit le même groupe (pour quatre demi-périodes y compris o, o), soit trois autres groupes, dont chacun correspond à une des trois caractéristiques. Le Tableau suivant fait connaître ces groupes de quatre points, selon la parité de β et de l; on y a récrit le groupe qui répond à la caractéristique nulle.

β *pair.*

l pair.				*l impair.*			
(32'),	(34'),	(42'),	(44'),	(32'),	(14'),	(41'),	(23'),
(31'),	(33'),	(41'),	(43'),	(42'),	(24'),	(31'),	(13'),
(12'),	(24'),	(22'),	(24'),	(12'),	(34'),	(21'),	(43'),
(11'),	(13'),	(21'),	(23'),	(21'),	(44'),	(11'),	(33'),

β impair

l pair.				*l impair.*			
(32′),	(14′),	(42′),	(24′),	(32′),	(34′),	(41′),	(43′),
(31′),	(13′),	(41′),	(23′),	(31′),	(33′),	(42′),	(44′),
(12′),	(34′),	(22′),	(44′),	(12′),	(14′),	(21′),	(23′),
(11′),	(33′),	(21′),	(43′),	(22′),	(24′),	(11′),	(13′),

Ce Tableau montre que, dans chaque cas, les quatre groupes de quatre points comprennent une (et une seule) fois chacun des seize points doubles; deux quelconques d'entre eux forment un octaèdre de Göpel ; si β est pair, chaque groupe est un groupe de Göpel; si β est impair, un groupe de Rosenhain. En résumé :

63. II. *k étant impair, si δ est pair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l et k, appartenant à l'une des quatre caractéristiques remarquables $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ telles que $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta) \pmod 2$, se divisent en $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires, ou inversement selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair : aux $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta+2}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant toutes par quatre points doubles de la surface de Kummer; aux $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-2}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant par les douze autres points doubles.

Aux quatre caractéristiques correspondent ainsi quatre groupes de quatre points doubles, dont l'ensemble forme les seize points doubles de la surface.

64. 3° *δ est pair et la caractéristique ne vérifie pas.*

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \qquad \pmod 2.$$

En ce cas, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires d'indices l, k et autant d'impaires; la caractéristique ne peut être nulle. Le nombre (3) s'écrit, en y faisant $\delta = 0$,

$$\omega\varepsilon + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + l(l+\beta)\,\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}[]
[\varepsilon' + \varepsilon l + \theta][\lambda + \lambda'(l+\beta) + \omega'] + [\varepsilon + \theta' + \theta(l+\beta)][\omega + l\omega'] \\
+ \lambda'[\theta' + \theta(l+\beta)] + \omega[\theta' + \theta(l+\beta)] + \omega'[\theta' l + \theta l(l+\beta) + \theta].
\end{aligned}$$

Pour trouver les demi-périodes qui annulent les fonctions paires, il faut exprimer que ce nombre $\equiv 1 \pmod 2$; ce qui, en représentant par Ω les termes de la seconde ligne, formés de quantités connues, donne une congruence de la forme

$$xy + z(\omega + l\omega') + t[\theta' + \theta(l+\beta)] \equiv \Omega + 1 \pmod 2.$$

Or, par hypothèse, $\omega + l\omega'$ et $\theta' + (l+\beta)$ ne sont pas pairs à la fois, de sorte que, si $\omega + l\omega' \equiv 1$ par exemple, on peut donner à x, y, t les valeurs 0 ou 1 et en déduire toujours une valeur de z. On a donc en tout *huit* solutions en x, y, z, t; à une de ces solutions x, y, z, t correspond la solution en $\varepsilon, \varepsilon', \lambda, \lambda'$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon' + \varepsilon l + \theta \equiv x, & \varepsilon + \theta' + \theta(l+\beta) \equiv z, \\ \lambda + \lambda'(l+\beta) + \omega' \equiv y, & \lambda' \equiv t, \end{cases}$$

ce qui donne un et un seul système $\varepsilon, \varepsilon', \lambda, \lambda'$. Donc les fonctions normales paires s'annulent pour *huit* demi-périodes, et les fonctions impaires pour les huit autres : les groupes de points doubles correspondants ne dépendent, d'après (4), que de la parité de l et de β.

Comme les caractéristiques qui ne vérifient pas $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$ sont au nombre de $16 - 4 = 12$, on trouve ainsi, pour l et β de parités données, $2 \times 12 = 24$ groupes de huit points doubles; ces groupes sont *associés* deux à deux de telle sorte que les huit points doubles qui ne font pas partie d'un groupe appartiennent à l'autre. Il suffira donc d'écrire douze des vingt-quatre groupes; les douze autres s'en déduisent immédiatement. Voici les résultats :

β *pair.*

l pair.

(44') (24') (43') (32') (12') (13') (21') (31')
(44') (24') (43') (41') (11') (13') (22') (42')
(44') (24') (32') (41') (11') (12') (23') (33')
(44') (43') (32') (14') (22') (23') (11') (31')
(44') (43') (14') (41') (21') (23') (12') (42')
(44') (32') (14') (41') (21') (22') (13') (33')
(24') (43') (32') (41') (21') (22') (23') (34')
(44') (24') (43') (14') (33') (34') (11') (21')
(44') (24') (14') (41') (31') (34') (13') (23')
(24') (32') (14') (41') (42') (11') (21') (31')
(24') (43') (32') (14') (42') (13') (23') (33')
(43') (32') (14') (41') (11') (12') (13') (34')

et les douze groupes associés.

l impair.

(23') (43') (24') (34') (11') (13') (14') (22')
(24') (32') (34') (42') (11') (12') (14') (33')
(23') (43') (32') (42') (11') (12') (13') (44')
(43') (32') (34') (42') (22') (11') (31') (41')
(23') (32') (34') (42') (21') (22') (13') (33')
(43') (24') (32') (42') (21') (22') (14') (44')
(23') (43') (24') (42') (33') (11') (21') (41')
(23') (43') (24') (32') (31') (33') (12') (22')
(23') (43') (34') (42') (31') (33') (14') (44')
(23') (24') (32') (34') (44') (11') (21') (31')
(23') (24') (34') (42') (41') (44') (12') (22')
(43') (24') (32') (34') (41') (44') (13') (33')

et les douze groupes associés.

β impair.

l pair.

(32′)	(34′)	(43′)	(12′)	(13′)	(14′)	(21′)	(31′)
(34′)	(41′)	(43′)	(11′)	(13′)	(14′)	(22′)	(42′)
(32′)	(34′)	(41′)	(11′)	(12′)	(14′)	(23′)	(33′)
(32′)	(41′)	(43′)	(11′)	(12′)	(13′)	(24′)	(44′)
(34′)	(41′)	(43′)	(21′)	(23′)	(24′)	(12′)	(42′)
(31′)	(34′)	(41′)	(21′)	(22′)	(24′)	(13′)	(33′)
(32′)	(34′)	(43′)	(22′)	(23′)	(24′)	(11′)	(31′)
(32′)	(41′)	(43′)	(21′)	(22′)	(23′)	(14′)	(44′)
(32′)	(41′)	(43′)	(31′)	(33′)	(12′)	(22′)	(42′)
(34′)	(41′)	(43′)	(31′)	(33′)	(14′)	(24′)	(44′)
(32′)	(34′)	(41′)	(42′)	(44′)	(11′)	(21′)	(31′)
(32′)	(34′)	(43′)	(42′)	(44′)	(13′)	(23′)	(33′)

et les douze groupes associés.

l impair.

(32′)	(42′)	(24′)	(12′)	(13′)	(21′)	(31′)	(41′)
(32′)	(42′)	(24′)	(11′)	(12′)	(23′)	(33′)	(43′)
(32′)	(14′)	(42′)	(11′)	(12′)	(13′)	(34′)	(44′)
(32′)	(14′)	(42′)	(21′)	(22′)	(13′)	(33′)	(43′)
(32′)	(14′)	(42′)	(22′)	(23′)	(11′)	(31′)	(41′)
(32′)	(42′)	(24′)	(21′)	(22′)	(23′)	(34′)	(44′)
(14′)	(42′)	(24′)	(33′)	(34′)	(11′)	(21′)	(41′)
(32′)	(14′)	(24′)	(31′)	(33′)	(34′)	(12′)	(22′)
(14′)	(42′)	(24′)	(31′)	(34′)	(13′)	(23′)	(43′)
(32′)	(14′)	(24′)	(44′)	(11′)	(21′)	(31′)	(43′)
(42′)	(14′)	(24′)	(41′)	(43′)	(44′)	(12′)	(22′)
(32′)	(14′)	(24′)	(41′)	(44′)	(13′)	(23′)	(33′)

et les douze groupes associés.

On peut faire sur ces Tableaux les remarques suivantes :

1° β *pair.* — Il y a *huit* plans singuliers qui contiennent respectivement *quatre* points d'un groupe; par exemple, pour le groupe

$$(44')\quad(24')\quad(43')\quad(32')\quad(12')\quad(13')\quad(21')\quad(31'),$$

ces huit plans sont

$$42',\quad 22',\quad 41',\quad 23',\quad 11',\quad 14',\quad 33',\quad 34'.$$

Considérons un de ces plans : il contient, outre quatre points du groupe, deux autres points doubles; ces deux points et les quatre points du groupe non situés dans le plan forment un des groupes de six points rencontrés aux n°s 60-61; si l est pair, ce groupe de six points est un de ceux qui correspondent à l impair, et inversement.

Chacun des groupes de huit points comprend deux points de l'un quelconque des quatre groupes de quatre points rencontrés au n° 62, et qui correspondent à la même parité de l.

2° β *impair.* — Il y a *deux* plans singuliers qui contiennent respectivement *cinq* points d'un groupe; par exemple, pour le groupe

$$(32')\quad(34')\quad(43')\quad(12')\quad(13')\quad(14')\quad(21')\quad(31'),$$

ces deux plans sont

$$11' \text{ et } 33'.$$

Un de ces plans contient en outre un sixième point double; ce point et les trois points du groupe non situés dans le plan forment un des groupes de quatre points (Rosenhain) rencontrés au n° 62 : si l est pair, c'est un des groupes de quatre points qui correspondent à l impair, et inversement.

En résumé :

65. III. *k étant impair, si δ est pair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l, k, appartenant à l'une des douze caractéristiques qui ne vérifient pas les congruences $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta) \pmod 2$, *se divisent en $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires; à ces deux groupes de fonctions correspondent deux familles, $\frac{\delta}{2}-1$ fois infinie chacune, de courbes singulières; les courbes d'une famille passent toutes par huit points doubles de la surface de Kummer, et les courbes de l'autre famille par les huit autres points doubles.*

66. *Remarque I.* — D'une manière générale, tous les groupes de points doubles rencontrés aux n°s 58-65 ne dépendent, pour une caractéristique donnée, que de la parité de β, de l et de k.

67. *Remarque II.* — Si *k est impair*, les groupes de points doubles situés sur les courbes singulières d'une même famille possèdent la propriété suivante : un plan singulier quelconque contient toujours un nombre pair de ces points lorsque β est pair, et un nombre impair lorsque β est impair. Cela résulte, soit des Tableaux donnés ci-dessus, soit de ce qu'une courbe (singulière ou non) tracée sur la surface de Kummer touche les seize plans singuliers en tous les points, autres que les points doubles, où elle les rencontre; par suite, dans chaque plan singulier, elle passe par un nombre pair ou impair de points doubles, selon que son degré $(2l+\beta k)$ est pair ou impair.

68. *Remarque III.* — Il résulte des propositions ci-dessus que, *dans tous les cas :*

Une famille de courbes singulières, d'indices l, k, qui passent toutes par

2s points doubles de la surface de Kummer, est

$$\frac{1}{2}(\delta - s + 2)$$

fois infinie.

On pose toujours

$$\delta = l^2 + \beta k l + \alpha k^2.$$

C'est également vrai, bien entendu, pour les familles de courbes ordinaires, qui répondent au cas particulier de $k = 0$.

Genre des courbes singulières sur la surface de Kummer.

69. Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes non homogènes d'un point de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, on a

$$x = \frac{\Theta_1(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\Theta_2}{\Theta_0}, \qquad z = \frac{\Theta_3}{\Theta_0}, \tag{5}$$

les Θ étant des fonctions thêta du second ordre, paires et de caractéristique nulle.

Désignons par $F_0(u, v)$ une fonction normale quelconque, d'indices l, k, paire ou impaire, et de caractéristique donnée; par la courbe $F_0 = 0$, tracée sur $\mathfrak{K}$, menons une surface d'ordre quelconque n, $S(x, y, z) = 0$, qui coupe en outre $\mathfrak{K}$ suivant une courbe $C(u, v) = 0$; on a, en désignant par $S(u, v)$ ce que devient $S(x, y, z)$, quand on y remplace x, y et z par leurs valeurs (5) en u et v :

$$S(u, v) = F_0(u, v)\frac{C(u, v)}{\Theta_0^n(u, v)}. \tag{6}$$

Par la courbe $C(u, v) = 0$ menons une surface quelconque d'ordre n, $\varphi(x, y, z) = 0$, on a de même

$$\varphi(u, v) = F(u, v)\frac{C(u, v)}{\Theta_0^n(u, v)}, \tag{7}$$

$F(u, v)$ étant une fonction normale de mêmes indices et de même caractéristique que F_0, paire ou impaire en même temps que F_0; car, d'après (6) et (7), $\frac{F}{F_0}$ est une fonction quadruplement périodique paire.

Cela posé, d'après un théorème bien connu de M. Nöther, toute

différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe $F_0(u, v) = 0$ est *nécessairement* de la forme

$$(8) \qquad \frac{\varphi(x, y, z)}{S'_y K'_z - S'_z K'_y} dx,$$

en désignant par $K(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface $\mathfrak{K}$.

Réciproquement, une différentielle de ce type n'est pas toujours de première espèce si la courbe F_0 présente des singularités; mais nous n'aurons besoin que de la première partie du théorème.

70. Remplaçons maintenant, dans la différentielle (8), x, y, et z par leurs valeurs en u, v, et tenons compte de ce que, sur la courbe considérée, $F_0(u, v)$ est nul.

On a, d'après (6),

$$S'_u = \frac{\partial F_0}{\partial u} \frac{C}{\Theta_0^n} = S'_x \frac{\partial x}{\partial u} + S'_y \frac{\partial y}{\partial u} + S'_z \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial v} \frac{C}{\Theta_0^n} = S'_x \frac{\partial x}{\partial v} + S'_y \frac{\partial y}{\partial v} + S'_z \frac{\partial z}{\partial v},$$

De même, $K(u, v)$, étant nul identiquement,

$$0 = K'_x \frac{\partial x}{\partial u} + K'_y \frac{\partial y}{\partial u} + K'_z \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$0 = K'_x \frac{\partial x}{\partial v} + K'_y \frac{\partial y}{\partial v} + K'_z \frac{\partial z}{\partial v},$$

d'où en éliminant $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u}(S'_x K'_z - S'_z K'_x) + \frac{\partial y}{\partial u}(S'_y K'_z - S'_z K'_y) = \frac{\partial F_0}{\partial u} \frac{C}{\Theta_0^n} K'_z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(S'_x K'_z - S'_z K'_x) + \frac{\partial y}{\partial v}(S'_y K'_z - S'_z K'_y) = \frac{\partial F_0}{\partial v} \frac{C}{\Theta_0^n} K'_z,$$

et, par suite,

$$(9) \qquad (S'_y K'_z - S'_z K'_y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{dx}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{C}{\Theta_0^n}\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) K'_z,$$

D'ailleurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$0 = \frac{\partial F_0}{\partial u} du + \frac{\partial F_0}{\partial v} dv,$$

ce qui donne

$$dx = \left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}.$$

Portant cette valeur de dx, la valeur (7) de φ et la valeur (9) de $S'_y K'_z - S'_z K'_y$ dans la différentielle (8), celle-ci devient

$$\text{(10)} \qquad \frac{F(u,v)}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)} \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{K'_z} du.$$

Observons enfin que, sur la surface $\mathfrak{K}$, l'intégrale double

$$\int\int \frac{dx\,dy}{K'_z}$$

est de première espèce et se réduit à $\int\int du\,dv$ si l'on remplace x et y par leurs valeurs (5) en u et v; on a ainsi

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = K'_z$$

(car on peut supposer le facteur constant égal à l'unité). La différentielle (10) s'écrit alors

$$\text{(11)} \qquad F(u,v)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}.$$

Telle est la forme *nécessaire* des différentielles abéliennes de première espèce appartenant à la courbe $F_0 = 0$; $F(u, v)$ y désigne une fonction de la même famille que $F_0(u, v)$.

71. *Réciproquement*, il est clair que toute différentielle de la forme (11) est une intégrale abélienne appartenant à la courbe $F_0(u, v) = 0$; on le voit, par exemple, en refaisant en sens inverse les calculs précédents.

Pour qu'elle soit de première espèce, il faut et il suffit, si la courbe $F_0 = 0$ possède un point double, c'est-à-dire un point vérifiant les relations

$$F_0 = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial v} = 0,$$

que la courbe $F = 0$ passe par ce point; en général, si la courbe $F_0 = 0$ a, en un point, une singularité σ, il faut et il suffit que la courbe $F = 0$ possède en ce point la singularité σ', *adjointe* de σ. Ainsi :

Les différentielles abéliennes de première espèce appartenant à une courbe $F_0(u, v) = 0$ *sont de la forme* (11), *où* $F(u, v)$ *est le premier membre de l'équation d'une courbe de la même famille que la proposée et adjointe à celle-ci.*

72. Les courbes d'une même famille passent *toutes* (n°s 58-65) par $2s$ points doubles de la surface de Kummer, s pouvant être nul. Nous allons montrer :

1° Quelles n'ont point d'autre point commun, simple ou multiple;
2° Qu'aucun des $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$ par lesquels elles passent n'est multiple sur elles toutes.

Soit, en effet, $F_0(u, v) = 0$ une quelconque des courbes de la famille, ne présentant aucune singularité spéciale par rapport aux autres : les courbes de la famille formant une série *linéaire* tracée sur une surface $\mathfrak{K}$, sans lignes multiples, n'ont pas *toutes* des points singuliers variables d'une courbe à l'autre; si donc la courbe $F_0 = 0$ a des singularités, celles-ci sont fixes et communes, dès lors, à toutes les courbes de la famille. Soit alors $F = 0$ une autre de ces courbes; la différentielle abélienne

$$F(u, v)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}$$

est de première espèce sur $F_0 = 0$, puisqu'en tout point singulier de $F_0 = 0$, s'il en existe, la courbe $F = 0$ présente la même singularité. Le *genre*, p, de $F_0 = 0$ est donc égal au nombre des fonctions $F(u, v)$ linéairement distinctes, diminué d'une unité (car on doit exclure la fonction F_0); on a ainsi, en vertu du n° 68,

$$p = \frac{1}{2}(\delta - s + 2) \qquad (\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2). \tag{12}$$

D'ailleurs, d'après un théorème classique, la courbe $F_0 = 0$ est coupée par les courbes F, qui sont ses adjointes les plus générales, en

$2(p-1)$ points mobiles, c'est-à-dire que les deux équations

$$F_0(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0$$

ont $2.2(p-1)$ solutions *non fixes*, deux à deux égales et de signes contraires. Le nombre *total* des solutions communes étant (n° 34) égal à 2δ, on a, pour le nombre des solutions *fixes*,

$$2\delta - 4(p-1),$$

c'est-à-dire $2s$, d'après (12).

Il en résulte que les courbes $F_0 = 0$, $F = 0$ n'ont pas d'autres points communs fixes que les $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$, par lesquels passent toutes les courbes de la famille, et que les $2s$ points sont *simples* sur ces courbes.

73. Nous allons maintenant étudier les singularités que peuvent présenter les courbes d'une même famille en un des points doubles de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$.

74. Soit O le point double de $\mathfrak{K}$ qui répond à $u = 0$, $v = 0$; on verra, sans difficulté, que les raisonnements ci-après s'appliquent à tout autre point double.

Si les courbes d'une même famille passent *toutes* par O, comme O est simple (n° 72) sur la courbe générale de la famille, l'équation de celle-ci s'obtient en annulant une fonction *impaire*, $F(u, v)$, de u et v : par suite, les courbes de la famille qui admettent O comme point multiple, l'admettent comme point multiple d'*ordre impair*, $2q+1$.

Pour exprimer que O est un point multiple d'ordre $2q+1$ pour une courbe de la famille, il faut écrire que, dans le développement de Maclaurin de la fonction impaire $F(u, v)$, les termes d'ordres $1, 3, 5, \ldots, (2q-1)$ en u et v disparaissent, ce qui donne

$$2+4+6+\ldots+2q \qquad \text{ou} \qquad q(q+1)$$

conditions *au plus*. Nous disons *au plus*, parce qu'il pourrait arriver que ces conditions fussent réductibles entre elles.

De même, si O n'est pas un des $2s$ points communs à toutes les courbes de la famille, l'équation de la courbe la plus générale de cette famille s'obtient en annulant une fonction *paire*, $F(u, v)$, de u et v;

les courbes de la famille qui admettent O comme point multiple, l'admettent donc comme point multiple d'*ordre pair*, $2r$. Le nombre des conditions exprimant que O est multiple d'ordre $2r$ est

$$1+3+5+\ldots+2r-1$$

ou r^2 *au plus*.

75. *Expression générale du genre d'une courbe.* — Supposons qu'une courbe *indécomposable*, appartenant à une famille d'indices l, k, ait, en un point double, O, de $\mathfrak{K}$, un point multiple d'ordre $2r$, à branches distinctes : quel abaissement de genre produit une pareille singularité ?

Soit $F_0(u, v) = 0$ la courbe considérée; les différentielles abéliennes de première espèce qui lui appartiennent sont du type

$$F(u, v)\frac{du}{\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial v}\right)},$$

où $F(u, v)$ est le premier membre de l'équation d'une courbe de la même famille que $F_0 = 0$ et *adjointe* à celle-ci, c'est-à-dire devant présenter en O un point multiple d'ordre $2r - 1$ *au moins*. Mais, en vertu du numéro précédent, les ordres de multiplicité du point O sur les diverses courbes d'une même famille sont de même parité : la courbe $F_0(u, v) = 0$ admet donc nécessairement O comme point multiple d'ordre $2r$, c'est-à-dire qu'elle est assujettie à r^2 conditions *au plus*. La diminution de genre est donc r^2 *au plus*.

De même, si la courbe $F_0(u, v) = 0$ a, en un point double de $\mathfrak{K}$, un point multiple d'ordre $2q+1$, à branches distinctes, la diminution correspondante du genre est $q(q+1)$ *au plus*.

Enfin, il est clair qu'un point double, non situé en un des seize points singuliers de $\mathfrak{K}$, diminue le genre d'une unité; et, en général, un point multiple à branches distinctes d'ordre h, le diminue de $\frac{1}{2}h(h-1)$, *au plus*.

Soit alors une courbe $F_0(u, v) = 0$, appartenant à une famille d'indices l, k, dont toutes les courbes passent par $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$. Supposons que F_0 présente les singularités suivantes :

1° En chacun de ces $2s$ points, des points multiples *à branches dis-*

tinctes d'ordres respectifs

$$2q_1+1, \quad 2q_2+1, \quad \ldots, \quad 2q_{2s}+1;$$

2° En chacun des 16 — 2s autres points doubles de $\mathfrak{K}$, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres respectifs

$$2r_1, \quad 2r_2, \quad \ldots, \quad 2r_{16-2s};$$

3° En d'autres points, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots.$$

Un ou plusieurs des nombres q_i, r_i, h_i peuvent être nuls, c'est-à-dire que la courbe considérée n'a aucune singularité au point correspondant.

Le genre des courbes de la même famille que F_0 est (n° 72)

$$\frac{1}{2}(\delta - s + 2);$$

si p est le genre de F_0, on a donc, en vertu des résultats relatifs à l'abaissement du genre,

$$(13) \qquad p \geqq \frac{1}{2}(\delta - s + 2) - \Sigma q(q+1) - \Sigma r^2 - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

Soit d'ailleurs $F(u, v) = 0$ une quelconque des courbes de la même famille que la courbe F_0, et adjointe à celle-ci; les deux équations

$$F_0(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0,$$

qui ont en tout 2δ solutions communes, en ont $4(p-1)$ non fixes (n° 72); comme la courbe $F(u, v) = 0$ présente les mêmes singularités que la courbe $F_0 = 0$ aux seize points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° 75), et un point d'ordre $h - 1$, au moins, en chaque autre point multiple d'ordre h de F_0, on a

$$(14) \qquad 4(p-1) = 2\delta - 4\Sigma r^2 - \Sigma(2q+1)^2 - \Sigma h(h-1) - N,$$

le terme N étant mis pour tenir compte des autres points fixes d'intersection de F_0 avec les courbes F, s'il y en a. On en déduit, en observant que $\Sigma(2q+1)^2 = 4\Sigma q(q+1) + 2s$,

$$(15) \qquad p \leqq \frac{1}{2}(\delta - s + 2) - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1) - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1)$$

et, par suite, en comparant avec (13), on voit qu'il faut prendre le signe =, ce qui donne la formule

$$(16)\quad p = \frac{1}{2}(l^2 + \beta k l + \alpha k^2 - s + 2) - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1) - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

76. *Remarque I.* — La seconde partie de la démonstration précédente ne s'applique pas si la courbe F_0 est unicursale, c'est-à-dire si $p = 0$, parce qu'il n'existe alors pas de courbe $F(u, v)$; la formule (14) peut donc n'être plus vérifiée.

Il est aisé d'en donner une démonstration valable.

Soit $\Phi(u, v)$ une fonction normale de même caractéristique que la fonction $F_0(u, v)$, paire ou impaire en même temps que celle-ci, d'indices $l + 2m$, k; m étant un entier > 0 quelconque. Les courbes $\Phi(u, v) = 0$ passent par les $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$ communs à toutes les courbes de la famille qui comprend F_0 (n° 66).

Parmi ces courbes Φ, considérons celles, $\varphi(u, v) = 0$, qui sont adjointes à F_0; elles présentent aux points singuliers de F_0 les singularités que présentaient tout à l'heure les courbes adjointes F : on démontre sans difficulté qu'elles coupent F_0 en $2(p-1) + m(2l + \beta k)$ points mobiles ([1]); de sorte que, en raisonnant comme plus haut et en employant la formule (25) du n° 34, on a

$$\begin{aligned}4(p-1) + 2m(2l + \beta k) = 2l(l+2m) + \beta k(2l + 2m) + 2\alpha k^2 \\ - 4\Sigma r^2 - \Sigma(2q+1)^2 - \Sigma h(h-1) - N,\end{aligned}$$

ce qui, les termes en m disparaissant, donne à nouveau la formule (14). Or les courbes Φ dépendent linéairement de

$$\frac{1}{2}[(l+2m)^2 + \beta k(l+2m) + \alpha k^2 - s + 2]$$

paramètres (n° 68), et l'on peut toujours prendre m assez grand pour qu'il y ait une au moins de ces courbes adjointe à F_0. La formule (16) est donc générale.

77. *Remarque II.* — Nous avons supposé, en établissant la for-

---

([1]) *Voir* une démonstration analogue dans notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX, de ce *Journal*, 4e série, p. 152.

mule (16) du genre, que les points multiples de la courbe $F_0 = 0$ étaient à branches séparées; s'il en est autrement, cette circonstance ne peut évidemment que *diminuer* le genre, de sorte qu'on a, en ce cas,

$$(17) \qquad p \leq \frac{1}{2}(\delta - s + 2) - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1) - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

78. Des raisonnements précédents résulte aussi, sans difficulté, la proposition suivante :

Considérons, parmi les courbes d'une famille donnée, d'indices l, k, passant simplement par $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$, celles, C, qui admettent un ou plusieurs de ces points pour points multiples d'ordres donnés, à savoir :

Chacun des $2s$ points pour points d'ordres respectifs $2q_i + 1$;

Chacun des $16 - 2s$ autres points doubles pour points d'ordres respectifs $2r_i$;

et supposons que ces courbes ne soient pas toutes *décomposables*.

Les courbes C forment évidemment une série linéaire; elles dépendent d'un nombre de paramètres p qui est égal à leur genre, et qui a pour expression

$$(18) \qquad p = \frac{1}{2}(l^2 + \beta kl + \alpha k^2 - s + 2) - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1).$$

Elles n'ont en commun aucun autre point, simple ou double de $\mathfrak{K}$, que ceux qui interviennent dans leur définition; elles n'ont pas non plus, puisqu'elles forment une série linéaire, de point multiple variable d'une courbe à l'autre.

Cas elliptique.

79. Nous avons jusqu'ici laissé expressément de côté (n° 24), dans le cas elliptique, les courbes qui correspondent à des indices l, k tels que δ, c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \alpha k^2$ soit nul : d'après le n° 23, ces courbes s'obtiennent en annulant une fonction thêta elliptique d'une seule variable, U ou V, de sorte qu'elles forment deux familles, évidemment linéaires, U = const. et V = const.

Les courbes d'une de ces familles ne passent évidemment *toutes* par aucun point double de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$.

On établit sans difficulté, en suivant la marche du n° 23, les propositions suivantes, dont plusieurs se trouvent déjà énoncées dans notre Mémoire *Sur les surfaces de Kummer elliptiques* (¹).

80. Posons toujours $\Delta = n^2$; chaque courbe $U = \text{const.}$ s'obtient individuellement en annulant une fonction thêta elliptique de U, paire, et d'ordre deux : si l'on revient aux variables anciennes, u et v, à cette fonction correspond une fonction intermédiaire singulière normale, de caractéristique nulle, et paire, pour laquelle les indices sont

$$l = \beta + n, \qquad k = -2.$$

Il y a *deux* de ces fonctions linéairement distinctes.

Or ce nombre, *deux*, est compris dans la formule générale, $\frac{\delta+4}{2}$, du n° 42, qui donne le nombre des fonctions normales paires, de caractéristique nulle, d'indices l, k; δ désignant toujours $l^2 + \beta kl + \alpha k^2$: pour $\delta = 0$, $\frac{\delta+4}{2}$ est bien égal à 2.

Le degré des courbes $U = \text{const.}$ s'obtient (nᵒˢ 36 et 50) par la formule générale $2l + \beta k$, ce qui donne $2n$.

Les courbes $V = \text{const.}$ donnent lieu à des remarques semblables; leurs indices sont :

$$l = -\beta + n, \qquad k = 2;$$

elles sont aussi de degré $2n$.

On verrait sans difficulté que toutes ces courbes sont de genre un; les courbes $U = \text{const.}$ ont le même module; de même, les courbes $V = \text{const.}$

On démontre enfin, par les raisonnements mêmes du cas général, que pour les indices

$$l = \frac{1}{2}(\beta + n), \qquad k = -1,$$

et pour chacune des *quatre* caractéristiques remarquables

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l + \beta),$$

il existe $\frac{\delta+2}{2}$, c'est-à-dire *une* fonction normale, soit paire, soit impaire,

(¹) *American Journal of Mathematics*, t. XVI.

s'annulant pour quatre demi-périodes, conformément aux Tableaux du n° 62.

Mêmes résultats pour les indices

$$l = \frac{1}{2}(-\beta + n), \qquad k = 1.$$

Il y a ainsi, dans la série des courbes U = const. ou V = const., quatre courbes remarquables, passant par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$; elles sont d'ordre $2l + \beta k$, c'est-à-dire n, et de genre zéro.

D'après cela, les courbes exclues jusqu'ici sur les surfaces de Kummer elliptiques rentrent dans le cas général, et toutes les formules précédemment établies leur sont applicables.

QUATRIÈME PARTIE.

Équations modulaires.

81. En vertu d'une proposition rappelée plus haut (n° 48) et qui dérive d'un beau théorème de M. Appell, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur une surface hyperelliptique quelconque s'obtient *nécessairement* en annulant une fonction intermédiaire : si donc, une surface de Kummer $\mathfrak{K}$ admet une courbe algébrique qui n'existe pas sur la surface générale, c'est qu'il correspond à cette courbe une fonction intermédiaire *singulière;* $\mathfrak{K}$ est donc une surface de Kummer *singulière*.

Les surfaces hyperelliptiques répondant à des fonctions abéliennes singulières sont donc *caractérisées* par ce fait qu'on peut y tracer des courbes algébriques n'existant pas dans le cas général : on en déduit immédiatement une importante conséquence.

82. Les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de deux paramètres, x et y, et des

deux radicaux

$$\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)(1-\mu x)(1-\nu x)},$$
$$\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)(1-\mu y)(1-\nu y)};$$

les constantes λ, μ, ν (ou leurs racines carrées) sont les *modules* des fonctions abéliennes liées à la surface. Exprimons maintenant qu'une surface ainsi définie paramétriquement admet une courbe algébrique de degré donné, n'existant pas dans le cas où λ, μ, ν sont quelconques : nous arrivons évidemment à une ou plusieurs relations *algébriques* entre ces modules λ, μ, ν. D'ailleurs, dans le cas d'une surface *une fois* singulière, c'est-à-dire dans le cas où les périodes g, h, g' ne sont liées que par une seule relation singulière, il ne peut exister entre les modules qu'une seule relation, laquelle est nécessairement algébrique par ce qui précède. Ainsi :

A toute relation singulière entre les périodes d'une fonction abélienne de genre deux, correspond une relation algébrique entre les modules.

Nous nommerons cette relation *équation modulaire;* dans ce qui suit, nous nous proposerons de former l'équation modulaire qui correspond à une relation singulière donnée entre les périodes.

83. La méthode que nous suivrons consistera essentiellement à exprimer que la surface de Kummer admet des courbes algébriques n'existant pas dans le cas général; au lieu de traiter le problème dans l'espace, nous le ramènerons à une question de géométrie plane, en projetant sur un plan la surface et les courbes qu'on y peut tracer, le point de vue étant un des seize points doubles, que nous supposerons toujours être le point (11').

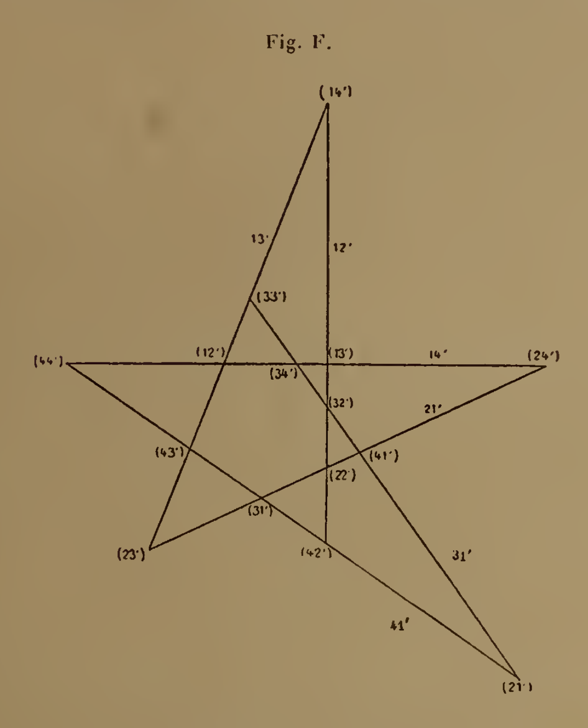
Avant d'aller plus loin, nous devons entrer dans quelques explications, relativement à cette projection.

84. La figure (F), ci-contre, représente la section par un plan quelconque, II, des six plans singuliers de la surface de Kummer passant par le point double (11') : ces six droites forment, comme on sait, le contour apparent de la surface sur le plan II.

Sur chacune des six droites on a inscrit le symbole du plan singulier correspondant : 12', 13', 14', 21', 31', 41'; au point d'intersection de

deux droites, on a marqué le symbole du point double, autre que (11′), commun aux deux plans singuliers correspondants, de sorte que les quinze points où les six droites se coupent deux à deux sont les projec-

Fig. F.



tions, sur le plan Π et à partir du point double (11′), des quinze autres points doubles de la surface.

Soit maintenant une courbe C, tracée sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, et rencontrée en un seul point mobile par chacun des rayons qui la projettent à partir du point (11′) : sa projection sur le plan Π sera une courbe Σ *inscrite* au contour apparent de $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire une courbe tangente aux six droites de la figure (F) en tous les points où elle les rencontre, les points doubles du contour, c'est-à-dire les points d'intersection des six droites entre elles, *étant seuls exceptés*.

85. Inversement, une courbe Σ donnée dans le plan Π et inscrite au système des six droites, est-elle la perspective d'une courbe C de la surface de Kummer, rencontrée en un seul point par les rayons qui la projettent; en d'autres termes, le cône qui a pour sommet le point

double (11′) et pour base la courbe Σ coupe-t-il la surface $\mathfrak{K}$ suivant *deux* courbes distinctes.

Supposons que le point (11′) soit pris pour le sommet $x=0$, $y=0$, $z=0$ du tétraèdre de référence ; l'équation de $\mathfrak{K}$ est de la forme

$$U_2 t^2 + 2U_3 t + U_4 = 0,$$

U_2, U_3, U_4 étant des polynomes homogènes en x, y, z de degrés marqués par l'indice. Le cône circonscrit à $\mathfrak{K}$ à partir du point (11′) est $U_3^2 - U_2 U_4 = 0$, et se décompose en six plans, qui sont les six plans singuliers passant par (11′); on a donc identiquement

$$U_3^2 - U_2 U_4 \equiv P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6.$$

Cela posé, pour qu'un cône de sommet (11′) coupe $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes, il faut et il suffit évidemment que, *sur ce cône*, les deux valeurs de t, tirées de l'équation (1), soient rationnelles en x, y, z, c'est-à-dire que $U_3^2 - U_2 U_4$, ou le produit $P_1 P_2 \ldots P_6$, soit rationnel. En d'autres termes, en désignant par $\Sigma = 0$ l'équation du cône, ou celle de sa base dans le plan Π *pris pour plan* $t=0$, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv M^2 + \Sigma Q,$$

N, M, Q étant des polynomes en x, y, z. *Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la courbe inscrite* Σ : on voit que toute courbe inscrite au système des six droites P_i ne répond pas à la question, car en général pour une telle courbe Σ′, on a seulement l'identité

$$RP_1 P_2 \ldots P_6 \equiv M^2 + \Sigma' Q,$$

le polynome R n'étant pas nécessairement un carré.

86. Observons, pour terminer ces généralités, que les six plans singuliers passant par (11′) touchent un cône du second ordre, celui des tangentes à la surface de Kummer au point double (11′); on sait de plus que si l'on fait correspondre d'une manière univoque un paramètre x à chacun des plans tangents de ce cône, et si a_1, a_2, ..., a_6 sont les valeurs du paramètre correspondant aux six plans singuliers considérés, les fonctions hyperelliptiques liées à la surface de Kummer

dépendent du radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)}.$$

Le problème de former les équations modulaires ou, ce qui est la même chose, les équations entre $a_1, a_2, \ldots, a_6$, revient donc à trouver, pour chaque relation singulière entre les périodes, une relation géométrique *caractéristique* entre les six plans singuliers qui passent par (11′), ou *entre les six droites* (*tangentes à une même conique*) *de la figure* (F) *qui précède*.

87. Pour mieux faire comprendre la méthode que nous suivrons, nous l'appliquerons d'abord aux deux cas particuliers non elliptiques les plus simples, à savoir ceux où l'invariant Δ de la relation singulière entre les périodes, et qui est nécessairement de la forme $4N$ ou $4N+1$, a l'une des valeurs 5 et 8; le cas de $\Delta=1$ a été exclu au n° 17 comme ne correspondant pas à de véritables fonctions abéliennes; celui de $\Delta=4$ est elliptique, et nous en dirons de suite quelques mots.

Cas de $\Delta=4$.

88. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme (n° 12)

$$-g+g'=0,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha=-1, \qquad \beta=0, \qquad \gamma=1.$$

On a pour δ

$$\delta=l^2-k^2.$$

On sait (n° 80) qu'il existe sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ deux séries, simplement infinies chacune, de courbes de genre 1 et de degré $2\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire de *biquadratiques gauches;* dans chaque série, quatre des biquadratiques se réduisent à des courbes d'ordre moitié moindre, c'est-à-dire à des *coniques*, passant chacune par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$. Ces coniques correspondent (n° 80) aux indices $l=1$, $k=1$ pour une série, et $l=1$, $k=-1$ pour l'autre; les Tableaux du n° 62 montrent qu'une conique du premier groupe et une conique du second passent par les quatre mêmes points doubles : par exemple, deux

coniques passent par les points

$$(11'), \quad (22'), \quad (33'), \quad (44').$$

Projetons l'une d'elles sur le plan Π à partir du point $(11')$; la perspective est une droite Σ qui passe par les trois points marqués $(22')$, $(33')$, $(44')$ de la figure (F). Ainsi, pour une surface de Kummer elliptique, d'invariant $\Delta = 4$, ces trois points sont en ligne droite, c'est-à-dire que :

Si une surface de Kummer elliptique a pour invariant QUATRE, *les six plans singuliers qui passent par un quelconque de ses points doubles, et qui touchent comme d'ordinaire un cône du second ordre, forment trois couples en involution.*

On peut transformer cette propriété par polaires réciproques : la surface de Kummer étant sa propre transformée dans dix corrélations, qui font correspondre les points singuliers aux points doubles et inversement, on arrive à ce résultat bien connu :

Sur une surface de Kummer elliptique répondant à $\Delta = 4$, les six points doubles situés sur une même conique d'un plan singulier forment trois couples en involution ou, ce qui revient au même, un hexagone de Brianchon.

Une pareille surface est le *tétraédroïde* de Cayley : *réciproquement*, toute surface de Kummer jouissant de la propriété précédente est un tétraédroïde; M. Klein l'a établi (*Math. Annalen*, t. II, p. 217), et cela résulterait aisément d'ailleurs des méthodes générales qui vont être développées.

Cas de $\Delta = 5$.

89. La relation singulière entre les périodes peut alors se ramener (n° 12) au type

$$-g + h + g' = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1.$$

La quantité δ est ici

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = l^2 + kl - k^2.$$

Les valeurs $l=1$, $k=1$ sont telles que

$$2l+\beta k > \sqrt{\Delta} \bmod k;$$

il y a donc (n° 29) des fonctions intermédiaires singulières d'indices 1, 1 : pour ces valeurs de l et k, δ prend la valeur 1 ; par suite (n° 45), il existe *une* fonction intermédiaire normale, de caractéristique donnée quelconque et d'indices 1, 1 ; cette fonction est soit paire, soit impaire, selon la caractéristique. A une des *seize* fonctions ainsi définies correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une courbe d'ordre $2l+\beta k$, ou *trois* (n° 50); passant par *six* points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° 61) et *unicursale* (n° 72) : ainsi, dans le cas de $\Delta = 5$, la surface de Kummer admet *seize cubiques gauches*, dont chacune passe par six points doubles, et qui se déduisent de l'une d'elles (n° 46) par l'addition de demi-périodes aux arguments hyperelliptiques u, v.

Il y a d'ailleurs sur $\mathfrak{K}$ *seize autres cubiques gauches*, qui correspondent aux indices $l=2$, $k=-1$, pour lesquels on a encore $\delta=1$ et $2l+\beta k=3$; les Tableaux du n° 60 permettent d'étudier, avec la plus grande facilité, la disposition six à six des seize points doubles sur les trente-deux cubiques; nous n'insisterons pas sur ce point.

Parmi les seize cubiques de chaque groupe, *six* passent par le point double (11′) (n° 61). La cubique qui répond aux indices 1, 1 et à la caractéristique nulle ne passe pas par ce point; elle contient (n° 60) les points (24′), (44′), (23′), (32′), (34′), (41′) : pour en déduire une des cubiques passant par (11′), il suffit d'ajouter la demi-période qui correspond à $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=1$, $\lambda=1$, $\lambda'=0$; car le nouveau groupe de six points doubles se déduit du précédent en permutant 1 et 4, 2 et 3 dans les symboles ci-dessus (n° 55), ce qui donne les points

$$(34'),\quad (14'),\quad (33'),\quad (22'),\quad (24'),\quad (11').$$

90. Projetons maintenant cette seconde cubique sur le plan Π à partir de (11′), la perspective est une conique Σ qui passe par les cinq points de la figure (F) marqués (34′), (14′), (33′), (22′), (24′), et qui est inscrite au système des six droites de la figure. Comme les cinq points indiqués sont des points doubles de ce système et qu'ils sont les sommets d'un pentagone formé par cinq des six droites (*voir* la figure), la conique Σ doit toucher la sixième droite 41′.

Nous obtenons ainsi une propriété simple des six plans singuliers de $\mathfrak{K}$ qui passent par le point double (11′), dans le cas où les périodes des fonctions abéliennes correspondantes vérifient une relation singulière d'invariant 5 :

Les six points doubles situés sur une même conique de la surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 5$, sont tels qu'il existe une conique passant par l'un d'eux et inscrite à un pentagone formé par les cinq autres.

91. *Réciproquement*, montrons que si cette condition ou la condition corrélative est satisfaite, la surface de Kummer est nécessairement singulière, et que l'invariant correspondant est 5.

92. L'hypothèse est qu'il existe, dans le plan II, une conique Σ, tangente à une des six droites de la figure (F), et circonscrite à un des pentagones formés par les cinq autres; je dis que le cône qui a pour base la conique Σ et pour sommet le point (11′) coupe la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes. Soit, en effet, $M = 0$ l'équation d'une cubique quelconque du plan II, passant par les cinq sommets du pentagone précédent et par le point de contact q de la conique Σ avec la sixième droite; en désignant toujours par $P_1 = 0, \ldots, P_6 = 0$ les équations des six droites, la courbe d'ordre *six*

$$P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta M^2 = 0,$$

où θ est un paramètre quelconque, a évidemment pour points doubles les cinq sommets du pentagone, et touche la sixième droite au point q. Cette courbe a ainsi, avec la conique Σ, *douze* intersections qui sont fixes quand θ varie; si θ est choisi de manière qu'elle passe par un nouveau point de Σ, elle se décomposera en deux courbes, dont l'une est Σ, de sorte qu'on aura *identiquement*

$$P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv \theta_0 M^2 + \Sigma Q,$$

ce qui démontre bien (n° 85) que le cône du second ordre de sommet (11′) et de base Σ coupe $\mathfrak{K}$ suivant *deux courbes distinctes*, C *et* C′.

La conique Σ passe par cinq des points de rencontre des six droites de la figure (F) : les deux courbes C et C′ passent donc, simplement chacune, par cinq points doubles de $\mathfrak{K}$ et ne passent par aucun autre

point double, sauf peut-être le point (11′). Elles passent nécessairement par ce point, qui est d'ordre de multiplicité impair sur chacune d'elles; car, en vertu des résultats des nos 58-65, il n'existe pas de courbe algébrique sur une surface de Kummer passant simplement par cinq points doubles seulement. D'ailleurs les cinq points doubles en question et le point (11′) ne sont pas dans un même plan singulier de $\mathfrak{K}$, puisque les cinq sommets du pentagone auquel la conique Σ est circonscrite ne sont pas sur *une* des six droites de la figure (F) : il en résulte que $\mathfrak{K}$ admet des courbes algébriques passant, avec des ordres impairs de multiplicité, par six points doubles non situés dans un même plan, ce qui ne se présente pas (n° 58) pour des courbes non singulières, ni pour des courbes singulières dont l'indice k est pair : $\mathfrak{K}$ *est donc une surface de Kummer singulière*, et les seconds indices k, k' relatifs à C et C′ sont impairs.

93. Soit alors

$$\alpha g + \beta h + g' = 0,$$

la relation singulière qui correspond à $\mathfrak{K}$; désignons par l et k les indices de C; par $2q+1$ l'ordre de multiplicité de (11′) sur cette courbe. Le degré de C est $2l+\beta k$ (n° 50); son genre est zéro, car elle correspond point par point à sa projection, la conique Σ; de plus elle ne peut évidemment admettre d'autre point multiple que (11′). On a alors, en écrivant que la projection de C à partir de (11′) est d'ordre deux, et en appliquant la formule (16) du n° 75 sur le genre,

$$2 = 2l + \beta k - (2q+1),$$
$$0 = l^2 + \beta kl + \alpha k^2 - s + 2 - 2q(q+1).$$

Ici $s = 3$; éliminant q entre ces relations, on trouve, en posant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$:

$$\Delta = \frac{6 - (2l + \beta k - 4)^2}{k^2},$$

d'où, nécessairement, puisque k doit être impair et Δ positif de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$,

$$\Delta = 5. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

94. *Équation modulaire.* — En vertu de ce qui précède et du n° 86,

pour exprimer que le radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_6)},$$

conduit à des fonctions abéliennes singulières *avec l'invariant cinq*, il suffit de considérer une conique dont les tangentes correspondent d'une manière univoque à un paramètre, et d'écrire qu'il existe une seconde conique touchant la tangente de paramètre a_6, et circonscrite à un pentagone formé par les tangentes de paramètres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, prises dans un ordre quelconque.

Pour simplifier, supposons $a_6 = \infty$, ce qui ne diminue pas la généralité; le radical est alors

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_5)};$$

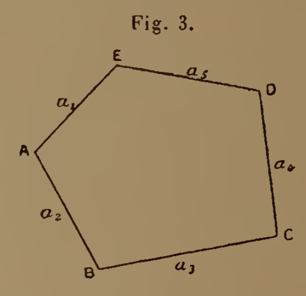
prenons pour conique fondamentale la parabole $y = x^2$, dont les tangentes ont pour équation générale

$$y + 2\theta x + \theta^2 = 0,$$

θ étant un paramètre arbitraire; à $\theta = \infty$ correspond la droite de l'infini.

Pour déterminer le pentagone, prenons les cinq tangentes qui correspondent aux valeurs $a_1, a_2, \dots, a_5$ de θ, dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; il s'agit d'exprimer que la conique qui passe par les cinq som-

Fig. 3.



mets A, B, C, D, E touche la droite de l'infini, c'est-à-dire est une parabole.

Le problème ne présente aucune difficulté, et voici le résultat final :

Pour que le radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}$$

conduise à des fonctions abéliennes dont les périodes normales soient liées par une relation singulière d'invariant CINQ, *la condition est*

$$\begin{aligned}&4[a_1^2(a_3-a_4)+a_2^2(a_4-a_5)+a_3^2(a_5-a_1)+a_4^2(a_1-a_2)+a_5^2(a_2-a_3)]\\&\times[a_1^2(a_3-a_4)a_2a_5+a_2^2(a_4-a_5)a_3a_1+\ldots+a_5^2(a_2-a_3)a_1a_4]\\=\;&[a_1^2(a_3-a_4)(a_2+a_5)+a_2^2(a_4-a_5)(a_3+a_1)+\ldots+a_5^2(a_2-a_3)(a_1+a_4)]^2.\end{aligned}$$

95. *Remarque.* — Si le radical était pris sous la forme générale $\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_6)}$, on passerait de ce cas au précédent par la substition $t=\frac{1}{x-\alpha_6}$, α_6 désignant une *quelconque* des six racines. Les racines du polynome du cinquième ordre en t qui figure maintenant sous le radical sont $\frac{1}{\alpha_i-\alpha_6}$, $(i=1,2,3,4,5)$, et il suffit de les substituer *dans un ordre quelconque*, aux $a_1, a_2, \ldots a_5$ de la formule précédente pour avoir la condition cherchée.

96. *Conséquences géométriques.* — *Si la conique* Σ *existe dans le plan* Π, on vient de voir que la surface $\mathfrak{K}$ est singulière et correspond à l'invariant cinq : outre la cubique dont la perspective est Σ, la surface $\mathfrak{K}$ admet *onze* autres cubiques passant par (11′), (n° 89); par suite il existe, dans le plan Π, onze coniques analogues à Σ, c'est-à-dire tangentes à une des six droites de la figure (F) et circonscrites à un pentagone formé par les cinq autres droites.

Les Tableaux et les résultats du n° 60 permettent d'étudier la disposition des point doubles de $\mathfrak{K}$ sur les onze nouvelles cubiques, c'est-à-dire la disposition des pentagones inscrits aux onze nouvelles coniques du plan Π; on arrive ainsi à un théorème de Géométrie élémentaire, qu'il est intéressant de rattacher aux fonctions abéliennes, et que nous énonçons sous sa forme corrélative :

Soient a, b, c, d, e, f *six points d'une conique : s'il existe une conique passant par* f *et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont* a, b, c, d, e, *il existera une autre conique passant par* a *et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont* f, c, b, e, d.

Comme a est un quelconque des sommets du premier pentagone, on obtient ainsi non pas une, mais *cinq* coniques nouvelles; ces cinq coniques et la conique inscrite au premier pentagone sont les perspec-

tives des six cubiques d'un même groupe (n° 89) qui passent par le point (11').

Les six cubiques de l'autre groupe ont pour projection six coniques définies par la propriété suivante, qui est connue d'ailleurs par les théorèmes de Poncelet :

Soient a, b, c, d, e, f six points d'une conique : s'il existe une conique passant par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, il existera une autre conique passant également par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, c, e, b, d.

A chacune des six premières coniques correspond ainsi une des six coniques du second groupe.

Cas de $\Delta = 8$.

97. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme (n° 12),

$$-2g + g' = 0;$$

par suite

$$\alpha = -2, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1,$$

et

$$\delta = l^2 - 2k^2.$$

Les valeurs $l = 2$, $k = 1$ conviennent pour indices de fonctions intermédiaires singulières (n° 29) et donnent $\delta = 2$. Il existe donc (n° 42) $\frac{\delta + 2}{2}$, c'est-à-dire *deux* fonctions normales, de caractéristique nulle, et d'indices 2, 1; géométriquement, on peut ainsi tracer sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ une série *simplement infinie* de courbes d'ordre $2l$, c'est-à-dire d'ordre *quatre* : ces courbes passent par les quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ dont les symboles sont (n° 63),

$$(32'), \quad (34'), \quad (42'), \quad (44');$$

elles sont de genre *un* (n° 72).

Pour $l = 2$, $k = -1$ et la caractéristique nulle, on obtient de même une seconde série simplement infinie de biquadratiques gauches (de genre *un*) passant par les quatre mêmes points, et l'on voit sans difficulté qu'une biquadratique quelconque de la première série et une quelconque de la seconde sont sur une surface du second ordre.

A chacune des *trois* autres caractéristiques remarquables (n°s 45 et 63) correspondent de même (pour $l=2$, $k=\pm 1$) deux séries de biquadratiques, passant toutes par quatre mêmes points doubles de $\mathfrak{K}$, qui sont ici, pour chaque caractéristique :

$$\begin{array}{cccc} (31'), & (33'), & (41'), & (43'), \\ (12'), & (14'), & (22'), & (24'), \\ (11'), & (13'), & (21'), & (23'). \end{array}$$

Parmi les biquadratiques de l'une des séries qui passent par (32'), (34'), (42'), (44'), il en est *une* qui passe par (11') et qui y a nécessairement un point double (n° 74); sa perspective sur le plan Π, à partir de (11'), est une conique Σ passant par les quatre points de la figure (F) marqués (32'), (34'), (42'), (44') et inscrite au système des six droites de cette figure : comme les quatre points indiqués sont les sommets du quadrilatère formé par les droites 31', 12', 41', 14', la conique Σ touche les deux autres droites 13' et 21'. Donc, corrélativement :

Les six points doubles situés sur une même conique de la surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta=8$ sont tels qu'il existe une conique passant par deux d'entre eux et inscrite à un quadrilatère formé par les quatre autres.

98. *Réciproquement*, on établit comme au n° 92 que si cette condition est vérifiée, c'est-à-dire si la conique Σ existe, le cône qui a (11') pour sommet et Σ pour base coupe $\mathfrak{K}$ suivant *deux courbes distinctes*, C et C'.

Ces courbes, en vertu de l'hypothèse, passent, simplement chacune, par les quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ de symboles (32'), (34'), (42'), (44'), et ne passent par aucun autre point double, sauf, peut-être, par (11').

Il n'y a, sur aucune surface de Kummer, de courbe algébrique passant simplement (ou avec des ordres de multiplicité impairs) par cinq points doubles (n°s 58-65), il faut donc que (11') soit, sur C et C', un point de multiplicité paire (l'ordre zéro pouvant convenir); enfin comme une surface de Kummer non singulière n'admet pas de courbe algébrique passant simplement par quatre points doubles (n° 58),

$\mathfrak{K}$ est nécessairement *une surface singulière*, et les courbes C, C′ sont des courbes singulières. Leur genre est zéro, puisque chacune correspond point par point à sa projection, la conique Σ; les indices k qui leur correspondent sont impairs (n° 58),

Soient alors $\alpha g + \beta h + g' = 0$ la relation singulière qui correspond à $\mathfrak{K}$ désignons par l et k les indices de la courbe C, par $2r$ l'ordre de multiplicité sur cette courbe du point (11′), qui est évidemment son seul point singulier. On a, en écrivant les formules relatives au degré et au genre de C, comme au n° 93,

$$2 = 2l + \beta k - 2r,$$

$$0 = \frac{1}{2}[l^2 + \beta kl + \alpha k^2 + s - 2] - r^2.$$

Ici $s = 2$; l'élimination de r entre ces équations donne, en posant toujours $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$,

$$\Delta = \frac{8 - (2l + \beta k - 4)^2}{k^2},$$

et comme Δ doit être entier, positif de l'une des formes $4N$ ou $4N + 1$, et que k est impair, les seules valeurs admissibles sont $\Delta = 8$ et $\Delta = 4$.

Ainsi, la condition énoncée plus haut, c'est-à-dire l'existence de la conique Σ, entraîne, pour la surface de Kummer considérée, la nécessité d'être singulière avec l'invariant 4 ou l'invariant 8; en traduisant analytiquement cette condition, on trouvera donc à la fois les équations modulaires pour $\Delta = 4$ et pour $\Delta = 8$.

99. *Équation modulaire.* — Pour l'obtenir, prenons le radical fondamental sous la forme

$$\sqrt{x(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)};$$

considérons la parabole $y = x^2$ et les six tangentes

$$y + 2\theta x + \theta^2 = 0,$$

qui correspondent aux valeurs ∞, 0, a_1, a_2, a_3, a_4 de θ : il faut exprimer, d'après ce qui précède, qu'il existe une conique circonscrite au quadrilatère formé par les quatre dernières tangentes, prises dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, et touchant les deux premières, à savoir la droite de l'infini et la droite $y = 0$. Le calcul ne présente aucune difficulté; on trouve

en facteur la quantité $(a_1 a_3 - a_2 a_4)^2$, qui, égalée à zéro, exprime que les six tangentes forment trois couples $(0, \infty; a_1, a_3; a_2, a_4)$ en involution : *c'est l'équation modulaire du tétraédroïde* (n° 88). L'autre facteur obtenu est l'équation modulaire pour $\Delta = 8$, d'où le théorème :

Pour que le radical $\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$ *conduise à des fonctions abéliennes dont les périodes normales soient liées par une relation singulière d'invariant* HUIT, *la condition est*

$$4a_1 a_2 a_3 a_4 [(a_1 + a_3)(a_2 + a_4) - 2a_1 a_3 - 2a_2 a_4]^2$$
$$= (a_2 - a_4)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2.$$

100. *Remarque.* — On en déduirait sans difficulté, comme au n° 95, la formule correspondante, lorsque le polynome sous le radical est du sixième degré, et de racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$.

101. *Conséquences géométriques.* — En considérant les autres séries de biquadratiqnes qui passent simplement par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° 97) autres que $(11')$, on obtient, *en tout*, *six* de ces biquadratiques ayant un point double en $(11')$; on voit de suite qu'elles sont deux à deux sur *trois* cônes du second ordre ayant $(11')$ pour sommet; il y a dès lors dans le plan Π *trois* coniques Σ, sections de ces trois cônes par le plan. En se reportant au Tableau des points doubles par lesquels passent les biquadratiques et en raisonnant comme au n° 96, on arrive à cette proposition élémentaire :

Soient, sur une conique, trois couples de points non en involution : s'il existe une conique passant par les points d'un des couples et inscrite au quadrilatère qui a pour sommets opposés les points de chacun des deux autres couples, il existera deux autres coniques analogues qu'on obtient par la permutation des trois couples.

Ce théorème est d'ailleurs bien facile à établir directement; il est curieux de le voir lié aux propriétés d'une surface de Kummer singulière.

102. *Remarque.* — Il convient de rapprocher des résultats obtenus

dans les cas de $\Delta = 5$ et $\Delta = 8$ une proposition que nous avons établie ailleurs ([1]) pour le cas *elliptique* de $\Delta = 9$.

Si $\Delta = 9$, la surface de Kummer correspondante admet (n° 80) deux groupes de quatre cubiques gauches, passant chacune par quatre points doubles; dans chaque groupe, une cubique, et une seule, passe par un point double donné de $\mathfrak{K}$, (11') par exemple. En la projetant sur le plan Π à partir de ce point, on obtient une conique Σ, inscrite au triangle formé par trois des droites de la figure (F) et circonscrite au triangle formé par les trois autres. On démontre sans difficulté que, réciproquement, si la conique Σ existe, la surface de Kummer est singulière et répond à l'invariant *neuf*. Ainsi, par corrélation :

Les six points doubles situés sur une même conique d'une surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 9$, sont tels qu'il existe une conique passant par trois de ces points et inscrite au triangle formé par les trois autres. Réciproquement, cette propriété n'appartient qu'à une surface de Kummer singulière d'invariant neuf.

L'*équation modulaire* correspondante se déduit de là avec la plus grande facilité.

Cas général d'un invariant Δ pair.

103. Pour former l'équation modulaire dans le cas d'un invariant pair, ou pour trouver une propriété géométrique, caractéristique de ce cas, appartenant aux six plans singuliers qui passent par un même point double de la surface de Kummer correspondante (n° 86), on s'appuiera sur deux propositions.

Théorèmes fondamentaux.

104. I. *Soit une surface de Kummer $\mathfrak{K}$, jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un

---

([1]) *American Journal of Mathematics*, t. XVI, p. 238. M. O. Bolza a retrouvé la même propriété dans un Mémoire des *Math. Annalen;* il a bien voulu, par une Note publiée dans le Tome LI du même Recueil, reconnaître notre priorité.

même point double coupent un plan quelconque sont telles qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, *indécomposables, de genre p et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touche, partout ailleurs, les six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière; son invariant* Δ *est pair et a pour maximum*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p), \tag{1}$$

$\lambda^2 - p$ *est dès lors nécessairement positif;*

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (1) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

105. II. *Soit une surface de Kummer* $\mathfrak{K}$, *jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites définies plus haut peuvent se répartir en trois couples, de telle sorte qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, *indécomposables, de genre p et de degré* $2\lambda + 1$, *dont chacune passe par les sommets des trois couples et touche, partout ailleurs, les six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière; son invariant* Δ *est pair et a pour maximum*

$$\Delta = 4[2\lambda(\lambda + 1) - 2p + 1] \tag{2}$$

$\lambda(\lambda + 1) - p$ *est dès lors nécessairement positif;*

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (2) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

106. *Remarque.* — On peut reconnaître directement que l'existence des courbes Σ, définies ci-dessus, entraîne bien une relation modulaire c'est-à-dire une relation entre les six droites de la figure (F).

Plaçons-nous, par exemple, dans le cas du théorème I : les courbes Σ sont d'ordre 2λ, de genre p, et sont soumises, par les conditions de passer par quatre points et de toucher partout ailleurs les six droites, à 6λ conditions. Leur équation générale doit donc, *a priori*, renfermer un

nombre de paramètres égal à

$$\frac{1}{2}2\lambda(2\lambda+3)-\frac{1}{2}(2\lambda-1)(2\lambda-2)+p-6\lambda,$$

c'est-à-dire $p-1$. Or l'hypothèse est que ce nombre est p, ce qui établit bien une relation entre les six droites.

Un calcul analogue s'applique au cas du théorème II.

Avant de donner la démonstration des théorèmes fondamentaux, montrons comment on peut les appliquer à la formation de la propriété caractéristique modulaire.

Équations modulaires.

107. Pour obtenir l'équation ou la propriété géométrique modulaire qui correspond à un invariant Δ pair, nous distinguerons, puisque Δ est multiple de 4, les deux cas de

$$\Delta=8N \qquad \text{et} \qquad \Delta=8N+4.$$

108. Supposons obtenues les équations ou propriétés modulaires pour tous les invariants Δ pair, jusqu'à $\Delta=8N$, *exclusivement*.

Faisons dans la formule (1) $\Delta=8N$, ce qui donne

$$N=\lambda^2-p.$$

Prenons, pour λ, le plus petit entier positif dont le carré atteigne ou dépasse N; on a alors p par la formule

$$p=\lambda^2-N.$$

Il résulte alors du théorème fondamental I que, pour la surface de Kummer singulière d'invariant 8N, les six droites de la figure (F) sont telles qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, d'ordre 2λ et de genre p, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, et touche ces droites en tous les autres points où elle les rencontre.

C'est bien là une propriété des six droites, c'est-à-dire une *propriété modulaire;* réciproquement, en vertu du théorème I, elle ne peut appartenir en outre qu'à des surfaces de Kummer singulières *d'invariants pairs, et inférieurs à* 8N. Si donc on traduit analytiquement la propriété

précédente (ce qui peut se faire par un nombre fini d'opérations algébriques), on obtient, non seulement l'équation modulaire pour $\Delta = 8N$, mais les équations modulaires pour certains invariants pairs plus petits, équations qu'on a supposées obtenues au préalable. Il ne restera donc qu'à débarrasser l'équation modulaire complète de facteurs connus d'avance, pour avoir, sans facteur étranger, l'équation modulaire cherchée relative à $\Delta = 8N$ [1].

109. Supposons de même obtenues les équations modulaires pour les invariants pairs jusqu'à $\Delta = 8N + 4$, exclusivement. Partons cette fois de la formule (2) où nous ferons $\Delta = 8N + 4$:

$$4N + 1 = (2\lambda + 1)^2 - 4p.$$

Prenons, pour $2\lambda + 1$, le plus petit entier impair dont le carré atteigne ou dépasse $4N + 1$; p aura la valeur

$$p = \lambda(\lambda + 1) - N.$$

Alors, par le théorème fondamental II, pour la surface de Kummer singulière d'invariant $8N + 4$, les six droites de la figure (F) peuvent se répartir en trois couples, de manière qu'il existe un système p fois infini, de courbes Σ, de genre p et d'ordre $2\lambda + 1$, dont chacune passe par les sommets des trois couples et touche en λ points chacune des six droites.

C'est là une propriété modulaire qui, d'après le théorème II, ne peut appartenir en outre qu'à des surfaces de Kummer singulières, d'invariants pairs et inférieurs à $8N + 4$. On voit dès lors, comme plus haut, qu'on pourra obtenir, débarrassée de facteurs étrangers, l'équation modulaire pour $\Delta = 8N + 4$.

110. Le probléme de la formation des équations modulaires, dans le cas d'un invariant pair, peut donc être considéré comme résolu *théoriquement*, par une méthode *algébrique* qui permet d'opérer de proche en proche : mais, *pratiquement*, la solution analytique serait fort difficile à obtenir, même dans des cas très simples, à cause de la longueur des calculs. La Géométrie du moins, en substituant la propriété modulaire

---

[1] Nous reviendrons plus loin (n° 131) sur les facteurs étrangers.

à l'équation algébrique, donne une idée assez nette du résultat : nous y reviendrons d'une manière plus étendue aux nos 124-131.

Il nous reste maintenant à démontrer les théorèmes fondamentaux.

Démonstrations des théorèmes fondamentaux.

111. Lemme. — *Une courbe singulière tracée sur une surface de Kummer ne peut être l'intersection complète de cette surface et d'une autre surface.*

Car, en vertu du mode même de représentation paramétrique (n° 49), l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre n s'obtient en annulant une *fonction thêta*, normale, d'ordre $2n$ et de caractéristique nulle : pour une intersection complète, l'indice k est donc nul, ce qui prouve bien qu'une telle courbe n'est *jamais* singulière.

112. *Corollaire.* — Le rayon, qui joint à un point double de la surface de Kummer un point d'une courbe singulière, ne rencontre pas constamment la courbe en un second point, sinon celle-ci serait l'intersection complète avec un cône ayant le point double pour sommet.

En d'autres termes, la projection sur le plan Π, à partir du point double $(11')$, d'une courbe singulière quelconque, est une courbe *du même genre, inscrite* au système des six droites de la figure (F) (n° 84).

Démonstration du théorème I.

113. Supposons qu'il existe, dans le plan Π de la figure (F), des courbes Σ d'ordre 2λ, de genre p, en nombre p fois infini, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, et touche partout ailleurs ces six droites : *montrons d'abord que la surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *est singulière*, et pour cela, établissons que le cône, qui a pour sommet le point double $(11')$ et pour base une quelconque des courbes Σ, coupe $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes.

114. L'équation générale des courbes Σ contient, par hypothèse, p paramètres : $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, sous une forme évidemment algébrique. On peut toujours, puisque le triangle de référence est arbitraire, sup-

poser que l'équation de la courbe générale Σ contient un terme en $x^{2\lambda}$, de sorte que cette équation est de la forme

$$(3) \qquad \Sigma = x^{2\lambda} + V_1 x^{2\lambda-1} y + V_2 x^{2\lambda-1} z + \ldots = 0,$$

$V_1, V_2, \ldots$ étant des fonctions algébriques des paramètres ρ.

Soient x, y, z un point d'une courbe Σ, de paramètres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$; $x+dx, y+dy, z+dz$ un point voisin du premier, sur la courbe Σ, de paramètres $\rho_1 + d\rho_1, \ldots, \rho_p + d\rho_p$; on a

$$dx\frac{\partial\Sigma}{\partial x} + dy\frac{\partial\Sigma}{\partial y} + dz\frac{\partial\Sigma}{\partial z} + d\rho_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} + \ldots + d\rho_p\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

quels que soient $d\rho_1, \ldots, d\rho_p$. Si donc (x, y, z) est un point double de la courbe Σ, les courbes

$$(4) \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

qui sont du même ordre, 2λ, que Σ passent par ce point double : ce sont, dès lors, des courbes *adjointes* à Σ.

D'après la théorie des enveloppes, les courbes (4) passent par les quatre points communs à toutes les courbes Σ et par les $6\lambda - 4$ points où la courbe $\Sigma = 0$ touche les six droites de la figure (F) : comme d'une manière générale, les courbes d'ordre 2λ adjointes à une courbe du même ordre et de genre p coupent celles-ci, en dehors de ses points multiples, en $2(p-1) + 6\lambda$ points, on voit que les courbes

$$(5) \qquad \theta_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} + \theta_2\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_2} + \ldots + \theta_p\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

où les θ_i sont des constantes arbitraires, coupent la courbe $\Sigma = 0$ en $2(p-1) + 6\lambda - 4 - (6\lambda - 4)$, c'est-à-dire en $2(p-1)$ points mobiles.

En d'autres termes, les courbes (5) découpent, sur la courbe $\Sigma = 0$, des groupes de $2(p-1)$ points mobiles, *parmi lesquels* $p-1$ *sont arbitraires*, puisque l'équation (5) renferme $p-1$ constantes arbitraires [1].

---

[1] Pour mettre ce raisonnement à l'abri de tout reproche, il faut établir qu'il n'existe pas d'*identité* de la forme

$$(6) \qquad A\Sigma + A_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_1} + \ldots + A_p\frac{\partial\Sigma}{\partial\rho_p} = 0,$$

les A_i étant des constantes en x, y, z, c'est-à-dire des fonctions des ρ_i. On voit

Ces groupes de points appartiennent donc, sur la courbe de genre p, $\Sigma = 0$, à un *système spécial*, dans le sens de MM. Brill et Nœther: d'ailleurs, sur une courbe de genre p et d'ordre n, le seul système spécial de $2(p-1)$ points est celui que découpent les adjointes d'ordre $n-3$; il en résulte que les $2(p-1)$ points mobiles où une quelconque des courbes (5), courbe que je désignerai par $M = 0$, coupe la courbe $\Sigma = 0$, sont sur une courbe d'ordre $2\lambda - 3$, $N = 0$, adjointe à Σ.

Cela posé, soient toujours $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, ..., $P_6 = 0$ les équations des six droites fondamentales; considérons la courbe, *d'ordre* 4λ,

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P^6 - \theta M^2 = 0, \tag{7}$$

où θ désigne un paramètre variable, et cherchons ceux de ses points d'intersection avec Σ qui restent fixes quand θ varie.

Les courbes $M = 0$, $N = 0$ étant adjointes à Σ, on voit, de suite, que les points singuliers de Σ comptent, dans l'intersection avec les courbes (7), pour

$$2[2\lambda(2\lambda - 3) - 2(p-1)].$$

De plus, les quatre sommets du quadrilatère par lesquels passent toutes les courbes Σ et les $2(p-1)$ points communs aux courbes $M = 0$, $N = 0$, $\Sigma = 0$, sont évidemment des points doubles des courbes (7), et comptent dès lors pour

$$8 + 4(p-1)$$

intersections.

---

d'abord que A doit être nul, puisque, d'après (3), Σ contient un terme en $x^{2\lambda}$, qui ne figure dans aucune des fonctions $\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \rho_i}$; en remplaçant alors Σ, $\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1}$, ... par leurs valeurs tirées de (3), l'identité donne naissance aux identités suivantes en ρ_1, ρ_2, ..., ρ_p :

$$A_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho_1} + \ldots + A_p \frac{\partial V_1}{\partial \rho_p} = 0,$$

$$A_1 \frac{\partial V_2}{\partial \rho_1} + \ldots + \ldots\ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations prouvent que les fonctions V_i sont fonctions de $p-1$ d'entre elles, au plus; par suite, l'équation (3) de Σ ne contiendrait que $p-1$ paramètres, au lieu de p, comme c'est l'hypothèse. Il n'existe donc aucune identité de la forme (6). C. Q. F. D.

Enfin, les courbes (7) touchent évidemment la courbe $\Sigma = 0$ aux $6\lambda - 4$ points où celle-ci est tangente aux six droites $P_i = 0$, car la courbe $M = 0$ passe par ces points, ainsi qu'on l'a vu plus haut ; de là

$$12\lambda - 8$$

nouvelles intersections fixes.

On trouve ainsi, au total, que les courbes (7) ont, avec Σ, un nombre d'intersections fixes égal à

$$4\lambda(2\lambda - 3) - 4(p - 1) + 8 + 4(p - 1) + 12\lambda - 8,$$

c'est-à-dire $8\lambda^2$; comme Σ est d'ordre 2λ et les courbes (7) d'ordre 4λ, on peut déterminer θ de manière que, pour $\theta = \theta_0$, la courbe (7) ait un nouveau point de rencontre avec Σ, *qu'elle contiendra dès lors tout entière* on aura ainsi *identiquement*

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta_0 M^2 \equiv \Sigma Q, \tag{8}$$

ce qui prouve bien (n° 85) que le cône de sommet (11′) et de base Σ coupe la surface $\mathfrak{K}$ suivant *deux* courbes algébriques distinctes, C et C′, de même genre, p, que la courbe Σ, à laquelle elles correspondent point par point.

115. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{K}$ est singulière. En effet, les courbes Σ passant simplement par quatre des points communs à deux des six droites de la figure (F), les courbes C (et C′) passent toutes, simplement, par quatre des points doubles de $\mathfrak{K}$, et ne passent simultanément par aucun autre point double, le point (11′) pouvant être excepté. Comme il n'existe pas, sur une surface de Kummer ordinaire (n°s 58-66), de courbe algébrique passant simplement par quatre points doubles et ne pouvant, en outre, contenir qu'*un* autre point double, $\mathfrak{K}$ *est nécessairement une surface singulière.*

116. *Détermination de l'invariant.* — Les courbes C étant singulières et passant simplement par quatre points doubles, leur second indice k est impair et le point (11′) est, sur chacune d'elles, multiple d'ordre pair, $2r$, r pouvant être nul (n°s 58 et 74). Soit

$$\alpha g + \beta h + g' = 0$$

la relation singulière qui correspond à la surface $\mathfrak{K}$; l et k étant les indices de C, le degré de cette courbe est (n° 50) $2l+\beta k$, et l'on a, en écrivant que la perspective Σ, de C, à partir de (11'), est de degré 2λ :

$$(9) \qquad 2\lambda = 2l + \beta k - 2r,$$

ce qui montre que βk, et par suite β, est pair. On peut donc supposer (n° 12) $\beta = 0$, et la relation singulière sera

$$-N'g + g' = 0, \qquad (N' > 0)$$

de sorte que, par (9)

$$(10) \qquad \lambda = l - r.$$

117. Écrivons maintenant que C est de genre p. La courbe C générale a un point multiple d'ordre $2r$ en (11'); elle peut avoir d'autres points multiples, répondant aux points multiples de sa projection Σ : en vertu de la formule (16) du n° 75 et de la remarque du n° 77, son genre p a une expression de la forme

$$(11) \qquad p = \frac{1}{2}(l^2 - N'k^2) - r^2 - p',$$

le terme $-p'$ (où $p' \geqq 0$) étant relatif aux points multiples autres que (11'), et aux branches confondues que peut présenter la courbe C en ce point.

L'élimination de r entre (10) et (11) donne

$$N' = \frac{2(\lambda^2 - p) - 2p' - (l - 2\lambda)^2}{k^2}$$

et, par suite, la valeur *maximum* que puisse prendre l'invariant $4N'$ est, en faisant $p' = 0$, $l = 2\lambda$, $k = 1$ (car k est impair),

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p).$$

C'est précisément ce qu'il s'agissait d'établir, conformément à l'énoncé du théorème I.

118. Il reste, pour terminer la démonstration de ce théorème, à montrer que toute surface de Kummer $\mathfrak{K}$, dont l'invariant est $8(\lambda^2 - p)$, jouit de la propriété relative aux courbes Σ, c'est-à-dire que ces courbes existent dans le plan de la figure (F).

Si Δ est de la forme $8(\lambda^2 - p)$, la relation entre les périodes peut être supposée du type

$$-2(\lambda^2 - p)g + g' = 0.$$

Considérons les indices $l = 2\lambda$, $k = 1$: ils sont admissibles, car on vérifie de suite (n° 29) l'inégalité nécessaire et suffisante

$$2l \geqq \sqrt{\Delta} \bmod k, \qquad \text{ou} \qquad 4\lambda \geqq 2\sqrt{2(\lambda^2 - p)}.$$

La quantité δ, qui répond à ces indices, est

$$\delta = 4\lambda^2 - 2(\lambda^2 - p) = 2(\lambda^2 + p).$$

Elle est *paire*. Par suite (n°s 42 et 63), il existe $\frac{1}{2}(\delta + 2)$ fonctions intermédiaires normales, d'indices 2λ, 1, de caractéristique nulle, paires, s'annulant simplement pour les quatre demi-périodes $(32')$, $(34')$, $(42')$, $(44')$.

A ces fonctions correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une famille de courbes algébriques d'ordre 4λ passant simplement par quatre points doubles : celles d'entre elles, C, qui ont en $(11')$ un point multiple d'ordre 2λ, sont (n° 78) de genre

$$p_1 = \frac{1}{2}[4\lambda^2 - 2(\lambda^2 - p)] - \lambda^2 = p,$$

et forment un système linéaire p fois infini.

Les projections des courbes C, à partir du point $(11')$, sur le plan de la figure (F) sont donc des courbes Σ, de degré 2λ, de genre p, formant un système p fois infini, et passant toutes simplement par les quatre points de la figure marqués $(32')$, $(34')$, $(42')$, $(44')$, points qui sont les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites de cette figure. Enfin (n°s 84 et 112) les courbes Σ touchent les six droites, en dehors de ces points, partout où elles les rencontrent.

Cet ensemble de propositions constitue la seconde et dernière partie du théorème fondamental qu'il s'agissait d'établir ([1]).

([1]) Les courbes C formant un système linéaire sur $\mathfrak{K}$, les courbes Σ, dans le plan Π, forment un système du second ordre, c'est-à-dire que les paramètres variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ figurent au second ordre, dans l'équation générale de ces courbes.

Démonstration du théorème II.

119. Elle se fait d'une manière toute pareille; les courbes C appartiennent alors à une famille de courbes passant toutes simplement par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$, parmi lesquels est le point (11'). Nous n'insisterons pas sur le raisonnement, qu'il suffit de calquer sur le précédent.

120. *Remarques.* — Au n° 114 nous avons supposé implicitement que p n'est pas nul, c'est-à-dire que la courbe Σ n'est pas unicursale. Si $p = 0$, le raisonnement fait pour établir l'identité (8),

$$N^2 P_1 \dots P_6 - \theta_0 M^2 \equiv \Sigma Q \tag{8}$$

ne s'applique plus, mais il est bien facile de lui en substituer un autre.

L'hypothèse est qu'il existe *une* courbe Σ, de genre zéro, passant par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites $P_i = 0$ et touchant ces six droites partout ailleurs.

Pour démontrer l'identité (8), il suffit d'établir qu'en chaque point de Σ, la fonction $P_1 P_2 \dots P_6$ est le carré d'une fonction rationnelle $\frac{M}{N}$ des coordonnées. Or, supposons les coordonnées homogènes, x, y, z d'un point de Σ, exprimées en fonction rationnelle entière d'un paramètre t, une seule valeur du paramètre répondant à chaque point : tout polynome en t, $\varphi(t)$, sera rationnel en x, y, z. D'ailleurs, en tout point de Σ, $P_1 P_2 \dots P_6$ est un polynome en t, et ce polynome est un carré parfait, puisque, en vertu des hypothèses géométriques, ses racines sont deux à deux égales : on a donc, en tout point de Σ,

$$P_1 P_2 \dots P_6 = \varphi^2(t) = \left[\frac{M}{N}(x, y, z)\right]^2, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cas général d'un invariant Δ impair.

121. Nous énoncerons, sans démonstration, les deux théorèmes fondamentaux qui permettent de former l'équation modulaire; les explications données aux n°s 113-120 et celles des n°s 92-93 relatives à $\Delta = 5$, permettront de reconstituer les raisonnements sans aucune difficulté.

122. I. *Soit une surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un même point double coupent un plan quelconque sont telles qu'il existe un système p fois infini de courbes Σ *indécomposables, de genre p et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les sommets d'un triangle formé par trois des six droites, et touche, partout ailleurs, ces six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière; son invariant* Δ *est impair et a pour maximun*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p) + 1; \tag{12}$$

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (12) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

II. *Soit une surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites définies plus haut sont telles qu'il existe un système p fois infini de courbes Σ *de genre p et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les cinq sommets d'un pentagone formé par cinq des six droites et touche, partout ailleurs, ces six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière, son invariant* Δ *est impair et a pour maximun*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p) - 3; \tag{13}$$

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (13) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

Équations modulaires.

123. Les deux valeurs (12) et (13) de Δ sont respectivement des formes $8N + 1$ et $8N + 5$, qui sont les deux formes que peut prendre un invariant impair $4P + 1$; on en conclut, comme aux n°s 107-109, qu'on pourra théoriquement former de proche en proche l'équation modulaire qui répond à un invariant impair quelconque.

Propriétés modulaires générales.

124. Les théorèmes qui nous ont servi à former les équations modulaires sont des cas particuliers d'une proposition plus étendue, qu'on peut employer au même but et qui permet de simplifier souvent, en pratique, les calculs indiqués précédemment.

125. Reprenons le plan de la figure (F), et supposons qu'il existe dans ce plan des courbes Σ, de degré d, de genre p, formant un système p fois infini, et jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles passent simplement, ou avec des ordres impairs de multiplicité, $2q_1+1$, $2q_2+1$, ... par n des quinze points de rencontre des six droites de la figure deux à deux : pour mettre en évidence la parité de n, nous écrirons $n = 2\nu + \eta$, η étant 0 ou 1 ;

2° Elles passent, avec des ordres de multiplicité pairs, $2r_1$, $2r_2$, ... par d'autres de ces quinze points : tous ces points multiples, aussi bien que les précédents, étant à branches distinctes ;

3° En dehors de ces points multiples fixes, elles n'ont que des points doubles ordinaires, dont aucun, pour la courbe Σ générale, n'est sur la conique que touchent les six droites [1];

4° Elles touchent les six droites en tous les points où elles les rencontrent, les points communs à deux des droites exceptés.

126. On démontre, comme au n° 114, que le cône qui a pour sommet (11') et pour base une courbe Σ quelconque, coupe la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes C et C'. Il est clair que les courbes C et C' sont de genre p, et admettent chacune pour points multiples d'ordres respectifs

$$2q_1+1,\quad 2q_2+1,\quad \ldots;\quad 2r_1,\quad 2r_2,\quad \ldots,$$

les points doubles de $\mathfrak{K}$ qui ont pour projections les points multiples

---

(1) Ces restrictions ne figuraient pas dans les énoncés des théorèmes fondamentaux, qui sont absolument généraux et conduisent dès lors, sans obstacle possible, aux équations modulaires. C'est pour cette raison que nous avons établi séparément ces théorèmes.

fixes des courbes Σ : ces points multiples de l'espace sont, pour C et C′, à branches distinctes.

Les courbes C et C′ passent ainsi, avec des ordres impairs de multiplicité, par $2\nu + \eta$ points doubles de $\mathfrak{K}$, et peut-être aussi par le point $(11')$. Si $\eta = 0$, $(11')$ est un point d'ordre pair; si $\eta = 1$, d'ordre impair, car, d'après les n°s 58-66, le nombre total des points doubles de $\mathfrak{K}$, par lesquels passe une courbe algébrique avec des ordres impairs, est pair : dans tous les cas, on peut donc dire que $(11')$ est, sur les courbes C (ou C′), un point multiple d'ordre $2m + \eta$, et que ces courbes ont des points d'ordre impair en $2(\nu + \eta)$ points doubles de $\mathfrak{K}$. Ces $2(\nu + \eta)$ points forment nécessairement un des groupes de quatre, six, huit, dix, douze ou seize points rencontrés aux n°s 58-66, et l'on reconnaît de suite, en se reportant à la figure (F) et la notation des points doubles, si ce groupe répond à une valeur paire ou impaire de l'indice k.

Ainsi, la seule configuration des points fixes d'ordre impair des courbes Σ donne la parité de l'indice k qui correspond aux courbes C (ou C′), et cette configuration n'est pas arbitraire.

Je dis maintenant que le point $(11')$ est multiple *à branches distinctes* sur C et C′ : il suffit évidemment d'établir que le cône de sommet $(11')$ et de base Σ coupe, suivant des génératrices distinctes, le cône des tangentes de $\mathfrak{K}$ au point $(11')$, ou, ce qui revient au même, que la conique touchée par les six droites de la figure (F) ne passe par aucun point multiple de Σ et ne touche pas Σ.

Or, par hypothèse, la courbe générale Σ n'a aucun point multiple sur la conique; tout revient à démontrer que les courbes Σ ne touchent pas *toutes* la conique.

S'il en était ainsi, les courbes $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_i} = 0$ (en gardant les notations du n° 114) passeraient par les points de contact de la conique et de la courbe Σ de paramètres ρ_i : les courbes

$$\theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots + \theta_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0$$

couperaient alors Σ en moins de $2(p-1)$ points mobiles, ce qui est impossible, car il n'y a pas, sur une courbe de genre p, de système de groupes de moins de $2(p-1)$ points ayant une multiplicité égale à $p-1$.

Enfin, comme points multiples mobiles, les courbes C ne peuvent avoir que des points doubles répondant aux points doubles de leur projection Σ; mais il n'est pas nécessaire évidemment qu'à un point double de Σ corresponde un point double de C. Si donc p' est le nombre des points doubles mobiles des courbes C, p' sera au plus égal au nombre des points doubles mobiles des Σ.

127. Cela posé, soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

la relation singulière qui répond à la surface $\mathfrak{K}$: si celle-ci est ordinaire, α, β, γ sont nuls, mais les formules qui vont suivre s'appliquent toujours. Représentons par (l, k) les indices des courbes C, la parité de k étant connue par ce qui précède, et écrivons les formules relatives au degré et au genre de C. On a (n°s 50 et 75)

$$2l + \beta k = d + 2m + \eta, \tag{14}$$

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}(l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 - \nu - \eta + 2) \\ \qquad - \Sigma q(q+1) - \Sigma r^2 - m(m+\eta) - p', \end{cases} \tag{15}$$

en se souvenant qu'on a désigné par $2m + \eta$ l'ordre de multiplicité du point (11').

L'équation qui donne le genre (n° 75) est applicable ici sans modification, tous les points multiples de C étant à branches distinctes. En éliminant m entre (14) et (15), et posant toujours

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta,$$

on trouve

$$\begin{cases} \Delta k^2 = 2d^2 + 2(\eta - 1)^2 - 4\nu + 6 \\ \qquad - 8[p + p' + \Sigma q(q+1) + \Sigma r^2] - (2l + \beta k - 2d)^2, \end{cases} \tag{16}$$

ou, en introduisant le nombre $n = 2\nu + \eta$, et observant que η est 0 ou 1,

$$\Delta = \frac{2d^2 - 2n - 8[p + p' - 1 + \Sigma q(q+1) + \Sigma r^2] - (2l + \beta k - 2d)^2}{k^2}. \tag{17}$$

Cette expression de l'invariant Δ contient, outre p', deux entiers indéterminés, k et l, ou mieux k et $2l + \beta k - 2d$, qui figurent tous deux au carré et dont la parité est connue : celle de k l'est par une remarque précédente ; celle de $2l + \beta k - 2d$, par l'équation (14), est la même que celle de $d + \eta$.

Observons que si k est impair et, par suite, sûrement différent de zéro, les courbes C sont singulières, ainsi que la surface $\mathfrak{K}$; pour que celle-ci puisse être ordinaire, il faut que l'équation (17) soit satisfaite pour $k=0$, c'est-à-dire qu'on puisse déterminer l et p' de manière à annuler le numérateur de Δ.

128. *Réciproquement*, supposons qu'on puisse trouver des entiers k, l et p' tels que la valeur (17) de Δ soit positive, entière, de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$; bien entendu, k, l et p' sont soumis aux conditions de parité ou de limitation qu'on a indiquées plus haut. Nous allons montrer que, la figure (F) étant supposée dépendre d'une surface de Kummer singulière d'invariant Δ, il existe, dans le plan de cette figure, des courbes Σ vérifiant les conditions énoncées au n° 125.

129. Pour simplifier, nous donnerons la démonstration dans un cas particulier, qui correspond à celui du premier théorème fondamental ci-dessus, c'est-à-dire que nous supposerons $\eta=0$, $q_i=0$, $r_i=0$, $\nu=2$ et $d=2\lambda$. Il s'agit alors d'établir l'existence, dans le plan de la figure (F), de courbes Σ, de degré 2λ, de genre et de multiplicité p, passant simplement par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touchant ces six droites partout ailleurs : l'hypothèse est que Δ est défini par

$$\Delta=\frac{8\lambda^2-8p-8p'-4\omega^2}{k^2}, \tag{18}$$

car le nombre $2l+\beta k-2d$ de la formule (17) est de même parité que $d+\eta$, ici 2λ; on peut donc le désigner par 2ω.

Quant au nombre k, il est impair, car le groupe des quatre points par lesquels passent simplement les courbes Σ correspond à un indice k impair. Dès lors, en vertu de (18), Δ est de la forme $4N$, et la relation singulière correspondante peut être supposée du type

$$-\frac{1}{4}\Delta g+g'=0.$$

Considérons alors les fonctions intermédiaires normales, de caractéristique nulle, paires, et d'indices (l, k), l étant donné par

$$2l-4\lambda=2\omega \qquad \text{ou} \qquad l=2\lambda+\omega;$$

ces indices sont admissibles, car on voit de suite que $2l \geqq \sqrt{\Delta} \bmod k$. La quantité δ qui leur correspond est

$$(19) \qquad \delta = 2(\lambda+\omega)^2 + 2p + 2p';$$

elle est paire, de sorte que les fonctions normales considérées sont au nombre de $\frac{\delta+2}{2}$, linéairement distinctes, et s'annulent pour les quatre demi-périodes (32'), (34'), (42'), (44').

A ces fonctions correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une famille de courbes d'ordre $2l$ ou $4\lambda+2\omega$, $\frac{\delta}{2}$ fois infinie, passant par les quatre points doubles dont on vient d'écrire les symboles. Parmi ces courbes, considérons celles, C, qui ont en (11') un point multiple d'ordre $2(\lambda+\omega)$ et qui possèdent en outre p' points doubles variables de l'une à l'autre.

Les courbes C dépendent dès lors de

$$\frac{\delta}{2} - (\lambda+\omega)^2 - p',$$

ou, d'après (19), de p paramètres *au moins*, leur genre est *au plus* celui que donne la formule générale du n° 75, car les conditions imposées peuvent entraîner d'autres singularités qui, nécessairement, diminuent le genre. En désignant ce genre par p_1 on a ainsi :

$$p_1 \leqq \frac{\delta}{2} - (\lambda+\omega)^2 - p',$$

c'est-à-dire

$$p_1 \leqq p.$$

Les projections des courbes C sur le plan de la figure (F) sont des courbes Σ, d'ordre $4\lambda+2\omega-2(\lambda+\omega)$ ou 2λ, de genre p_1, formant un système p_2 fois infini ($p_2 \geqq p$), passant par les points (32'), (34'), (42'), (44') de la figure, et touchant partout ailleurs les six droites; tout revient à démontrer que $p_1 = p_2 = p$, ou, en vertu des inégalités qui précèdent, que p_2 ne peut être supérieur à p_1.

Or, si $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sont les p_2 paramètres dont dépend l'équation générale $\Sigma = 0$ des courbes Σ, le système linéaire

$$\theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots = 0,$$

découpe (n° 114), sur la courbe Σ de paramètres ρ_i, un système de groupes de $2(p_1 - 1)$ points mobiles et de multiplicité $p_2 - 1$. Comme sur une courbe de genre p_1 il n'y a pas de système de groupes de $2(p_1 - 1)$ points, plus de $p_1 - 1$ fois infini, il faut nécessairement que p_2 soit au plus égal à p_1. C. Q. F. D.

130. Une démonstration semblable s'applique au cas général, et aussi au cas particulier où k et le numérateur de Δ dans (17) sont nuls : la surface $\mathfrak{K}$ est alors une surface non singulière.

Applications.

131. I. Si l'on forme, par la méthode du n° 108, l'équation modulaire pour $\Delta = 8N$, en posant $N = \lambda^2 - p$, la formule (18) et la théorie précédente montrent qu'on obtiendra en même temps les équations modulaires par les invariants

$$\Delta' = \frac{8N - 8p' - 4\omega^2}{k^2},$$

k étant un entier impair, ω un entier quelconque, p' un entier au plus égal au nombre des points doubles d'une courbe Σ, d'ordre 2λ et de genre p, c'est-à-dire

$$p' \leqq 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - p.$$

On connaît ainsi les facteurs étrangers dont il faut débarrasser l'équation modulaire. Cette remarque s'applique aux autres cas

$$\Delta = 8N + 4, \quad 8N + 1 \quad \text{ou} \quad 8N + 5.$$

132. II. Δ étant donné de la forme $8N$, par exemple, posons

$$8N = 8\lambda^2 - 8\Sigma r^2 \qquad \text{ou} \qquad N = \lambda^2 - \Sigma r^2,$$

ce qui est toujours possible, car il suffit de prendre pour λ le plus petit entier dont le carré atteigne ou surpasse N, et d'exprimer la différence $\lambda^2 - N$ par une somme de quatre carrés r_1, r_2, r_3, r_4. Alors, en exprimant qu'il existe, dans la plan de la figure (F), une courbe unicursale Σ, d'ordre 2λ, passant par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, ayant des points d'ordre $2r_1$, $2r_2$, $2r_3$, $2r_4$ en quatre autres des points de concours des six droites deux à deux et tou-

chant ces droites partout ailleurs, on obtient le produit des équations modulaires pour les invariants compris dans la formule

$$\Delta = \frac{8\lambda^2 - 8p' - 8\Sigma r^2 - 4\omega^2}{k^2} \quad \text{ou} \quad \frac{8N - 8p' - 4\omega^2}{k^2},$$

k étant un entier impair, ω un entier quelconque, p' un entier au plus égal à

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \Sigma r(r-1).$$

On voit qu'on peut obtenir ainsi les équations modulaires pour les invariants $8N$ en prenant pour Σ *une courbe unicursale*, ce qui simplifie notablement les calculs.

La même remarque s'applique aux invariants

$$8N+4,\ 8N+1,\ 8N+5.$$

133. III. Il est clair enfin que la théorie générale précédente donne, pour former les équations modulaires de proche en proche, d'autres procédés que ceux qui dérivent des théorèmes fondamentaux : dans chaque cas particulier, on aura à choisir le plus avantageux.

Cas particuliers et exemples.

134. Dans le cas de l'invariant $\Delta = 12$, les propositions générales donnent les énoncés suivants :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A *et* A', B *et* B', C *et* C', *de telle sorte qu'il existe un système simplement infini de cubiques passant par les sommets des trois couples et touchant en outre les six droites, la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* 12 *ou à l'invariant* 8, *et réciproquement.*

Comme on sait caractériser autrement la figure (F) qui répond à l'invariant 8, ce théorème donne la propriété modulaire caractéristique pour l'invariant 12.

On pourrait voir que dans le cas $\Delta = 12$, il n'y a qu'*un* système de cubiques satisfaisant aux conditions de l'énoncé; dans le cas de $\Delta = 8$,

il y en a *deux* : cela tient à ce que, dans les calculs du n° 129, on peut donner à ω le signe $\pm$, mais ω étant nul pour $\Delta = 12$, le double signe n'introduit aucune différence.

De même :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A, A′; B, B′; C, C′, *de telle sorte qu'il existe une cubique passant par les sommets des trois couples, ayant un point double au point d'intersection de* A *et de* B, *et touchant en outre les droites* A′, B′, C, C′, *la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* 12 *ou à l'invariant* 8.

135. Voici d'autres exemples :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A, A′; B, B′; C, C′, *de telle sorte qu'il existe une quartique unicursale passant par les* 12 *points d'intersection des trois couples deux à deux, la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'un des invariants* 16, 12, 8, 4, *et réciproquement.*

Lorsque les six droites forment un hexagone auquel on peut inscrire et circonscrire un système p fois infini de quartiques de genre p ($p = 0, 1, 2$, ou 3), *la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* $28 - 8p$, *ainsi qu'à tous les invariants pairs inférieurs, et réciproquement.*

Terminons par un exemple qui convient à une surface non singulière :

Étant données six droites tangentes à une même conique, il existe une infinité simple de cubiques planes passant par les six sommets du quadrilatère complet formé par quatre quelconques de ces droites, passant par le point de rencontre des deux autres et touchant en outre chacune de celles-ci.

SUR

LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES

(Deuxième Mémoire).

Journal de Mathématiques, 5e série, t. VI (1900).

Dans un premier Mémoire, inséré au Tome V (5e série) de ce *Journal*, j'ai commencé l'étude des fonctions abéliennes à deux variables que j'ai nommées *singulières :* ce sont celles qui admettent pour périodes normales les quantités

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g', \end{matrix}$$

liées par une *relation singulière*, c'est-à-dire de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E sont des entiers.

Le présent Mémoire continue la même étude, dans les domaines de la transformation et de la multiplication complexe.

Les fonctions abéliennes singulières admettent des transformations qui n'existent pas dans le cas général, et que je nomme *singulières*, par opposition aux transformations *ordinaires* de M. Hermite; la première Partie du Mémoire est consacrée à la recherche de ces transformations, à leur réduction, à la transformation des fonctions thêta et des fonctions intermédiaires singulières.

La seconde Partie s'applique aux transformations singulières du premier degré, dont je détermine complètement la forme générale; on y voit apparaître ce résultat curieux et inattendu que deux systèmes de

fonctions abéliennes, liés par une transformation (singulière) de degré 1, n'ont pas toujours les mêmes modules : sous forme géométrique, c'est dire que deux surfaces hyperelliptiques, ayant des modules différents, peuvent se correspondre point par point.

Dans la troisième Partie est posé et résolu le problème de la multiplication complexe, considérée comme un cas particulier de la transformation : il s'agit de rechercher les fonctions abéliennes telles qu'une transformation convenable leur fasse correspondre des fonctions aux mêmes périodes. Nous trouvons ainsi que les fonctions singulières possèdent seules une multiplication complexe; à côté des fonctions simplement, doublement ou triplement singulières, et de fonctions réductibles à des fonctions elliptiques particulières, nous rencontrons d'intéressantes fonctions, simplement singulières, dont les périodes vérifient, en outre, deux relations quadratiques.

Ce sont là les seuls cas de multiplication complexe; nous les étudions avec détail, en indiquant toutes les multiplications correspondantes dans les cas les plus intéressants.

La quatrième et dernière Partie, enfin, traite des multiplications de degré 1, c'est-à-dire des transformations birationnelles des surfaces hyperelliptiques en elles-mêmes; nous y démontrons, qu'en dehors des correspondances évidentes $U = \pm u + c$, $V = \pm v + c'$, toutes les transformations cherchées dérivent de l'existence de relations singulières entre les périodes et se déterminent dès lors aisément; il n'y a d'exception que pour les surfaces attachées au radical $\sqrt{x^5 + 1}$, dont le Chapitre final énumère complètement les transformations univoques.

Nota. — Les numéros des paragraphes du présent Travail font suite à ceux du précédent; pour indiquer un renvoi à un numéro du premier Mémoire, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I.

PREMIÈRE PARTIE

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES.

---

136. Le problème général de la transformation des fonctions abéliennes, posé et résolu par M. Hermite ([1]), est le suivant :

Soit un premier système de fonctions abéliennes à deux variables, U *et* V, *admettant comme périodes normales* (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'); *soit, de même, un second système analogue, de variables u et v, et de périodes* (1, 0); (0, 1); (*g*, *h*); (*h*, *g'*) : *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions abéliennes du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes du second et cela en établissant entre les variables des relations de la forme*

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v; \tag{1}$$

λ, μ, λ' μ' *désignant des constantes.*

Sous forme géométrique, le problème s'énonce ainsi :

Soit S *une surface hyperelliptique générale, pour laquelle les coordonnées d'un point s'expriment en fonction abélienne des variables* U *et* V *du premier système; soit, de même, s une surface analogue répondant aux variables u et v du second système : dans quel cas la correspondance* (1), *établie entre les points des deux surfaces, fait-elle, à un point* (*u*, *v*) *de s, répondre* UN ET UN SEUL *point* (U, V) *de* S ?

Nous dirons que la transformation (1) fait passer des périodes G, H, G' aux périodes *g*, *h*, *g'*; ou des variables U, V aux variables *u*, *v*; ou de la surface S à la surface *s*.

Par *point* U, V, on entendra *géométriquement* un point de S; *analytiquement*, un système de valeurs de U, V, défini aux périodes près.

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL; 1855.

137. Pour que les conditions du problème de la transformation soient vérifiées, il faut et il suffit qu'à un point (u, v) corresponde un seul point U, V; c'est-à-dire que, par les relations (1), U et V augmentent d'une de leurs périodes simultanées, quand u, v augmentent d'une des leurs. On a donc, en désignant par a_i, b_i, c_i, d_i des entiers, conformément aux notations de M. Hermite :

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda = a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu = b_0 + b_3 G + b_2 H, \\ \lambda' = a_1 + a_3 H + a_2 G', & \mu' = b_1 + b_3 H + b_2 G', \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 G + c_2 H, \\ \lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3 H + d_2 G', & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{cases}$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ', G, H, G' entre ces huit relations conduit, entre g, h, g', à l'équation suivante, où l'on pose pour simplifier $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$:

$$(3)\quad \begin{cases} g[(ca)_{03} + (ca)_{12}] + g'[(bd)_{03} + (bd)_{12}] \\ \quad + h[(cb)_{03} + (ad)_{03} + (cb)_{12} + (ad)_{12}] \\ \quad + (h^2 - gg')[(ba)_{03} + (ba)_{12}] + [(dc)_{03} + (dc)_{12}] = 0. \end{cases}$$

De même, l'élimination de λ, μ, λ', μ', g, h, g' entre les relations (2) donnerait, entre G, H, G', l'équation, équivalente à (3) :

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} G[(ad)_{31} + (bc)_{31}] + G'[(ad)_{02} + (bc)_{02}] \\ \quad + H[(ad)_{03} + (bc)_{03} + (ad)_{21} + (bc)_{21}] \\ \quad + (H^2 - GG')[(ad)_{23} + (bc)_{23}] + [(ad)_{01} + (bc)_{01}] = 0. \end{cases}$$

Quand g, h, g' sont quelconques, l'équation (3) ne peut avoir lieu que si les coefficients de g, h, g', $h^2 - gg'$ et le terme constant y sont nuls : c'est l'hypothèse qu'a faite implicitement M. Hermite, et dont il a déduit la théorie ordinaire de la transformation. Dans ce cas, M. Hermite a montré que les coefficients de l'équation (3 *bis*) sont également nuls, et réciproquement si les coefficients de (3 *bis*) sont nuls, ceux de (3) le sont aussi.

Au contraire, si g, h, g' et $h^2 - gg'$ satisfont à une relation linéaire à coefficients entiers, c'est-à-dire à une *relation singulière*, il existera d'autres transformations que celles de M. Hermite; c'est l'étude de ces transformations *singulières* qui va nous occuper maintenant.

138. Supposons donc que g, h, g' soient liés par la relation singu-

lière

$$(4) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, ..., E sont des entiers sans diviseur commun, et *qu'il n'y ait, entre g, h, g', aucune autre relation analogue*. On déduira de (3), en désignant par k un entier :

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} (ac)_{03} + (ac)_{12} &= Ak,\\ (db)_{03} + (db)_{12} &= Ck,\\ (ab)_{03} + (ab)_{12} &= Dk,\\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= Ek,\\ (bc)_{03} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12} &= Bk. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas d'une transformation ordinaire, ou d'Hermite, l'entier k est nul, et réciproquement.

Soient alors a_i, b_i, c_i, d_i des valeurs des seize entiers a, b, c, d [1] vérifiant les relations (5), où k est un entier, quelconque d'ailleurs; les relations (2) donneront linéairement les valeurs de λ, λ', μ, μ', et celles de G, H, G', en fonction de g, h, g', de sorte que l'on obtiendra ainsi tous les systèmes cherchés de périodes G, H, G', avec les transformations (1) correspondantes.

Cette méthode conduit sans difficulté aux formules suivantes, analogues à celles de M. Hermite pour les transformations ordinaires :

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} G &= \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02}g + [(bc)_{02} + (da)_{02}]h + (db)_{02}g' + (ab)_{02}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},\\ G' &= \frac{(cd)_{31} + (ac)_{31}g + [(bc)_{31} + (da)_{31}]h + (db)_{31}g' + (ab)_{31}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},\\ -H &= \frac{(cd)_{03} + (ac)_{03}g + [(bc)_{03} + (da)_{03}]h + (db)_{03}g' + (ab)_{03}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},\\ H &= \frac{(cd)_{12} + (ac)_{12}g + [(bc)_{12} + (da)_{12}]h + (db)_{12}g' + (ab)_{12}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},\\ H^2 - GG' &= \frac{(cd)_{01} + (ac)_{01}g + [(bc)_{01} + (da)_{01}]h + (db)_{01}g' + (ab)_{01}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')}; \end{aligned}\right.$$

les dénominateurs étant les mêmes dans les cinq formules.

---

[1] Nous les appellerons les *entiers caractéristiques* de la transformation.

On obtiendrait de même g, h, g' en fonction de G, H, G' :

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\,G + [(db)_{03} - (db)_{12}]\,H + (db)_{02}\,G' + (db)_{23}\,(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + [(ab)_{03} - (ab)_{12}]\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}\,(H^2 - GG')};\\
g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}\,G + [(ac)_{03} - (ac)_{12}]\,H + (ac)_{02}\,G' + (ac)_{23}\,(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + [(ab)_{03} - (ab)_{12}]\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}\,(H^2 - GG')};\\
-h &= \frac{(bc)_{01} + (bc)_{31}\,G + [(bc)_{03} - (bc)_{12}]\,H + (bc)_{02}\,G' + (bc)_{23}\,(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + [(ab)_{03} - (ab)_{12}]\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}\,(H^2 - GG')};\\
h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\,G + [(ad)_{03} - (ad)_{12}]\,H + (ad)_{02}\,G' + (ad)_{23}\,(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + [(ab)_{03} - (ab)_{12}]\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}\,(H^2 - GG')};\\
h^2 - gg' &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31}\,G + [(cd)_{03} - (cd)_{12}]\,H + (cd)_{02}\,G' + (cd)_{23}\,(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\,G + [(ab)_{03} - (ab)_{12}]\,H + (ab)_{02}\,G' + (ab)_{23}\,(H^2 - GG')};
\end{aligned}
\right.
$$

les cinq dénominateurs étant aussi les mêmes.

En égalant les deux valeurs de H que donnent les relations (6), on retrouve, en tenant compte de (5), la relation singulière initiale

$$(8) \qquad k[\,Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E\,] = 0.$$

De même en égalant les deux valeurs de h données par (7), on retrouve la relation singulière (3 *bis*) entre G, H, G'. Celle-ci comme on l'a observé plus haut en invoquant un résultat de M. Hermite, n'est pas une identité, puisque (3) n'en est une, en vertu de (5), que si k est nul, c'est-à-dire si la transformation est ordinaire. Donc :

Les fonctions abéliennes, initiales et finales, que lie une transformation singulière, sont singulières.

139. Soit alors

$$(9) \qquad A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0,$$

la relation singulière (3 *bis*) entre G, H, G', les entiers qui y figurent n'ayant pas de diviseur commun; on a, en désignant par k' un entier :

$$
(10) \quad \left\{
\begin{aligned}
(ad)_{13} + (bc)_{13} &= A'k',\\
(ad)_{20} + (bc)_{20} &= C'k',\\
(ad)_{32} + (bc)_{32} &= D'k',\\
(ad)_{10} + (bc)_{10} &= E'k',\\
(ad)_{12} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (bc)_{03} &= B'k'.
\end{aligned}
\right.
$$

140. *Transformation adjointe.* — La transformation définie par les

équations (1), (2) et (5), et que nous appellerons plus brièvement la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i), fait répondre, à un point (u, v) de la surface s, un et un seul point (U, V) de la surface S. *Inversement*, il existe une transformation singulière, que nous nommerons *adjointe* de la première, faisant, à un point de S, correspondre un et un seul point de s.

Soit

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}$$

le Tableau des entiers de la première transformation ; pour la transformation adjointe, le Tableau sera (comme dans le cas des transformations ordinaires)

$$\begin{matrix} d_3 & c_3 & -b_3 & -a_3 \\ d_2 & c_2 & -b_2 & -a_2 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \\ -d_0 & -c_0 & b_0 & a_0 \end{matrix}$$

Pour vérifier que cette nouvelle transformation possède bien la propriété indiquée, il suffit d'observer que les équations (5) deviennent les équations (10) si l'on y remplace A, B, C, D, E par A′, B′, C′, D′, E′, k par k', et tout nombre a_i, b_i, c_i, d_i du premier Tableau par le nombre qui occupe la même place dans le second Tableau.

De même, les équations (6) deviennent les équations (7) si l'on y fait la même substitution, en permutant g, h, g' et G, H, G′.

141. *Degré et indices d'une transformation.* — Nous appellerons *degré* de la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

et nous désignerons cette quantité par δ. Si la transformation est *ordinaire*, on sait que δ *est le carré de l'ordre*.

Nous introduirons, avec δ, deux autres entiers l et k que nous nom-

merons *indices* de la transformation. Le premier, l, sera défini par

(11) $$l = (ad)_{03} + (ad)_{12};$$

le second, k, est l'entier qui figure dans les formules (5).

Toutefois, pour définir k sans ambiguïté, *une convention est nécessaire.*

En effet, dans la relation singulière (4),

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les entiers A, B, C, D, E, qui n'ont, par hypothèse, aucun diviseur commun, ne sont définis qu'au signe près, c'est-à-dire que l'on peut changer simultanément leurs signes : ce changement, fait dans (5), entraîne aussi le changement de signe de k, de sorte que k présente une ambiguïté de signe. Pour préciser, nous supposerons que A est positif; dans le cas où A serait nul, nous supposerons $D > 0$, et, si D était aussi nul, $B > 0$. D'ailleurs, A, D, B ne peuvent être nuls à la fois, car l'invariant de la relation singulière, $B^2 - 4AC - 4DE$, serait nul, et l'on serait placé dans un cas spécial sans intérêt (I, n° 17).

Grâce à cette convention, les signes de A, B, C, D, E sont définis, et il en est de même de celui de k.

On a entre δ, l et k une importante relation. On déduit, en effet, de (5) :

$$l(l + Bk) = [(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} + (bc)_{12}],$$

$$k^2(AC + DE) = [(ac)_{03} + (ac)_{12}][(db)_{03} + (db)_{12}] + [(ab)_{03} + (ab)_{12}][(cd)_{03} + (cd)_{12}],$$

et l'on vérifie que la somme des deux seconds membres est identique au déterminant δ. Donc

(12) $$\delta = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$$

ou

$$4\delta = (2l + Bk)^2 - \Delta k^2,$$

Δ désignant l'invariant $B^2 - 4AC - 4DE$ de la relation singulière (4).

142. *Degré et indices de la transformation adjointe.* — Pour la transformation adjointe, le second indice est l'entier k' qui figure dans les formules (10), en supposant que l'on fasse sur les signes de A', D',

B' la même hypothèse que sur A, D, B; soient δ' le degré et l' le premier indice. On a, d'après les nos 140 et 141 :

$$\delta' = \delta, \qquad l' = (ad)_{03} + (bc)_{03}.$$

On a également la relation

(13) $$2l + Bk = 2l' + B'k';$$

car, en vertu de la dernière des équations (5) ou (10), chacun des deux membres est égal à la quantité

$$(bc)_{03} + (bc)_{12} + (ad)_{03} + (ad)_{12}.$$

Enfin, puisque $\delta' = \delta$:

$$l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 = l'^2 + B'k'l' + (A'C' + D'E')k'^2,$$

d'où, en tenant compte de (13),

$$k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = k'^2(B'^2 - 4A'C' - 4D'E').$$

Comme $B^2 - 4AC - 4DE$ et $B'^2 - 4A'C' - 4D'E'$ sont respectivement les invariants, Δ et Δ', des relations singulières (4) et (9), entre g, h, g' et G, H, G', on peut écrire

(14) $$k^2\Delta = k'^2\Delta'.$$

L'équation (14) montre que Δ et Δ' sont de même signe, c'est-à-dire que l'invariant d'une relation singulière et celui de la relation singulière transformée ont le même signe : en vertu d'une propriété fondamentale des invariants (I, n° 14), ces deux quantités sont donc *positives*. Nous tirons de (14)

(14 *bis*) $$k'\sqrt{\Delta'} = \varepsilon k\sqrt{\Delta}.$$

ε désignant $+1$ ou -1.

Selon que ε sera égal à $+1$ ou à -1, nous dirons que la transformation est *droite* ou *gauche* : cette dénomination est d'ailleurs purement conventionnelle, puisqu'elle dérive des hypothèses faites sur les signes des coefficients dans les relations singulières (4) et (9).

Pour une transformation ordinaire, les indices k et k' sont nuls, ε est indéterminé.

143. *Signification analytique du degré.* — La transformation singu-

lière

(1) $$U=\lambda u+\mu v, \qquad V=\lambda' u+\mu' v$$

fait correspondre à un *point* u, v un seul *point* U, V; inversement, à un point U, V, combien correspondent de points u, v?

Augmentons U et V respectivement d'une période, c'est-à-dire de

$$X_0+X_3G+X_2H \quad \text{et} \quad X_1+X_3H+X_2G',$$

les X_i étant entiers; les équations (1) donneront de nouvelles valeurs de u, v, auxquelles correspondra un nouveau *point* u, v, à moins que u et v n'aient aussi augmenté d'une période, c'est-à-dire que l'on n'ait, en désignant par x_0, x_1, x_2, x_3 des entiers,

$$(15)\quad \begin{cases} X_0+X_3G+X_2H=\lambda\,(x_0+x_3g+x_2h)+\mu\,(x_1+x_3h+x_2g'),\\ X_1+X_3H+X_2G'=\lambda'(x_0+x_3g+x_2h)+\mu'(x_1+x_3h+x_2g'). \end{cases}$$

On peut écrire ces équations en tenant compte de (2) :

$$\begin{aligned} X_0+X_3G+X_2H=\ & x_0(a_0+a_3G+a_2H)+x_1(b_0+b_3G+b_2H)\\ &+x_2(c_0+c_3G+c_2H)+x_3(d_0+d_3G+d_2H),\\ X_1+X_3H+X_2G'=\ & x_0(a_1+a_3H+a_2G')+x_1(b_1+b_3H+b_2G')\\ &+x_2(c_1+c_3H+c_2G')+x_3(d_1+d_3H+d_2G'); \end{aligned}$$

relations qui doivent être des identités en G, H, G'. Elles sont en effet de la forme

$$N_1G+N_2H=M, \qquad N_1H+N_2G'=M',$$

les N et M étant des quantités réelles : si donc ces quantités ne sont pas toutes nulles, on en conclura, en désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', la relation inadmissible

$$H_1^2-G_1G'_1=0.$$

Par suite, les équations (15) donnent

$$(16)\quad \begin{cases} X_0=a_0x_0+b_0x_1+c_0x_2+d_0x_3,\\ X_1=a_1x_0+b_1x_1+c_1x_2+d_1x_3,\\ X_2=a_2x_0+b_2x_1+c_2x_2+d_2x_3,\\ X_3=a_3x_0+b_3x_1+c_3x_2+d_3x_3, \end{cases}$$

En vertu de ce qui précède, au système (U, V) et au système $(U+X_0+X_3G+X_2H,\ V+X_1+X_3H+X_2G')$ correspond le même

point (u, v), si les équations (16) donnent pour x_0, x_1, x_2, x_3 des valeurs entières; il en résulte, pour le nombre des points (u, v) qui correspondent à un point (U, V), la conséquence suivante :

Considérons dans les équations (16) les X_i comme donnés et les x_i comme des inconnues; à deux systèmes de valeurs des X_i correspondent deux systèmes de valeurs des x_i, qui seront dits *non distincts* s'ils diffèrent de nombres entiers, et *distincts* dans le cas contraire : le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) est égal au nombre des solutions *distinctes* des équations (16), lorsque les X_i prennent toutes les valeurs entières possibles.

Or on peut, comme on sait, par des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, ramener le système d'équations (16) au type

$$(17)\qquad \begin{cases} \Xi_0 = \lambda_0 \xi_0, \\ \Xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \\ \Xi_2 = \lambda_2 \xi_2, \\ \Xi_3 = \lambda_3 \xi_3, \end{cases}$$

où les λ_i sont des entiers dépendant uniquement des a_i, b_i, c_i, d_i, les ξ_i les inconnues nouvelles et les Ξ_i des entiers pouvant prendre, comme les X_i, toutes les valeurs entières possibles. Le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) sera évidemment encore égal au nombre des solutions distinctes des équations (17).

Or il est clair qu'en donnant à Ξ_0 les valeurs $0, 1, \ldots, \operatorname{mod}\lambda_0$; à Ξ_1 les valeurs $0, 1, \ldots, \operatorname{mod}\lambda_1$, etc., on obtient pour les ξ_i des solutions distinctes, c'est-à-dire ne différant pas de nombres entiers; pour d'autres valeurs des Ξ_i on obtient des solutions non distinctes des précédentes : le nombre cherché est donc égal à $\operatorname{mod}\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, c'est-à-dire, puisque les déterminants des inconnues dans (16) et (17) sont les mêmes, à $\operatorname{mod}\delta$.

Ainsi :

A un point (U, V) *une transformation singulière fait correspondre un nombre de points* (u, v) *égal à son degré en valeur absolue.*

144. *Signe du degré.* — Soient toujours g_1, h_1, g'_1 et G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de g, h, g' et G, H, G'; on vérifie, en partant des

formules (6) ou (7), la relation suivante :

$$(18)\qquad h_1^2 - g_1 g_1' = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G_1'),$$

où $\mathfrak{M}^2$ est une quantité réelle et positive. Nous donnerons d'ailleurs de cette formule une vérification directe très simple, quand nous parlerons de la réduction des transformations singulières (n° 161) : elle est analogue à la formule classique de M. Hermite pour les transformations ordinaires; δ remplace le carré de l'ordre.

On en conclut qu'une transformation singulière ne fera passer d'un système (G, H, G') de périodes *normales* (c'est-à-dire d'un système pour lequel $H_1^2 - G_1 G_1'$ est négatif) à un système (g, h, g') de périodes également *normales*, que si δ est positif.

C'est l'hypothèse que nous ferons toujours dans ce Mémoire : nous étudierons ailleurs les fonctions de u, v aux périodes (1, 0); (0, 1); (g, h); (h, g'), pour lesquelles $h_1^2 - g_1 g_1'$ serait positif; mais ici nous n'envisagerons que des fonctions abéliennes à périodes normales, ce qui nous oblige à admettre que les transformations singulières sont d'ordre positif,

$$(19)\qquad \delta > 0.$$

Il sera aisé de reconnaître, dans les démonstrations qui vont suivre, celles qui s'appliquent aussi au cas où δ serait négatif.

Composition de deux transformations.

145. Soit une première transformation T

$$(\mathrm{T})\qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

faisant passer des variables U, V et des périodes G, H, G' aux variables u, v et aux périodes g, h, g'. Effectuons maintenant une seconde transformation T_1

$$(\mathrm{T}_1)\qquad u = \rho u' + \sigma v', \qquad v = \rho' u' + \sigma' v',$$

faisant passer des variables u, v et des périodes g, h, g' aux variables u', v' et aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$.

Les deux transformations T et T_1, effectuées successivement, font

passer de U, V à u', v', c'est-à-dire qu'à un point u', v' correspond un seul point U, V donné par

$$(T_2)\quad \begin{cases} U = \lambda(\rho u' + \sigma v') + \mu(\rho' u' + \sigma' v'), \\ V = \lambda'(\rho u' + \sigma v') + \mu'(\rho' u' + \sigma' v'). \end{cases}$$

On définit ainsi une nouvelle transformation, T_2, produit de T par T_1, $T_2 = TT_1$; proposons-nous de trouver ses entiers caractéristiques, son degré et ses indices.

146. Soient a_i, b_i, c_i, d_i et a'_i, b'_i, c'_i, d'_i les entiers caractéristiques de T et de T_1; ceux, a''_i, b''_i, c''_i, d''_i, de T_2 s'obtiennent comme il suit. On a par (2) :

$$\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu &= b_0 + b_3 G + b_2 H, \\ \lambda' &= a_1 + a_3 H + a_2 G', & \mu' &= b_1 + b_3 H + b_2 G', \\ \lambda g + \mu h &= d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' &= c_0 + c_3 G + c_2 H, \\ \lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3 H + d_2 G', & \lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3 H + c_2 G', \\ \rho &= a'_0 + a'_3 g + a'_2 h, & \sigma &= b'_0 + b'_3 g + b'_2 h, \\ \rho' &= a'_1 + a'_3 h + a'_2 g', & \sigma' &= b'_1 + b'_3 h + b'_2 g', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On en conclut, exactement comme dans le cas classique des transformations ordinaires :

$$\begin{aligned} \lambda\rho + \mu\rho' &= \lambda a'_0 + \mu a'_1 + (\lambda g + \mu h) a'_3 + (\lambda h + \mu g') a'_2 \\ &= (a_0 + a_3 G + a_2 H) a'_0 + (b_0 + b_3 G + b_2 H) a'_1 \\ &\quad + (d_0 + d_3 G + d_2 H) a'_3 + (c_0 + c_3 G + c_2 H) a'_2, \end{aligned}$$

et par suite, en se reportant à (T_2), on aura

$$\begin{aligned} a''_0 &= a_0 a'_0 + b_0 a'_1 + c_0 a'_2 + d_0 a'_3, \\ a''_3 &= a_3 a'_0 + b_3 a'_1 + c_3 a'_2 + d_3 a'_3, \\ a''_2 &= a_2 a'_0 + b_2 a'_1 + c_2 a'_2 + d_2 a'_3. \end{aligned}$$

Des calculs analogues fourniraient les autres entiers; on trouve ainsi les formules

$$(20)\quad \begin{cases} a''_i = a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3, \\ b''_i = a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3, \\ c''_i = a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3, \\ d''_i = a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3. \end{cases}$$

147. De là résulte immédiatement que le déterminant

$$(a''_i, b''_i, c''_i, d''_i)$$

est le produit des déterminants (a_i, b_i, c_i, d_i) et (a'_i, b'_i, c'_i, d'_i); en d'autres termes, si l'on désigne par δ, δ_1, δ_2 les *degrés* des transformations T, T_1, T_2, on a

$$\delta_2 = \delta\delta_1. \tag{21}$$

148. Passons maintenant au calcul des *indices*. Soient l, k; l_1, k_1; l_2, k_2 les indices de T, T_1, T_2; soient également

$$A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0, \tag{22}$$

$$A g + B h + C g' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{23}$$

$$A_1 \mathcal{G} + B_1 \mathcal{H} + C_1 \mathcal{G}' + D_1(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + E_1 = 0, \tag{24}$$

les relations singulières entre les périodes; enfin, l'_1, k'_1 désigneront les indices de la transformation adjointe de T_1.

On a, par (5) et (10) :

$$(25)\quad \begin{cases} (ac)_{03} + (ac)_{12} = Ak, \\ (db)_{03} + (db)_{12} = Ck, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = Dk, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} = Ek, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = l, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} = l + Bk; \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} (a'c')_{03} + (a'c')_{12} = A_1 k_1, \\ (d'b')_{03} + (d'b')_{12} = C_1 k_1, \\ (a'b')_{03} + (a'b')_{12} = D_1 k_1, \\ (c'd')_{03} + (c'd')_{12} = E_1 k_1, \\ (a'd')_{03} + (a'd')_{12} = l_1 \\ (b'c')_{03} + (b'c')_{12} = l_1 + B_1 k_1; \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} (a'd')_{13} + (b'c')_{13} = A k'_1, \\ (a'd')_{20} + (b'c')_{20} = C k'_1, \\ (a'd')_{32} + (b'c')_{32} = D k'_1, \\ (a'd')_{10} + (b'c')_{10} = E k'_1, \\ (a'd')_{03} + (b'c')_{03} = l'_1, \\ (a'd')_{12} + (b'c')_{12} = l'_1 + B k'_1, \end{cases}$$

Pour calculer k_2, observons que, par définition (5),

$$A_1 k_2 = (a''c'')_{03} + (a''c'')_{12};$$

d'où, en remplaçant les a'' et c'' par leurs valeurs (20),

$$\begin{aligned} A_1 k_2 = \quad & (a'c')_{01}[(ab)_{03} + (ab)_{12}] + (a'c')_{02}[(ac)_{03} + (ac)_{12}] \\ & + (a'c')_{03}[(ad)_{03} + (ad)_{12}] + (a'c')_{12}[(bc)_{03} + (bc)_{12}] \\ & + (a'c')_{13}[(bd)_{03} + (bd)_{12}] + (a'c')_{23}[(cd)_{03} + (cd)_{12}]; \end{aligned}$$

et, en vertu de (25),

$$(28) \qquad \begin{aligned} A_1 k_2 &= (a'c')_{01} D k + (a'c')_{02} A k + (a'c')_{03} l \\ &\quad + (a'c')_{12}(l + Bk) + (a'c')_{31} C k + (a'c')_{23} E k \\ &= (l + Bk)[(a'c')_{03} + (a'c')_{12}] \\ &\quad - Bk(a'c')_{03} + Dk(a'c')_{01} \\ &\quad + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23}. \end{aligned}$$

Par (26), $(a'c')_{03} + (a'c')_{12} = A_1 k_1$; si maintenant, dans les autres termes, on remplace A, B, C, D, E par leurs valeurs tirées de (27), il vient, après quelques calculs longs, mais faciles,

$$\begin{aligned} & - Bk(a'c')_{03} + Dk(a'c')_{01} + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23} \\ & = \frac{k}{k'_1}[(a'c')_{03} + (a'c')_{12}][(a'd')_{03} + (b'c')_{03}] \\ & = \frac{k}{k'_1} A_1 k_1 l'_1; \end{aligned}$$

d'où

$$A_1 k_2 = A_1 k_1 (l + Bk) + \frac{k}{k'_1} A_1 k_1 l'_1,$$

c'est-à-dire

$$k_2 = k_1(l + Bk) + \frac{k k_1}{k'_1} l'_1.$$

Or on a (n° 142)

$$2 l'_1 + B k'_1 = 2 l_1 + B_1 k_1,$$

$$k'_1 \sqrt{\Delta} = \varepsilon_1 k_1 \sqrt{\Delta_1},$$

en désignant par Δ et Δ_1 les invariants des relations singulières (23) et (24), et par ε_1 l'unité positive ou négative qui répond à la transformation T_1.

De là résulte l'expression finale de k_2 :

$$(29) \qquad 2 k_2 = k_1(2l + Bk) + \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2 l_1 + B_1 k_1).$$

On pourrait calculer l_2 par une méthode analogue, en partant de $l_2 = (a''d'')_{03} + (a''d'')_{12}$; il sera plus simple d'utiliser la relation (21), $\delta_2 = \delta\delta_1$, qui s'écrit, en remplaçant les δ par leurs valeurs en fonction des indices,

$$4(2l_2 + B_1 k_2)^2 - 4\Delta_1 k_2^2 \\ = [(2l + Bk)^2 - \Delta k^2][(2l_1 + B_1 k_1)^2 - \Delta_1 k_1^2].$$

Substituons à k_2 sa valeur (29), nous trouvons

$$4(2l_2 + B_1 k_2)^2 = (2l + Bk)^2(2l_1 + B_1 k_1)^2 \\ + 2\sqrt{\Delta\Delta_1}\,\varepsilon_1 k k_1 (2l + Bk)(2l_1 + B_1 k_1) + \Delta\Delta_1 k^2 k_1;$$

d'où

$$2(2l_2 + B_1 k_2) = \pm\left[(2l + Bk)(2l_1 + B_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}\right].$$

On doit prendre le signe $+$; car si $k = k_1 = 0$, c'est-à-dire si les deux transformations sont ordinaires, l, l_1, l_2 sont les ordres de T, T_1, T_2, et l'on sait que $l_2 = ll_1$. La méthode de calcul de l_2 signalée plus haut donne le même résultat, sans introduire d'ambiguïté de signe. Ainsi,

$$(30) \qquad 2(2l_2 + B_1 k_2) = (2l + Bk)(2l_1 + B_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}.$$

Les formules (29) et (30) donnent la solution du problème posé, en fournissant les expressions des indices k_2 et l_2.

149. *Remarque I.* — Les calculs précédents supposent que T_1 est une transformation *singulière*, c'est-à-dire que k_1 et k'_1 ne sont pas nuls, car on a tiré de (27) les valeurs de A, B, C, D, E, admettant ainsi $k'_1 \gtrless 0$.

Si T_1 est une transformation ordinaire, l'équation (28) est toujours vraie et donne

$$A_1 k_2 = A_1 k_1 (l + Bk) - Bk(a'c')_{03} \\ + Dk(a'c')_{01} + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23}.$$

Or la transformation T_1 conduit des périodes g, h, g' qui vérifient la relation singulière

$$(23) \qquad Ag + Bh + \ldots = 0,$$

aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, vérifiant

$$(24) \qquad A_1\mathcal{G} + B_1\mathcal{H} + \ldots = 0.$$

D'ailleurs, les relations classiques de M. Hermite pour les transformations ordinaires donnent sans ambiguïté g, h, g', $h^2 - gg'$ en fonction de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}'$: si l'on porte ces expressions dans (23) et si l'on chasse le dénominateur, on retombe sur (24) à un facteur entier près, θ, ainsi qu'on l'a observé au n° 2 du premier Mémoire (où ce facteur a été désigné par ρ). On a trouvé alors

(31) $$\theta^2(B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1) = l_1^2(B^2 - 4AC - 4DE),$$

en désignant par l_1 l'ordre de T_1.

Si l'on compare ensuite les coefficients de $\mathcal{G}$ dans (24) et dans la relation déduite de (23) comme on vient de le dire, on trouve

$$A_1\theta = A(a'c')_{02} + C(a'c')_{31} - B(a'c')_{03} + D(a'c')_{01} + E(a'c')_{23};$$

d'où

$$A_1 k_2 = A_1 k_1(l + Bk) + kA_1\theta,$$

c'est-à-dire, puisque $k_1 = 0$,

$$k_2 = k\theta.$$

D'ailleurs, par (31),

$$\theta = \varepsilon_1 l_1 \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}},$$

ε_1 désignant ± 1. Nous dirons que la transformation ordinaire T_1 est *droite ou gauche, par rapport à la relation singulière* (23), selon que ε_1 sera $+1$ ou -1, les conventions d'usage étant faites sur les signes de A, D, B et A_1, D_1, B_1.

Il vient ainsi

(32) $$k_2 = \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}\, l_1,$$

ce qui est la formule (29), où l'on fait $k_1 = 0$.

La formule (30) subsiste dès lors également et donne

(33) $$2l_2 = B_1 k_2 + (2l + Bk) l_1.$$

150. *Remarque II.* — Si la *seconde* transformation, T_1, est ordinaire et du premier ordre, l_1 est égal à 1 et Δ à Δ_1 (I, n° 2); on a alors $k_2 = \varepsilon_1 k$ et $2l_2 + B_1 k_2 = 2l + Bk$. De même, si la *première* transformation, T, est ordinaire et du premier ordre, c'est-à-dire si $l = 1$, $k = 0$, on a $k_2 = k_1$, $l_2 = l_1$.

Réduction d'une transformation singulière.

151. On peut réduire une transformation *singulière* quelconque à un type simple, en la faisant précéder et suivre de transformations *ordinaires* du premier ordre, convenablement choisies.

Tout d'abord, une transformation ordinaire du premier ordre permet de ramener la relation singulière entre les périodes g, h, g', au type

(R) $$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

β étant égal à 0 ou à ± 1 et α, γ étant entiers (I, n° 6). De plus, on a le droit de supposer $\alpha > 0$ et même $\alpha = 1$ (I, n° 10).

Avant d'aborder la théorie générale de la réduction, nous ferons connaître une transformation singulière simple, dont la considération nous sera très utile.

152. Cette transformation se définit ainsi : Soient u et v deux variables abéliennes, aux périodes (g, h, g') liées par la relation singulière (R) ; u' et v' deux autres variables aux périodes $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$ définies par les relations suivantes, où l et k désignent deux entiers et δ la quantité

(34) $$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2,$$

(35) $$\begin{cases} \mathcal{G}\delta = lg - \gamma kh, \\ \mathcal{H}\delta = lh - \gamma kg' = \alpha kg + (l + \beta k)h, \\ \mathcal{G}'\delta = \alpha kh + (l + \beta k)g'. \end{cases}$$

Les deux valeurs de $\mathcal{H}\delta$ sont compatibles en vertu de

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$$

On conclut de (35)

(36) $$\begin{cases} g = (l + \beta k)\mathcal{G} + \gamma k\mathcal{H}, \\ h = (l + \beta k)\mathcal{H} + \gamma k\mathcal{G}' = -\alpha k\mathcal{G} + l\mathcal{H}, \\ g' = -\alpha k\mathcal{H} + l\mathcal{G}'; \end{cases}$$

d'où, entre $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, la relation

$$\alpha\mathcal{G} + \beta\mathcal{H} + \gamma\mathcal{G}' = 0.$$

Cela posé, établissons entre u et v, u' et v' la correspondance

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \begin{cases} u = (l+\beta k)u' + \gamma k v', \\ v = -\alpha k u' + l v'; \end{cases}$$

à un point u', v' correspondra un et un seul point u, v; car si u', v augmentent d'une période, u et v augmentent aussi d'une période, d'après (36).

La correspondance (T_1) définit donc une *transformation* T_1, *faisant passer de u, v à u', v'*; les nombres caractéristiques de cette transformation s'obtiennent sans difficulté, et l'on trouve

$$\begin{array}{ll} a'_0 = (l+\beta k), & b'_0 = \gamma k, \\ a'_1 = -\alpha k, & b'_1 = l, \\ a'_2 = a'_3 = 0, & b'_2 = b'_3 = 0, \\ d'_0 = d'_1 = d'_2 = 0, & c'_0 = c'_1 = c'_3 = 0, \\ d'_3 = 1, & c'_2 = 1. \end{array}$$

Les indices l_1 et k_1 de T_1 sont donnés par (5) :

$$l_1 = (a'd')_{03} + (a'd')_{12} = l + \beta k,$$
$$\alpha k_1 = (a'c')_{03} + (a'c')_{12} = -\alpha k,$$

c'est-à-dire

$$k_1 = -k.$$

Pour l'indice k'_1 de la transformation adjointe, on a par (10) :

$$\alpha k'_1 = (a'd')_{13} + (b'c')_{13} = -\alpha k$$

ou

$$k'_1 = k_1,$$

Comme d'ailleurs les invariants des relations singulières entre g, h, g' et $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$ sont égaux à $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, il résulte de là, par (14 *bis*), que la transformation (T_1) est droite. Enfin, son degré, $l_1^2 + \beta k_1 l_1 + \gamma k_1^2$, est égal à la quantité δ ci-dessus (34).

153. Cela posé, soit T une transformation singulière quelconque, d'indices l et k et de degré $\delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2$, faisant passer des variables U', V' aux variables u, v et aux périodes g, h, g' liées par (R).

Faisons-la suivre de la transformation T_1 définie ci-dessus, *où les entiers l et k sont précisément les indices de* T; la transformation TT_1 fait

passer des variables U′, V′ aux variables u', v' et aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$: je dis que TT_1 est une transformation *ordinaire*.

En effet, son second indice k_2 est donné par (29)

$$2k_2 = k_1(2l + \beta k) + \varepsilon_1 k(2l_1 + \beta k_1),$$

car $B = B_1 = \beta$ et $\Delta = \Delta_1$. Or, d'après le numéro précédent,

$$k_1 = -k, \qquad l_1 = l + \beta k \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = +1,$$

puisque T_1 est droite ; donc

$$k_2 = 0,$$

ce qui établit la proposition.

La transformation (TT_1) est donc ordinaire ; faisons-la précéder d'une transformation ordinaire du premier ordre T_0, conduisant des variables U, V et des périodes G, H, G′, aux variables U′, V′ : la transformation (T_0TT_1) sera ordinaire et fera passer des variables U, V et des périodes G, H, G′, aux variables u', v' et aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$. Or, d'après une proposition fondamentale ([1]), on peut choisir T_0 de telle sorte que les nombres entiers caractéristiques, a_i, b_i, c_i, d_i de T_0TT_1, vérifient les conditions suivantes :

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{c} a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0, \\ a_0,\quad b_0,\quad b_1,\quad c_0,\quad c_1,\quad c_2,\quad d_0,\quad d_3 > 0, \\ b_0 < b_1; \qquad c_0,\quad c_1 < c_2, \\ d_0,\quad \mathrm{mod}\, d_1,\quad \mathrm{mod}\, d_2 < d_3. \end{array}\right.$$

On aura donc, pour définir T_0T_2, d'après (1) et (2) :

$$(T_0TT_1)\qquad U = a_0u' + b_0v', \qquad V = b_1v',$$

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_0\mathcal{G} + b_0\mathcal{H} = d_0 + d_3G + d_2H, & a_0\mathcal{H} + b_0\mathcal{G}' = c_0 + c_2H, \\ b_1\mathcal{H} = d_1 + d_3H + d_2G', & b_1\mathcal{G}' = c_1 + c_2G'. \end{array}\right.$$

L'*ordre* de (T_0TT_1) est δ, car son degré est le produit δ^2 des degrés de T et de T_1.

Enfin, cette transformation étant ordinaire et d'ordre δ, on a

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{ll} -c_0d_3 + c_2d_1 - c_1d_2 = 0, & \\ b_0d_3 + b_1d_2 & = 0, \\ a_0d_3 = b_1c_2 & = \delta. \end{array}\right.$$

([1]) *Voir*, par exemple, Krause, *Transformation der hyperelliptischen Funktionen* (Teubner, 1886), p. 78-79.

154. Remplaçons maintenant dans ces formules u' et v' par leurs valeurs en u et v déduites de (T_1); il vient, pour la relation entre U, V et u, v, c'est-à-dire pour la transformation T_0T (1) :

$$(T_0T)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{u}{\delta}[a_0 l + b_0\alpha k] + \frac{v}{\delta}[-a_0\gamma k + b_0(l+\beta k)], \\ V &= \frac{u}{\delta}b_1\alpha k + \frac{v}{\delta}b_1(l+\beta k). \end{aligned}\right.$$

155. Telle est la forme *nécessaire* de T_0T; mais il reste à exprimer que c'est là effectivement une *transformation* faisant passer de U, V à u, v, c'est-à-dire qu'à un point (u, v) correspond un seul point U, V. Or, si l'on augmente u et v de g et h, U et V augmentent, en vertu de (35), de $a_0\mathcal{G} + b_0\mathcal{H}$ et $b_1\mathcal{H}$, c'est-à-dire d'une période d'après (38); même résultat si l'on augmente u et v de h et g'. Il reste donc à écrire que U et V augmentent d'une période quand l'une des variables u et v augmente de 1, l'autre restant inaltérée. Ainsi, en désignant par x, y, z, z' des entiers, il faut que

$$\frac{a_0 l + b_0\alpha k}{\delta} = z + x\mathrm{G} + y\mathrm{H},$$

$$\frac{\beta_1\alpha k}{\delta} = z' + x\mathrm{H} + y\mathrm{G}'.$$

Les entiers x et y doivent être nuls, sinon, en désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G′ la quantité $H_1^2 - G_1G'_1$ serait nulle, cas à rejeter.

On a un résultat analogue en augmentant v de 1, de sorte que, finalement, les seules conditions auxquelles aient à satisfaire les a_i, b_i, c_i, d_i sont, avec (37) et (39), que les quantités

$$(\mathrm{Q})\qquad \frac{a_0 l + b_0\alpha k}{\delta},\qquad \frac{b_1\alpha k}{\delta},\qquad \frac{a_0\gamma k - b_0(l+\beta k)}{\delta},\qquad \frac{b_1(l+\beta k)}{\delta}$$

soient entières.

Pour simplifier la discussion, nous supposerons, comme nous en avons le droit, que l'entier α est égal à $+1$ (n° 151).

---

(1) D'après le n° 150, la transformation T_0T a les mêmes indices, l et k, que T, puisque T_0 est ordinaire et d'ordre 1.

Les relations (39)

$$a_0 d_3 = b_1 c_2 = \delta$$

montrent que d_3 et c_2 sont des diviseurs de δ; alors

(40) $$a_0 = \frac{\delta}{d_3}, \qquad b_1 = \frac{\delta}{c_2}.$$

La relation (39)

$$b_0 d_3 = - b_1 d_2$$

donne alors

(41) $$b_0 = - \frac{\delta}{c_2 d_3} d_2,$$

ce qui montre que δd_2 doit être divisible par $c_2 d_3$. Portant ces valeurs de a_0, b_1, b_0 dans les quantités (Q), on met celles-ci sous la forme

(Q′) $$\frac{l}{d_3} - \frac{k d_2}{c_2 d_1}, \qquad \frac{k}{c_2}, \qquad \frac{\gamma k}{d_3} + \frac{(l + \beta k) d_2}{c_2 d_3}, \qquad \frac{l + \beta k}{c_2}.$$

Pour qu'elles soient entières, il faut d'abord que c_2 divise k et $l + \beta k$, c'est-à-dire que

(42) $$k = c_2 \varpi_1, \qquad l + \beta k = c_2 \varpi_2;$$

alors, par là même, c_2 divisera δ, car $\delta = l(l + \beta k) + \gamma k^2$.

Remplaçons l et k par ces valeurs dans les quantités (Q′); il faut que

(43) $$\frac{l - \varpi_1 d_2}{d_3} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma k + \varpi_2 d_2}{d_3}$$

soient entiers. Si c'est réalisé, la quantité $\frac{1}{d_3}(l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1)$, c'est-à-dire, d'après (42), $\frac{1}{c_2 d_3}\delta$, sera également entière; δ est donc divisible par $c_2 d_3$, et dès lors b_0, donné par (41), est entier, quel que soit d_2.

Ainsi, en laissant provisoirement de côté la première des relations (39), c_2 est un diviseur de k et de $l + \beta k$ et, par suite, de δ; d_3 est un diviseur de δ, tel que $c_2 d_3$ en soit un autre, et il s'agit de reconnaître si les expressions (43) sont entières, c'est-à-dire s'il existe des entiers d_2, x et y vérifiant les relations

(44) $$l - \varpi_1 d_2 - d_3 x = 0, \qquad \gamma k + \varpi_2 d_2 - d_3 y = 0,$$

ϖ_1 et ϖ_2 étant les quotients par c_2 de k et $l + \beta k$.

Pour que les équations (44) aient des solutions entières en d_2, x

et y, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des déterminants de la matrice

$$\begin{matrix} -\varpi_1 & -d_3 & 0 \\ \varpi_2 & 0 & -d_3 \end{matrix}$$

divise les déterminants obtenus en associant une quelconque des colonnes de cette matrice à la colonne $\frac{l}{\gamma k}$.

Soit θ le plus grand commun diviseur (positif) de ϖ_1, ϖ_2, d_3 :

$$\varpi_1 = \theta q_1, \qquad \varpi_2 = \theta q_2, \qquad d_3 = \theta \rho;$$

q_1, q_2 et ρ étant premiers entre eux. Le plus grand commun diviseur des déterminants de la matrice, c'est-à-dire de $d_3\varpi_1$, $d_3\varpi_2$, d_3^2 sera $d_3\theta$, ou $\theta^2\rho$; il faut qu'il divise les nombres

$$l d_3, \quad \gamma k d_3, \quad l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1.$$

Donc θ, qui divise k, puisqu'il divise ϖ_1, devra diviser l; ensuite, comme on a, en vertu de (42),

$$l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1 = \frac{\delta}{c_2},$$

il faut que $d_3\theta$ divise $\frac{\delta}{c_2}$; c'est-à-dire que $\theta^2\rho$ divise $\frac{\delta}{c_2}$.

Si ces conditions sont remplies, les équations (44) auront, en d_2, x et y des solutions entières, parmi lesquelles figureront évidemment, pour d_2, et en nombre limité, des valeurs de module inférieur à d_3.

Enfin la première des relations (39)

$$(45) \qquad -c_0 d_3 + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0$$

donnera pour c_0, d_1 et c_1 des solutions entières, parmi lesquelles, évidemment, des solutions en nombre limité, telles que c_0 et c_1 soient positifs et $< c_2$, et que d_1 soit, en valeur absolue, $< d_3$.

156. En résumé, θ est un diviseur commun positif de l et de k; c_2, en vertu de (42), un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l+\beta k}{\theta}$; δ, c'est-à-dire $l(l+\beta k)+\gamma k^2$, est alors divisible par $c_2\theta^2$; ρ est un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que ρ et les nombres $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l+\beta k}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux. On prendra $d_3 = \theta\rho$, et l'on pourra trouver un nombre entier d_2,

de module inférieur à $\theta\rho$, vérifiant (44), c'est-à-dire, tel que

$$l - \frac{k}{c_2} d_2 \equiv 0, \qquad \gamma k + \frac{l+\beta k}{c_2} d_2 \equiv 0 \qquad (\bmod \theta\rho).$$

Les autres entiers a_i, b_i, c_i, d_i se déterminent ensuite comme on l'a expliqué plus haut.

157. Voici donc le résultat final :

Soit un système de fonctions abéliennes singulières à deux variables, u, v, dont les périodes vérifient la relation

$$g + \beta h + \gamma g' = 0;$$

pour trouver tous les systèmes des fonctions singulières à deux variables U, V, *tels qu'on puisse passer de l'un d'eux au système primitif, par une transformation singulière d'indices l et k et de degré δ ($\delta = l^2 + \beta kl + \gamma k^2$), on procédera comme il suit* [1] :

Soient

θ un diviseur commun positif de l et de k;

c_2 un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l}{\theta}$;

ρ un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que les nombres ρ, $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux.

On pourra toujours trouver un ou plusieurs entiers, d_2, en nombre limité, de module inférieur à $\theta\rho$, tels que l'on ait

$$\frac{l}{\theta} - \frac{k}{c_2\theta} d_2 \equiv 0, \qquad \gamma\frac{k}{\theta} + \frac{l+\beta k}{c_2\theta} d_2 \equiv 0 \qquad (\bmod \rho).$$

Les variables U, V sont alors liées à u, v par la transformation

$$(46) \qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{u}{\rho}\left[\dfrac{l}{\theta} - \dfrac{k}{c_2\theta} d_2\right] - \dfrac{v}{\rho}\left[\gamma\dfrac{k}{\theta} + \dfrac{l+\beta k}{c_2\theta} d_2\right], \\ \mathrm{V} = u\,\dfrac{k}{c_2} \qquad\qquad\qquad + v\,\dfrac{l+\beta k}{c_2}. \end{cases}$$

---

[1] Les deux indices l et k sont des entiers quelconques, tels seulement que δ, c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \gamma k^2$, soit positif.

Quant aux périodes G, H, G′ des fonctions abéliennes en U et V, elles sont liées à g, h, g' par les formules suivantes, déduites de (33) et de (35) :

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} G' &= -\frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{c_2^2}[kh + (l+\beta k)g'],\\ H &= -\frac{c_0}{c_2} - \frac{1}{c_2\rho\theta}\left[\left(-l + \frac{k}{c_2}d_2\right)h + \left(\gamma k + \frac{l+\beta k}{c_2}d_2\right)g'\right],\\ G &= \frac{c_0 d_2 - c_2 d_0}{c_2\rho\theta} + \frac{g}{c_2\rho^2\theta^2}[lc_2 - kd_2]\\ &\quad + \frac{h}{c_2\rho^2\theta^2}\left[-\gamma kc_2 - (2l+\beta k)d_2 + \frac{k}{c_2}d_2^2\right]\\ &\quad + \frac{g'}{c_2\rho^2\theta^2}\left[\gamma k d_2 + \frac{(l+\beta k)}{c_2}d_2^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, c_0, c_1, d_0 sont des entiers non négatifs quelconques, vérifiant les inégalités

$$c_0,\quad c_1 < c_2,\qquad d_0 < \rho\theta;$$

de plus la quantité

$$\frac{\rho\theta c_0 + d_2 c_1}{c_2}$$

doit être entière, et, en valeur absolue, inférieure à $\rho\theta$.

158. On peut compléter ce résultat, en déterminant les valeurs des *seize entiers caractéristiques* de la transformation ci-dessus : nous désignerons ces entiers par m_i, n_i, p_i, q_i, les lettres a_i, b_i, c_i, d_i ayant été employées tout à l'heure pour une autre transformation.

On trouve sans difficulté :

$$\begin{array}{llll} m_0 = \dfrac{l}{\rho\theta} - \dfrac{k}{\rho\theta c_2}d_2, & m_1 = \dfrac{k}{c_2}, & m_2 = 0, & m_3 = 0;\\ n_0 = \dfrac{-\gamma k}{\rho\theta} - \dfrac{l+\beta k}{\rho\theta c_2}d_2, & n_1 = \dfrac{l+\beta k}{c_2}, & n_2 = 0, & n_3 = 0;\\ p_0 = c_0, & p_1 = c_1, & p_2 = c_2, & p_3 = 0;\\ q_0 = d_0, & q_1 = d_1, & q_2 = d_2, & q_3 = \rho\theta. \end{array}$$

On ne doit pas perdre de vue la relation (45) :

$$-c_0\rho\theta + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0,$$

qui détermine d_1 ; de plus mod $d_1 < \rho\theta$.

159. *Vérification.* — Les entiers m_i, n_i, p_i, q_i, doivent satisfaire aux relations fondamentales (5) de la transformation singulière d'indices l et k, où $D = E = 0$, $A = 1$, $B = \beta$, $C = \gamma$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
(mp)_{03} + (mp)_{12} &= k,\\
(qn)_{03} + (qn)_{12} &= \gamma k,\\
(mn)_{03} + (mn)_{12} &= 0,\\
(pq)_{03} + (pq)_{12} &= 0,\\
(mq)_{03} + (mq)_{12} &= l,\\
(np)_{03} + (np)_{12} &= l + \beta k.
\end{aligned}$$

La vérification est immédiate.

160. *Remarque.* — Tous les systèmes de périodes G, H, G′ obtenus par les formules (47), pour des valeurs données de g, h, g', sont distincts à une transformation ordinaire près du premier ordre; c'est-à-dire que l'on ne peut passer de l'un d'eux à un autre par une transformation ordinaire d'ordre un. Cela résulte immédiatement de ce que la transformation ordinaire T_0TT_1 du n° 153 est *réduite*, de telle sorte que deux transformations réduites ne peuvent être équivalentes (à une transformation près du premier ordre) que si elles sont identiques [1].

161. Des formules (47) on déduirait sans difficulté la valeur de $H_1^2 - G_1G'_1$, en désignant toujours par G_1, ... les parties imaginaires de G, ...; il sera plus rapide d'opérer autrement.

La transformation T_0TT_1 est ordinaire et d'ordre δ; elle fait passer de G, H, G′ à $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$; on a donc, d'après M. Hermite,

$$\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1\mathcal{G}'_1 = \frac{\delta^2}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1G'_1),$$

$\mathfrak{M}^2$ étant une quantité positive.

D'ailleurs les formules (35) donnent

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}_1 &= lh_1 - \gamma kh_1,\\
\delta\mathcal{H}_1 &= lh_1 - \gamma kg'_1,\\
&= \alpha kg_1 + (l + \beta k)h_1,\\
\delta\mathcal{G}'_1 &= \alpha kh_1 + (l + \beta k)g'_1,
\end{aligned}$$

---

(1) *Voir* par exemple Krause, *loc. cit.*, p. 79.

d'où en prenant pour $\delta^2 \mathcal{H}_1^2$ le produit des deux valeurs ci-dessus de $\delta\mathcal{H}_1$,

$$\delta^2(\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1\mathcal{G}'_1) = \delta(h_1^2 - g_1 g'_1)$$

et finalement

$$(h_1^2 - g_1 g'_1) = \frac{\delta}{\mathfrak{N}^2}(\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1\mathrm{G}'_1),$$

$\mathfrak{N}^2$ étant positif.

C'est la formule que nous avions annoncée au n° 144.

Transformations singulières des fonctions intermédiaires.

162. Reprenons la transformation générale singulière (1), d'entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i, d'indices l et k et de degré δ,

$$(1) \qquad \mathrm{U} = \lambda u + \mu v, \qquad \mathrm{V} = \lambda' u + \mu' v,$$

et considérons une fonction thêta $\Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, des variables U et V, aux périodes (G, H, G′). Si m est l'ordre de $\Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, on a

$$(48) \quad \begin{cases} \Theta(\mathrm{U}+1, \mathrm{V}) = \Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}+1) = \Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}), \\ \Theta(\mathrm{U}+\mathrm{G}, \mathrm{V}+\mathrm{H}) = \Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})e^{-2\pi i m u + \text{const.}}, \\ \Theta(\mathrm{U}+\mathrm{H}, \mathrm{V}+\mathrm{G}') = \Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})e^{-2\pi i m v + \text{const.}}. \end{cases}$$

Pour qu'il existe une telle fonction entière, il est nécessaire et suffisant que $\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1\mathrm{G}'_1$ soit négatif ($\mathrm{G}_1, \ldots$ parties imaginaires de $\mathrm{G}, \ldots$) et que l'entier m ait le signe de G_1 (ou celui de G'_1, qui est le même).

Par l'intermédiaire de la transformation (1), $\Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ devient une fonction $\psi(u, v)$ de u, v et l'on a, en vertu de (1) et de (2),

$$\begin{aligned} \psi(u+1, v) &= \Theta(\mathrm{U}+\lambda, \mathrm{V}+\mu) \\ &= \Theta(\mathrm{U}+a_0+a_3\mathrm{G}+a_2\mathrm{H}, \mathrm{V}+a_1+a_3\mathrm{H}+a_2\mathrm{G}'), \end{aligned}$$

et par suite, d'après (48),

$$\psi(u+1, v) = \Theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})e^{-2\pi i m(a_3\mathrm{U}+a_2\mathrm{V})+\text{const.}}$$

et en revenant aux variables u et v,

$$\psi(u+1, v) = \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda a_3+\lambda' a_2)+v(\mu a_3+\mu' a_2)]+\text{const.}}.$$

De même

$$\begin{aligned} \psi(u, v+1) &= \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda b_3+\lambda' b_2)+v(\mu b_3+\mu' b_2)]+\text{const.}}, \\ \psi(u+g, v+h) &= \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda d_3+\lambda' d_2)+v(\mu d_3+\mu' d_2)]+\text{const.}}, \\ \psi(u+h, v+g') &= \psi(u, v)e^{-2\pi i m[u(\lambda c_3+\lambda' c_2)+v(\mu c_3+\mu' c_2)]+\text{const.}}. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(u, v) = \psi(u, v) e^{P(u,v)},$$

$P(u, v)$ désignant un polynome du second ordre en u, v : il est aisé de voir que l'on peut déterminer les coefficients de $P(u, v)$ de manière que $\varphi(u + 1, v) = \varphi(u, v)$, et que $\varphi(u, v + 1)$ reproduise $\varphi(u, v)$ à un facteur exponentiel près de la forme $e^{\rho u}$; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(u + 1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v + 1) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m u[b_3\lambda + b_2\lambda' - a_3\mu - a_2\mu']} \end{aligned}$$

ou, en vertu des expressions (2) de λ, μ, λ', μ',

$$\varphi(u, v + 1) = e^{-2\pi i m u[(ab)_{03} + (ab)_{12}]}.$$

On trouve de même $\varphi(u + g, v + h)$, $\varphi(u + h, v + g')$, ce qui donne finalement, en désignant par ν et ν' des constantes :

$$\begin{aligned} \varphi(u + 1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v + 1) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m u[(ab)_{03} + (ab)_{12}]}, \\ \varphi(u + g, v + h) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m \{u[(ad)_{03} + (ad)_{12}] + v[(bd)_{03} + (bd)_{12} + g((ab)_{03} + (ab)_{12})]\} + \nu}. \\ \varphi(u + h, v + g') &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m \{u[(ac)_{03} + (ac)_{12}] + v[(bc)_{03} + (bc)_{12} + h((ab)_{03} + (ab)_{12})]\} + \nu'}, \end{aligned}$$

163. Supposons d'abord que g, h, g', soient liés par la relation singulière la plus générale

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

les relations auxquelles satisfait $\varphi(u, v)$ sont, en tenant compte de (5)

$$(49)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u + 1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v + 1) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m D k u}, \\ \varphi(u + g, v + h) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m[l u - (C - Dg) k v] + \nu}, \\ \varphi(u + h, v + g') &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m[A k u + (l + Bk + Dkh) v] + \nu'}. \end{aligned} \right.$$

Si g, h, g', sont liés par la relation singulière ramenée à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

ces relations deviennent

$$(50)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u + 1, v) &= \varphi(u, v + 1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u + g, v + h) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m(l u - k \gamma v) + \text{const.}}, \\ \varphi(u + h, v + g') &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i m[k \alpha u + (l + k\beta) v] + \text{const.}}, \end{aligned} \right.$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît que $\varphi(u, v)$ est une de ces *fonctions intermédiaires singulières*, définies et étudiées dans la première partie de ce Mémoire : c'est une fonction d'indices ml et mk (I, n° 28).

Nous dirons aussi que la fonction $\varphi(u, v)$, qui vérifie les relations (49), est une *fonction intermédiaire singulière, d'indices ml et mk*.

Ainsi :

164. *Une transformation singulière d'indices l et k, faisant passer des variables* U, V *aux variables u, v, transforme une fonction thêta, d'ordre m, de* U, V, *en une fonction intermédiaire singulière de u, v, d'indices ml et mk.*

165. Si l'on suppose $m = 1$ et si l'on fait subir aux variables u, v une nouvelle transformation singulière, d'indices l_1 et k_1, la fonction thêta initiale se transforme en une fonction intermédiaire singulière, dont les indices l_2 et k_2 sont évidemment ceux de la transformation qui est le produit des deux premières, et sont donnés par les formules (29) et (30). On en conclut, sous une autre forme, que :

Une transformation singulière, d'indices l_1 et k_1 faisant passer des variables u, v aux variables u', v', transforme une fonction intermédiaire singulière, d'indices l et k, de u, v, en une fonction intermédiaire singulière de u', v', dont les indices l_2 et k_2 s'obtiennent par les relations

$$2k_2 = k_1(2l + Bk) + \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + B_1 k_1),$$

$$2(2l_2 + B_1 k_2) = (2l + Bk)(2l_1 + B_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}.$$

On suppose que la relation singulière entre les périodes de u, v est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

et celle entre les périodes de u', v',

$$A_1\mathcal{G} + B_1\mathcal{H} + C_1\mathcal{G}' + D_1(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + E_1 = 0;$$

Δ et Δ_1 désignent respectivement les invariants $B^2 - 4AC - 4DE$ et $B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1$; enfin ε_1 désigne $+1$ ou -1 selon que la transformation d'indices l_1, k_1, est droite ou gauche (n°s 142 et 149) [1].

---

[1] *Remarque.* — Reprenons les fonctions intermédiaires singulières, $\varphi(u, v)$,

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES DU PREMIER ORDRE.

---

166. Parmi les transformations singulières, les plus simples et celles qui conduisent aux conséquences analytiques les plus intéressantes, sont celles du premier degré, c'est-à-dire celles qui répondent à $\delta = 1$.

On les obtient toutes, à une transformation ordinaire près du premier ordre, par la proposition générale du n° 157.

En effet, soient l et k les indices d'une transformation T de degré un;

---

du n° 163, qui répondent à la relation singulière générale

$$(r) \qquad A g + B h + C g' + D(h^2 - g g') + E = 0;$$

si l et k sont les indices de $\varphi(u, v)$, on a (49),

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i D k u}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [l u - (C - D g) k v] + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [A k u + (l + B k + D k h) v] + \nu'}. \end{aligned} \right.$$

La théorie de ces fonctions se déduit sans difficulté de celle des fonctions analogues étudiées dans notre premier Mémoire.

Effectuons en effet une transformation ordinaire du premier ordre, ramenant la relation (r) au type (de même invariant),

$$(r') \qquad \alpha \mathcal{G} + \beta \mathcal{H} + \gamma \mathcal{G}' = 0;$$

$\varphi(u, v)$ devient une fonction intermédiaire, $\psi(u', v')$, répondant à la relation (r'), et dont les indices, l_2 et k_2, sont donnés par les formules du n° 165, où $k_1 = 0$, $l_1 = 1$, $\Delta_1 = \Delta$,

$$(s) \qquad k_2 = \varepsilon_1 k, \qquad 2 l_2 + \beta k_2 = 2 l + B k.$$

La fonction $\psi(u', v')$ n'existe (I, n° 28), que si $l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2$ est positif, et si $2 l_2 + \beta k_2$ est du signe de la partie imaginaire de $\mathcal{G}$. Or ce signe est celui de la partie imaginaire de g, d'après M. Hermite (*Théorie des transformations ordinaires*); d'ailleurs, en vertu des valeurs (s) de k_2, l_2 et de l'égalité des inva-

on a

$$(1) \qquad l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1;$$

l et k n'ont pas de diviseur commun, de sorte que $\theta = c_2 = 1$; ρ, diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, est aussi l'unité, et d_2, entier de module inférieur à $\theta\rho$, est nul. Enfin, c_0, c_1, d_0, entiers positifs inférieurs à c_2 ou à $\theta\rho$, sont nuls.

La transformation T, d'indices l et k, est alors (46) :

$$(2) \qquad \begin{cases} U = lu - \gamma kv, \\ V = ku + (l + \beta k)v. \end{cases}$$

Les périodes de u, v sont toujours supposées liées par la relation

---

riants $B^2 - 4AC - 4DE$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, on a

$$l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2 = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2.$$

Donc :

1° *Les fonctions intermédiaires générales répondant à la relation singulière* (r), *et d'indices* l, k, *n'existent que si le nombre* $l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$ *est positif, et si* $2l + Bk$ *a le signe de la partie imaginaire de la période* g.

Les fonctions $\psi(u', v')$ vérifient les relations (49), où l'on remplace g, h, g', par $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, l et k par l_2 et k_2, A, B, C, D par α, β, γ, o; nous savons (I, n° 28) que, pour ν et ν' donnés, elles s'expriment en fonction linéaire et homogène de $l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2$ d'entre elles; donc :

2° *Les fonctions intermédiaires générales, d'indices* l, k, *qui répondent à des valeurs données des constantes* ν *et* ν' *dans* (49), *sont des fonctions linéaires et homogènes de* $l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$ *d'entre elles*.

De même, deux fonctions $\psi(u', v')$, d'indices l_2, k_2 et l'_2, k'_2 ont un nombre de zéros communs (I, n° 34) égal à

$$2 l_2 l'_2 + \beta(k_2 l'_2 + k'_2 l_2) + 2\alpha\gamma k_2 k'_2 :$$

en remplaçant dans cette expression l_2, k_2, l'_2, k'_2 par leurs valeurs (s), on reconnaît que

3° *Deux fonctions intermédiaires générales d'indices* l, k *et* l' k', *répondant à la relation singulière* (r), *ont un nombre de zéros communs égal à :*

$$2ll' + B(lk' + kl') + 2(AC + DE)kk'.$$

Il s'agit, bien entendu, des zéros distincts à des périodes près.

singulière $g + \beta h + \gamma g' = 0$; les périodes de U, V sont

$$(3)\quad \begin{cases} G = lg - \gamma kh, \\ H = lh - \gamma kg' = kg + (l + \beta k)h, \\ G' = kh + (l + \beta k)g'; \end{cases}$$

elles sont liées aussi par

$$G + \beta H + \gamma G' = 0.$$

Quant aux *entiers caractéristiques de la transformation* a_i, b_i, c_i, d_i, ils ont pour valeurs (n° 158)

$$\begin{array}{llll} a_0 = l, & a_1 = k, & a_2 = 0, & a_3 = 0; \\ b_0 = -\gamma k, & b_1 = l + \beta k, & b_2 = 0, & b_3 = 0; \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0; \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 1. \end{array}$$

167. Ainsi, les transformations singulières du premier degré sont liées aux solutions entières de l'équation (1), qui peut s'écrire, en désignant par Δ l'invariant, $\beta^2 - 4\gamma$, de la relation singulière entre g, h, g',

$$(2l + \beta k)^2 - \Delta k^2 = 4.$$

C'est une *équation de Pell*, du type classique

$$x^2 - \Delta k^2 = \sigma^2,$$

4Δ étant ou divisible par $4\sigma^2$ ou congru à σ^2 suivant le module $4\sigma^2$: car ici $\sigma^2 = 4$, et l'invariant Δ est de l'une des formes $4N$ ou $4N + 1$. Le fait que $x = 2l + \beta k$ ne diminue pas la généralité, car si β est pair, Δ est de la forme $4N$ et x est pair; si β est impair, Δ est de la forme $4N + 1$ et x est pair ou impair en même temps que k.

Ainsi, à toute solution entière de l'équation de Pell

$$(4)\qquad x^2 - \Delta k^2 = 4$$

répond une transformation singulière et réciproquement, l étant donné par

$$2l + \beta k = x.$$

Cette équation (4) admet les solutions évidentes $k=0$, $x=\pm 2$, donnant $l=\pm 1$. Il leur correspond les transformations évidentes et sans intérêt

$$(5) \qquad U = u, \quad V = v, \quad G = g, \quad H = a, \quad G' = g',$$
$$(6) \qquad U = -u, \quad V = -v, \quad G = -g, \quad H = -h, \quad G' = -g',$$

qui, d'ailleurs, sont ordinaires, puisque $k=0$.

168. L'équation (4) n'admet de solutions entières, autres que les précédentes, que si Δ n'est pas carré parfait, c'est-à-dire dans les cas non elliptiques (I, n° 15). Donc :

Les fonctions abéliennes du cas elliptique n'admettent pas de transformations singulières du premier degré.

169. Au contraire, si Δ n'est pas carré, on sait que l'équation (4) admet une infinité de solutions entières, qui peuvent être considérées comme des puissances d'une même solution; elles sont comprises dans la formule (¹)

$$(E) \qquad \left(\frac{x_1 + k_1\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n = \frac{x + k\sqrt{\Delta}}{2},$$

n désignant un entier positif ou négatif, et (x_1, k_1) la plus petite solution positive de l'équation de Pell.

On en déduit que toutes les transformations singulières du premier degré sont des puissances de celle qui répond aux nombres x_1, k_1, c'est-à-dire à $n=1$. Soient, en effet, T_n la transformation qui répond au nombre n; x_n et k_n les valeurs correspondantes de x et k; il suffit d'établir que $T_{n+1} = T_n T_1$ et que T_{-1} est l'inverse de T_1.

En premier lieu, si l'on se reporte aux formules du n° 166 qui donnent les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i et aux formules du n° 30 qui donnent celles de a_i'', ... pour le produit de deux transformations, il

(¹) *Voir*, par exemple, DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3e édition de M. Dedekind, page 120.

s'agit de vérifier les relations

$$\frac{1}{2}(x_{n+1}-\beta k_{n+1}) = \frac{1}{4}(x_n-\beta k_n)(x_1-\beta k_1)-\gamma k_n k_1,$$

$$k_{n+1} = \frac{1}{2}k_n(x_1-\beta k_1)+\frac{1}{2}(x_n+\beta k_n)k_1,$$

$$-\gamma k_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_n-\beta k_n)\gamma k_1-\frac{1}{2}\gamma k_n(x_1+\beta k_1),$$

$$\frac{1}{2}(x_{n+1}+\beta k_{n+1}) = -\gamma k_n k_1+\frac{1}{4}(x_n+\beta k_n)(x_1+\beta k_1);$$

les huit autres étant satisfaites d'elles-mêmes.

Or l'équation (E) donne

$$\frac{x_{n+1}+k_{n+1}\sqrt{\Delta}}{x_n+k_n\sqrt{\Delta}} = \frac{x_1+k_1\sqrt{\Delta}}{2},$$

d'où

$$2x_{n+1} = x_1 x_n + k_1 k_n \Delta,$$
$$2k_{n+1} = x_1 k_n + k_1 x_n,$$

et, à l'aide de ces valeurs de x_{n+1}, k_{n+1}, la vérification est immédiate.

En second lieu, pour $n=-1$, on a

$$x = x_2, \qquad k = -k_1,$$

et l'on reconnaît sans difficulté que le produit de la transformation (x_1, k_1) par la transformation $(x_1, -k_1)$ se réduit identiquement à la transformation unité. Ainsi :

Toutes les transformations singulières du premier degré sont les puissances, positives ou négatives, d'une même transformation de ce degré, T_1.

170. Bien entendu on ne regarde pas comme distinctes deux transformations singulières qu'on peut ramener l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier *degré* : c'est ainsi que la transformation (2) et celle où l'on change simultanément les signes de l et de k ne sont pas distinctes, car la seconde s'obtient en faisant suivre la première de la transformation (6).

171. Ici se pose un problème très intéressant, qu'il sera plus simple d'énoncer en empruntant le langage géométrique :

Considérons deux surfaces hyperelliptiques, s et S, pour lesquelles les coordonnées d'un point s'expriment respectivement par des fonc-

tions abéliennes aux périodes g, h, g' et G, H, G' : si l'on peut passer de G, H, G' à g, h, g' par une transformation singulière du premier degré, à un point de s correspond un et un seul point de S, et *réciproquement*, d'après la signification du degré. C'est précisément la transformation (2) qui établit cette correspondance *univoque* entre les points des deux surfaces.

La question qui intervient naturellement est la suivante :

Les deux surfaces s et S, *qui se correspondent point par point*, *ont-elles les mêmes modules*, en appelant *modules* d'une surface hyperelliptique ceux de la courbe de genre deux qui donne naissance aux fonctions abéliennes correspondant à la surface?

172. Précisons cette notion de modules. Supposons que les coordonnées homogènes d'un point de S soient proportionnelles à quatre *fonctions thêta*, des variables U, V, formées avec les périodes G, H, G', et n'ayant *aucun facteur*, fonction de U, V, *commun*; admettons de plus qu'à un point de S réponde, aux périodes près, un et un seul système U, V. Une pareille représentation paramétrique n'est possible que d'une manière, à une transformation ordinaire près d'ordre un : car si les quatre coordonnées sont aussi proportionnelles à quatre fonctions thêta, sans facteur commun, de U', V', la transformation qui fait passer de U, V à U', V' est ordinaire, puisqu'elle change une fonction thêta en une fonction thêta; elle est du premier ordre, puisque à un système U, V (ou U', V') répond un seul point de la surface, et par suite un seul système U', V' (ou U, V). Nous dirons que les modules de S sont ceux des fonctions abéliennes de la représentation ainsi définie, ou ceux de la courbe de genre deux génératrice de ces fonctions.

173. Sur la surface S, si l'on désigne par $\vartheta(U, V)$ une fonction thêta du *premier ordre*, aux périodes G, H, G', les courbes représentées par l'équation

$$\vartheta(U+\alpha, V+\beta)=0,$$

où α et β sont deux constantes quelconques, sont de genre deux et de mêmes modules (¹); ces modules sont ceux de la surface S (²).

(¹) *Voir* notre Mémoire *Sur les surfaces hyperelliptiques*, 4ᵉ série, t. IX de ce Journal, p. 422.

(²) En effet sur une surface de Kummer, pour laquelle les coordonnées homo-

Effectuons maintenant la transformation singulière du premier degré, d'indices l et k, qui fait passer de S à s : la fonction thêta du premier ordre $\mathfrak{S}(U+\alpha, V+\beta)$ se transforme en une fonction intermédiaire singulière (n° 161), d'indices l et k, qui est évidemment de la forme

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu),$$

λ et μ dépendant linéairement de α et β.

Cela posé, si les deux surfaces s et S ont les mêmes modules, c'est qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation *ordinaire* du premier ordre; une telle transformation, comme on le sait depuis M. Hermite, et comme cela résulte aussi du théorème plus général du n° 164, change une fonction thêta d'ordre un de U et V, en une fonction thêta d'ordre un de u, v. Dès lors, soient U, V un point quelconque de S; u, v et u', v' les points de s qui lui correspondent respectivement par la transformation singulière et par la transformation ordinaire qu'on vient de définir : la transformation qui fait passer, sur s, du point u', v' au point u, v est univoque et birationnelle, puisque les deux précédentes le sont, et elle transforme une fonction thêta d'ordre un, $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$, en une fonction intermédiaire singulière d'indices l et k, $\varphi(u+\lambda, v+\mu)$, λ et μ dépendant linéairement de α' et β'.

Réciproquement, si la surface s admet une transformation birationnelle en elle-même, transformant $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$ en $\varphi(u+\lambda, v+\mu)$, les deux surfaces s et S ont les mêmes modules. En effet, la transformation singulière du premier degré, qui mène de S à s, fait correspondre point par point les courbes

$$\mathfrak{S}(U=\alpha, V+\beta)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(u+\lambda, v+\mu)=0,$$

de sorte que les courbes

$$\mathfrak{S}(U+\alpha, V+\beta)=0 \qquad \text{et} \qquad \theta(u'+\alpha', v'+\beta')=0$$

se correspondent également point par point et ont dès lors les mêmes

---

génes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales paires, du second ordre et à caractéristique nulle, des variables U et V, les courbes $\mathfrak{S}(U+\alpha, V+\beta)=0$ ont pour modules les rapports anharmoniques quatre à quatre des six points doubles situés sur une même conique (*Ibid.*, p. 114), c'est-à-dire les modules des fonctions abéliennes de la représentation.

modules : ces modules étant respectivement ceux des surfaces S et s, la proposition est établie.

Donc, en résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que S et s aient les mêmes modules est que s admette une transformation birationnelle en elle-même faisant correspondre à la courbe

$$\theta(u+\alpha', v+\beta')=0,$$

où θ est une fonction thêta d'ordre un, une courbe

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu)=0,$$

où φ est une fonction intermédiaire singulière, ayant pour indices ceux de la transformation singulière du premier degré qui fait passer de S à s.

174. Nous verrons plus loin, dans le Chapitre de la Multiplication singulière, que les transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique *simplement singulière* en elle-même sont comprises dans les formules (n° 193)

$$(8)\qquad \begin{cases} u'=\rho u-\gamma\sigma v, \\ v'=\sigma u+(\rho+\beta\sigma)v, \end{cases}$$

en supposant toujours que les périodes g, h, g' soient liées par la *seule relation* $g+\beta h+\gamma g'=0$, et en désignant par ρ et σ deux entiers, tels que

$$\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2=\pm 1.$$

Soit maintenant posé

$$\theta(u'+\alpha', v'+\beta')=\psi(u, v);$$

il s'agit d'exprimer que $\psi(u, v)$ est une fonction intermédiaire singulière d'indices l et k. On a évidemment

$$\psi(u+1, v)=\psi(u, v+1)=\psi(u, v),$$

car augmenter u ou v de l'unité revient à augmenter u' et v' de nombres entiers, ce qui ne change pas la fonction $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\psi(u+g, v+h)&=\theta[u'+\alpha'+\rho g-\gamma\sigma h, v'+\beta'+\sigma g+(\rho+\beta\sigma)h] \\ &=\theta(u'+\alpha'+\rho g-\gamma\sigma h, v'+\beta'+\rho h+\gamma\sigma g'),\end{aligned}$$

en tenant compte de $g + \beta h + \gamma g' = 0$, et, par suite, en vertu des proprietés fondamentales des fonctions thêta,

$$\begin{aligned}\psi(u+g,\, v+h) &= \theta(u'+\alpha',\, v'+\beta')\, e^{-2\pi i[\rho u' - \gamma\sigma v'] + \text{const.}} \\ &= \psi(u,\, v)\, e^{-2\pi i[(\rho^2-\gamma\sigma^2)u - \gamma\sigma(2\rho+\beta\sigma)v] + \text{const.}}\end{aligned}$$

On trouverait de même

$$\psi(u+h,\, v+g') = \psi(u,\, v)\, e^{-2\pi i[\sigma(2\rho+\beta\sigma)u + (\rho^2-\gamma\sigma^2+2\beta\rho\sigma+\beta^2\sigma^2)v] + \text{const.}},$$

et les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\psi(u, v)$ soit une fonction intermédiaire singulière d'indices l, k sont

$$(9)\qquad \begin{cases} l = \rho^2 - \gamma\rho^2, \\ k = \sigma(2\rho + \beta\sigma). \end{cases}$$

Cela revient à dire que la substitution linéaire à coefficients entiers

$$(10)\qquad \begin{cases} U = lu - \gamma k v. \\ V = ku + (l + \beta k) v \end{cases} \qquad (l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = 1)$$

doit être le carré d'une substitution, également à coefficients entiers,

$$(11)\qquad \begin{cases} U = \sigma u - \gamma \sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v, \end{cases}$$

où l'on a

$$(12)\qquad \rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

175. *Deux cas* sont maintenant à distinguer, selon que la forme $\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2$ ne peut ou peut représenter le nombre -1.

176. *Dans le premier cas*, on a nécessairement dans (12)

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = 1;$$

et il résulte du n° 169 que toutes les substitutions des formes (10) et (11) sont des puissances d'une substitution du même type, T_1, où l et k seraient remplacés par la plus petite solution l_1, k_1, de l'équation $l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = 1$, Si donc la substitution (10) est une puissance de T_1 *paire*, T_1^{2q}, les entiers ρ et σ seront les coefficients de la substitution T_1^q, et les équations (9) seront satisfaites pour ces valeurs de ρ et σ, c'est-à-dire que les deux surfaces S et s auront les mêmes modules.

Si, au contraire, la substitution (10) est une puissance *impaire*, T_1^{2q+1}, elle ne peut être le carré d'une substitution de même forme, puisque celle-ci serait également une puissance de T_1 : on ne peut donc trouver des entiers ρ et σ vérifiant les équations (9), c'est-à-dire que les deux surfaces S et s n'ont pas les mêmes modules.

Soit alors s_1 la surface transformée de S par la transformation T_1 ; il est clair que la transformée de S par la transformation T_1^{2q+1} a les mêmes modules que s_1, car on l'obtient en effectuant sur s_1 la transformation T_1^{2q}, laquelle est le carré de T_1^q. Ainsi, les surfaces obtenues en effectuant sur S les transformations T_1^{2q+1} n'ont pas les mêmes modules que S, mais ont entre elles les mêmes modules.

177. Plaçons-nous maintenant *dans le second cas*, où la forme $\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2$ peut représenter -1. Soit ρ_0, σ_0 une solution de l'équation $\rho_0^2+\beta\rho_0\sigma_0+\gamma\sigma_0^2=-1$, et désignons par Σ_0 la substitution (11), où ρ et σ sont remplacés par ρ_0 et σ_0.

Il est clair que la substitution Σ_0^2 est du type (10); on a en effet pour cette substitution

$$l=\rho_0^2-\gamma\sigma_0^2, \qquad k=\sigma_0(2\rho_0+\beta\sigma_0),$$

et l'on vérifie que

$$l^2+\beta kl+\gamma k^2=+1.$$

Par suite

$$\Sigma_0^2=T_1^n,$$

n désignant un entier et T_1 ayant la même signification que ci-dessus. Je dis que cet entier est nécessairement impair. Si, en effet, il était pair, $n=2q$, on aurait

$$\Sigma_0^2=(T_1^q)^2,$$

c'est-à-dire que les carrés des deux substitutions Σ_0 et T_1^q seraient les mêmes. Or T_1^q est de la forme (10), soient l' et k' les valeurs correspondantes de ses coefficients; en écrivant que Σ_0^2 est la même substitution que $(T_1^q)^2$, on a

$$(13)\qquad \begin{cases} \rho_0^2-\gamma\sigma_0^2=l'^2-\gamma k'^2, \\ \sigma_0(2\rho_0+\beta\sigma_0)=k'(2l'+\beta k'). \end{cases}$$

En éliminant ρ_0, on obtient l'équation bicarrée en σ_0 :

$$\sigma_0^4(\beta^2-4\gamma)-2\sigma_0^2(2l'^2-2\gamma k'^2+2\beta l'k'+\beta^2k'^2)+k'^2(2l'+\beta k')^2=0,$$

dont les racines sont

$$\sigma_0^2 = \frac{2l'^2 - 2\gamma k'^2 + 2\beta k'l' + \beta^2 k'^2 \pm 2(l'^2 + \beta k'l' + \gamma k'^2)}{\beta^2 - 4\gamma};$$

d'où

1°
$$\sigma_0^2 = \frac{4l'^2 + 4\beta k'l' + \beta^2 k'^2}{\beta^2 - 4\gamma},$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0 = \pm \frac{2l' + \beta k'}{\sqrt{\Delta}},$$

en désignant toujours par Δ l'invariant, $\beta^2 - 4\gamma$, de la relation entre les périodes. Or, le cas elliptique étant exclu, puisqu'il n'y a pas alors de transformations singulières du premier ordre, Δ n'est pas un carré parfait, de sorte que les valeurs ci-dessus de σ_0 ne sont pas entières, et sont dès lors inadmissibles.

2°
$$\sigma_0^2 = k'^2;$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0 = k'\varepsilon;$$

ε désignant ± 1. On en conclut par (13)

$$\rho_0 = l'\varepsilon,$$

de sorte que

$$\rho_0^2 + \beta\rho_0\sigma_0 + \gamma\sigma_0^2 = l'^2 + \beta k'l' + \gamma k'^2 = 1,$$

ce qui est inadmissible, puisque $\rho_0^2 + \beta\rho_0\sigma_0 + \gamma\sigma_0^2$ a été supposé égal à -1.

Donc enfin n ne peut être pair, c'est-à-dire que

$$\Sigma_0^2 = T_1^n = T_1^{2q+1},$$

d'où

$$T_1 = \Sigma_0^2 T_1^{-2q}.$$

Or Σ_0 et T_1^{-q} sont des substitutions de la forme (11), et l'on vérifie sans difficulté que si A et B sont deux substitutions de cette nature, on a $AB = BA$, c'est-à-dire

$$A^2 B^2 = (AB)^2;$$

donc

$$T_1 = (\Sigma_0 T_1^{-q})^2,$$

c'est-à-dire que T_1, et toutes ses puissances, sont des puissances paires d'une même substitution; donc, d'après ce qui précède, les surfaces S et *s* ont les mêmes modules.

178. Voici le résumé de cette théorie :

Soit une surface hyperelliptique pour laquelle les périodes des fonctions abéliennes correspondantes (n° 172) *sont liées par la relation*

$$g+\beta h+\gamma g'=0.$$

Si la forme $x^2+\beta xy+\gamma y^2$ *peut représenter le nombre* -1 *toutes les surfaces que l'on déduit de la première par une transformation singulière du premier degré ont les mêmes modules qu'elle.*

Si la forme $x^2+\beta xy+\gamma y^2$ *ne peut représenter* -1, *les transformations singulières du premier degré étant, comme toujours, des puissances d'une même transformation* T_1, *les surfaces déduites de la surface primitive par les transformations* T_1^{2q} *ont les mêmes modules qu'elle; les surfaces déduites par les transformations* T_1^{2q+1} *ont entre elles les mêmes modules, mais n'ont pas les modules de la surface primitive.*

Les *périodes* G, H, G′, qui répondent à une des surfaces transformées de la première et de modules différents, sont données par les formules (n° 166) :

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} G &= l_1 g-\gamma k_1 h,\\ H &= l_1 h-\gamma k_1 g',\\ G' &= k_1 h+(l_1+\beta k_1)g'; \end{aligned}\right.$$

l_1, k_1 désignent toujours la plus petite solution en nombres entiers (autre que 1,0) de l'équation

$$l_1^2+\beta k_1 l_1+\gamma k_1^2=1 \quad (^1).$$

179. *Remarque I.* — La propriété, pour la forme $x^2+\beta xy+\gamma y^2$, de représenter -1, ne dépend (comme cela doit être) que du discriminant $\beta^2-4\gamma$, c'est-à-dire de l'invariant Δ. En effet, la relation $x^2+\beta xy+\gamma y^2=-1$ peut s'écrire

$$(2x+\beta y)^2-\Delta y^2=-4,$$

(1) Soit une surface de Kummer, s, pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales, paires, du second ordre et à caractéristique nulle, des variables u et v, formées avec les périodes g, h, g'; soit de même S une surface analogue répondant aux variables U

ce qui revient *exactement* à dire que la forme $X^2 - \Delta Y^2$ peut représenter -4 (nº 167).

180. *Remarque II.* — Dans le cas où la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ peut représenter -1, toutes les substitutions (11) :

$$U = \rho u - \gamma \sigma v,$$
$$V = \sigma u + (\rho + \beta \sigma) v,$$

où

$$\rho^2 + \beta \rho \sigma + \gamma \sigma^2 = \pm 1$$

sont des puissances d'une seule d'entre elles (ainsi que cela a été démontré pour le cas où la forme ne peut représenter -1). Pour simplifier, disons que la substitution est droite ou gauche selon qu'elle correspond à $+1$ ou à -1. On a vu que les substitutions droites sont des puissances de T_1, et l'on a trouvé (nº 177)

$$T_1 = \Sigma_1^2,$$

Σ_1 étant gauche (car c'est le produit d'une substitution gauche, Σ_0, par une droite T_1^{-q}). Soit alors Σ une substitution gauche quelconque; $\Sigma\Sigma_1$ est droite, donc

$$\Sigma\Sigma_1 = T_1^r = \Sigma_1^{2r},$$

d'où

$$\Sigma = \Sigma_1^{2r-1}.$$

Les substitutions droites sont donc des puissances paires, les substitutions gauches des puissances impaires d'une même substitution Σ_1.

De plus : *toute substitution droite est le carré d'une autre substitution, droite ou gauche.*

181. Nous sommes arrivés au nº 178 à la notion de surfaces (hyperelliptiques) se correspondant point par point sans avoir les mêmes modules ; ce résultat, assez inattendu si l'on s'en tient à l'analogie avec le cas des courbes, peut recevoir une autre forme géométrique.

---

et V et aux périodes G, H, G'; il est clair que la transformation $U = l_1 u - \gamma k_1 v$; $V = k_1 u + (l_1 + \beta k_1) v$ est birationnelle entre les points des deux surfaces : on voit ainsi que deux surfaces de Kummer peuvent se correspondre point par point sans que les rapports anharmoniques, quatre à quatre, des six points doubles situés sur une même conique soient les mêmes pour les deux surfaces.

Une surface hyperelliptique générale S est une surface qui correspond *point par couple* à une courbe C, de genre deux [1], c'est-à-dire qu'à un couple de points pris sur C répond un et un seul point de S, et réciproquement : dès lors le fait que deux surfaces hyperelliptiques peuvent se correspondre point par point sans avoir les mêmes modules montre que deux courbes de genre deux peuvent se correspondre *couple par couple* sans avoir les mêmes modules. Ces courbes de genre deux donnent naissance, d'après tout ce qui précède, à des fonctions abéliennes singulières; il serait intéressant de poursuivre des recherches analogues sur deux courbes de genre quelconque.

182. Le théorème général du n° 178 résout, *au point de vue des périodes*, le problème de la détermination des couples de surfaces hyperelliptiques se correspondant point par point, sans avoir les mêmes modules : les formules (14) donnent, en effet, les valeurs des périodes G, H, G′, répondant à l'une des surfaces, en fonction des périodes g, h, g', qui répondent à l'autre.

Il resterait à compléter ce résultat *au point de vue des modules*, c'est-à-dire à déterminer tous les systèmes de modules *différents* tels que les surfaces hyperelliptiques correspondantes soient représentables point par point l'une sur l'autre [2].

TROISIÈME PARTIE.

MULTIPLICATION COMPLEXE.

---

183. Le problème de la multiplication complexe, extension directe du problème analogue pour les fonctions elliptiques, peut se poser ainsi :

---

(1) *Voir*, par exemple, notre Mémoire *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (ce Journal, 5e série, t. II, p. 163).

(2) *Voir* à ce sujet une Note que nous avons publiée aux *Comptes rendus* (2e semestre 1899).

Soit un système de fonctions abéliennes à deux variables U, V aux périodes G, H, G′, on opère sur ces périodes une transformation quelconque, ordinaire ou singulière : il s'agit de reconnaître dans quel cas les périodes transformées (g, h, g') seront identiques aux périodes primitives (G, H, G′).

Au point de vue géométrique, étant donnée une surface hyperelliptique, liée aux paramètres u et v, si l'on pose

$$(1)\qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

peut-on déterminer les constantes λ et μ de manière qu'à un point (u, v) de la surface réponde *un et un seul point* (U, V) de la même surface?

Ce problème comprend celui de la recherche des *transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique en elle-même.*

184. *Remarque.* — La multiplication complexe n'a pas été jusqu'ici, à notre connaissance du moins, traitée avec la généralité qu'elle comporte par les divers auteurs qui s'en sont occupés. C'est ainsi que MM. Frobenius, Weber, Wiltheiss [1] se sont bornés au cas où la transformation qui fait passer des variables U, V aux variables u, v, est une transformation ordinaire d'Hermite, sans prendre garde aux transformations singulières qui conduisent précisément aux multiplications les plus intéressantes,

Il y aura, d'après cela, deux espèces de multiplications complexes : 1° les *multiplications ordinaires*, qui dérivent d'une transformation d'Hermite; 2° les *multiplications singulières*, qui dérivent d'une de nos transformations singulières.

185. Les relations entre les périodes g, h, g' de multiplication complexe s'obtiennent immédiatement en faisant, dans les relations (2) de la première Partie, $G = g$, $H = h$, $G' = g'$; ce qui donne

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h, & \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h, \\ \lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g', & \mu' = b_1 + b_2 h + b_2 g', \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 g + d_2 h, & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 g + c_2 h. \\ \lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3 h + d_2 g', & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 h + c_2 g'. \end{array}\right.$$

---

[1] FROBENIUS, *Journal de Crelle*, t. XCV, p. 264. — WEBER, *Annali di Matematica*, 2e série, t. IX. — WILTHEISS, *Math. Annalen*, t. XXI, p. 385-398.

L'élimination de λ, μ, λ', μ' conduit aux quatre équations *fondamentales*

$$\text{(A)}\quad g^2a_3+gh(a_2+b_3)+h^2b_2+g(a_0-d_3)+h(b_0-d_2)-d_0=0,$$
$$\text{(B)}\quad gha_3+gg'a_2+h^2b_3+hg'b_2+ga_1+h(b_1-d_3)-g'd_2-d_1=0,$$
$$\text{(C)}\quad gha_3+gg'b_3+h^2a_2+hg'b_2-gc_3+h(a_0-c_2)+g'b_0-c_0=0,$$
$$\text{(D)}\quad h^2a_3+hg'(a_2+b_3)+g'^2b_2+h(a_1-c_3)+g'(b_1-c_2)-c_1=0.$$

Les a_i, b_i, c_i, d_i sont toujours des entiers, caractéristiques de la transformation employée (1).

186. Les relations (A), (B), (C), (D) ne sont des identités que si $a_1=a_2=a_3=b_2=b_3=b_0=c_0=c_1=c_3=d_0=d_1=d_2=0$, et $a_0=b_1=d_3=c_2$; la transformation (1) est alors

$$U=a_0u,\qquad V=a_0v,$$

et se réduit à la multiplication ordinaire par un nombre entier.

187. Désignons par A, B, C, D les premiers membres des quatre relations ci-dessus; on a identiquement

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned}&A(a_3h+a_2g'+a_1)-B(a_3g+a_2h+a_0)\\&+C(b_3h+b_2g'+b_1)-D(b_3g+b_2h+b_0)\equiv F_1,\end{aligned}$$

$$\text{(4)}\quad \begin{aligned}&A(a_3h+b_3g'-c_3)+B(a_2h+b_2g'-c_2)\\&-C(a_3g+b_3h-d_3)-D(a_2g+b_2h-d_2)\equiv F_2,\end{aligned}$$

étant posé

$$\text{(5)}\quad \begin{aligned}F_1=&(h^2-gg')[(ad)_{23}+(bc)_{23}]\\&+g[(ad)_{31}+(bc)_{31}]+g'[(ad)_{02}+(bc)_{02}]\\&+h[(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}]+[(ad)_{01}+(bc)_{01}],\end{aligned}$$

$$\text{(6)}\quad \begin{aligned}F_2=&(h^2-gg')[(ba)_{03}+(ba)_{12}]\\&+g[(ca)_{03}+(ca)_{12}]+g'[(bd)_{03}+(bd)_{12}]\\&+h[(cb)_{03}+(cb)_{12}-(da)_{03}-(da)_{12}]+[(dc)_{03}+(dc)_{12}].\end{aligned}$$

On observera que les relations $F_1=0$ et $F_2=0$ sont les relations singulières (3 *bis*) et (3) de la première Partie entre les périodes initiales et finales de la transformation; elles ne sont identiquement nulles que si la transformation considérée est ordinaire, et, d'ailleurs, si l'une d'elles est une identité, l'autre l'est également (n° 157).

Nous dirons que la multiplication complexe considérée *conduit* de la relation $F_1 = 0$ à la relation $F_2 = 0$.

188. Le problème est maintenant de trouver *a priori* les périodes g, h, g' telles que les relations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ puissent avoir lieu, par un choix convenable des entiers a_i, b_i, c_i, d_i.

189. *Remarque.* — Les termes du second degré en g, h, g', dans les premiers membres des équations (A), (B), (C), (D), peuvent se mettre respectivement sous la forme remarquable suivante :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} b_2(h^2 - gg') + g[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \\ -a_2(h^2 - gg') + h[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \\ -b_3(h^2 - gg') + h[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \\ a_3(h^2 - gg') + g'[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \end{array}\right.$$

On en conclut que, si l'on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes, les quatre *quadriques* représentées par les équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont en commun, dans le plan de l'infini, les deux points

$$(8)\qquad h^2 - gg' = 0, \qquad a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g' = 0.$$

On reconnaît sans difficulté qu'elles n'ont pas, dans ce plan, d'autre point commun, à moins qu'on n'ait simultanément

$$a_3 = a_2 + b_3 = b_2 = 0.$$

Dans ce cas, les quatre équations (A), (B), (C), (D) sont singulières : les périodes g, h, g' ne sont alors liées que par des relations singulières.

190. Théorème. — *Il y a, entre les périodes de multiplication complexe, au moins une relation singulière (à coefficients entiers).*

Car les relations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $B - C = 0$ sont singulières; le seul cas d'exception possible serait donc celui où ces trois relations seraient des identités.

Or l'identité $B - C \equiv 0$ donne, en particulier, $a_2 = b_3$, $a_1 = -c_3$; et, en faisant $B \equiv C$ dans (4), il vient

$$(9)\quad \begin{array}{l} A(a_3 h + a_2 g' - c_3) \\ \quad + B(-a_3 g + b_2 g' + d_3 - c_2) - D(a_2 g + b_2 h - d_2) = 0. \end{array}$$

Considérons toujours g, h, g' comme les coordonnées d'un point dans l'espace; les trois plans

$$(10)\qquad \begin{cases} a_3 h + a_2 g' - c_3 = 0, \\ -a_3 g + b_2 g' + d_3 - c_2 = 0, \\ a_2 g + b_2 h - d_2 = 0, \end{cases}$$

se coupent suivant une même droite, car les déterminants du troisième ordre compris dans la matrice

$$\begin{matrix} 0 & a_3 & a_2 & -c_3 \\ -a_3 & 0 & b_2 & d_3 - c_2 \\ a_2 & b_2 & 0 & -d_2 \end{matrix}$$

sont nuls, comme on le reconnaît aisément, en tenant compte de $a_2 = b_3$, et $(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0$; cette dernière relation tirée de $F_1 \equiv 0$. Dès lors, l'identité (9) montre que le plan

$$a_2 g + b_2 h - d_2 = 0$$

coupe la quadrique $A = 0$ suivant une conique située sur la quadrique $B = 0$: les quadriques $A = 0$ et $B = 0$ se coupent alors suivant une deuxième conique située sur $D = 0$.

Le plan $a_2 g + b_2 h - d_2 = 0$, de la première conique commune à $A = 0$ et $B = 0$, ayant ses coefficients rationnels en fonction des coefficients des quadriques A et B, il en sera de même du plan de la seconde; c'est-à-dire qu'il existera entre g, h et g' une relation

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

où les coefficients sont rationnels par rapport aux a_i, b_i, c_i, d_i, c'est-à-dire sont des fractions : c'est là une relation singulière entre les périodes, et le théorème est établi.

191. *Remarque.* — On a supposé dans ce raisonnement que les trois plans (10) existent, c'est-à-dire que l'équation d'aucun d'eux n'est une identité. S'il en est autrement, du second par exemple, on aura $a_3 = 0$, $b_2 = 0$; et comme $a_2 = b_3$, si a_2 était nul, on serait dans le cas signalé au n° 189 et où les périodes ne sont liées que par des relations singulières. Supposons alors $a_2 \gtrless 0$; l'identité (9) devient :

$$A(a_2 g' - c_3) - D(a_2 g - d_2) \equiv 0,$$

d'où l'on conclut, en se reportant à l'expression de A, que A est de la forme

$$A = (mh + n)(a_2 g - d_2) = 0,$$

m et n étant entiers, et $m \gtrless 0$.

On ne saurait avoir $a_2 g - d_2 = 0$, sinon g serait réel et $h_1^2 - g_1 g'_1$ ne serait pas négatif; on a donc

$$mh + n = 0,$$

relation singulière. Un raisonnement analogue s'applique au cas où l'équation d'un des autres plans (10) serait une identité.

Mêmes conclusions, si deux ou trois de ces équations sont des identités.

192. Avant de discuter plus complètement les relations fondamentales (A), (B), (C), (D) entre les périodes de multiplication complexe, nous étudierons les multiplications dans quelques cas particuliers.

Multiplication dans le cas d'une relation singulière.

193. Cette relation pouvant se mettre sous la forme

$$\text{(R)} \qquad g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

et étant supposée la seule relation entre g, h, g', il faut que les équations (A), (B), (C), (D) en soient des conséquences, c'est-à-dire, comme on le reconnaît de suite, qu'elles soient du premier degré en g, h, g' et de la forme $g + \beta h + \gamma g'$, à un facteur entier près.

Donc

$$a_3 = a_2 = b_3 = b_2 = 0;$$

puis :

$$\begin{aligned}
&\beta(a_0 - d_3) = b_0 - d_2,\\
&\gamma(a_0 - d_3) = 0,\\
&\beta a_1 = b_1 - d_3,\\
&\gamma a_1 = -d_2, \qquad d_0 = d_1 = c_0 = c_1 = 0,\\
&-\beta c_3 = a_0 - c_2,\\
&-\gamma c_3 = b_0,\\
&a_1 - c_3 = b_1 - c_2 = 0.
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\gamma(a_1 - c_3) = b_0 - d_2 = \beta(a_0 - d_3)$$

et en comparant avec $\gamma(a_0 - d_3) = 0$, on voit que nécessairement $a_0 - d_3 = 0$, car β et γ ne peuvent être nuls en même temps.

On a ainsi pour les a_i, b_i, c_i, d_i les valeurs

$$(11)\quad \begin{cases} a_0 = a_0, & b_0 = -\gamma c_3, & c_0 = 0, & d_0 = 0, \\ a_1 = c_3, & b_1 = a_0 + \beta c_3, & c_1 = 0, & d_1 = 0, \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = a_0 + \beta c_3, & d_2 = -\gamma c_3, \\ a_3 = 0, & b_3 = 0, & c_3 = c_3, & d_3 = a_0, \end{cases}$$

et la transformation de multiplication complexe est, en remplaçant par ρ et σ les entiers, *restés arbitraires*, a_0 et c_3 :

$$(12)\quad \begin{cases} U = \rho u - \gamma\sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v. \end{cases}$$

Il est aisé de trouver les *indices* L et K de cette transformation.

On a, par les formules (5) de la première Partie,

$$AK = (ac)_{03} + (ac)_{12} = \sigma(2\rho + \beta\sigma)$$

d'où, puisque A, coefficient de g dans la relation singulière (R), est égal à 1,

$$K = \sigma(2\rho + \beta\sigma).$$

Ensuite

$$L = (ad)_{03} + (ad)_{12} = \rho^2 - \gamma\sigma^2.$$

A un point u, v correspond, par (12), un seul point U, V, et à un point U, V correspondent δ' points u, v, étant posé, comme au n° 141,

$$\delta' = L^2 + \beta KL + \gamma K^2.$$

En faisant le calcul, on trouve pour le *degré* de la multiplication considérée

$$\delta' = (\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2)^2.$$

194. *Remarque.* — La transformation (12) n'est ordinaire que si $K = 0$, c'est-à-dire si $\sigma = 0$, ce qui correspond à la multiplication ordinaire par un nombre entier; ou si $2\rho + \beta\sigma = 0$, ce qui donne

$$U = -\frac{1}{2}\sigma[\beta u + 2\gamma v], \qquad V = \frac{1}{2}\sigma[2u + \beta v];$$

σ désignant un entier tel que $\beta\sigma$ soit pair. C'est là la seule *multiplication complexe ordinaire* dans le cas d'une relation singulière.

Multiplication dans le cas de deux relations singulières.

195. Si les périodes g, h, g' sont liées seulement par deux relations singulières, on peut, en combinant celles-ci linéairement, en déduire une relation, également singulière, où le terme en h ait disparu :

$$Ag + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

L'invariant de cette relation $\Delta (= -4AC - 4DE)$ est divisible par 4; on peut donc (I, n° 13), par une transformation ordinaire du premier ordre, la ramener au type de même invariant

$$(\Delta) \qquad h^2 - gg' = \frac{\Delta}{4}.$$

La transformation employée change une quelconque des relations singulières primitives en une relation singulière, où l'on peut, en tenant compte de (Δ), faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$. Finalement, on a le droit de supposer que les périodes g, h, g' sont liées par deux relations de la forme

$$(13) \qquad \begin{cases} h^2 - gg' = d, \\ \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega, \end{cases}$$

d, α, β, ω étant entiers; de plus α, β, γ et ω peuvent être supposés premiers entre eux.

196. *Remarque.* — Cherchons à quelles conditions doivent satisfaire d, α, β, ω, pour que l'inégalité

$$h_1^2 - g_1 g_1' < 0$$

puisse être vérifiée; g_1, h_1, g_1' désignant toujours les parties imaginaires de g, h, g' :

$$(14) \qquad g = g_0 + ig_1, \qquad h = h_0 + ih_1, \qquad g' = g_0' + ig_1'.$$

En premier lieu, les invariants $4d$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ des deux relations (13) doivent être positifs (I, n° 14). Remplaçons g, h, g' par leurs valeurs (14) dans les relations (13) et séparons le réel de l'imaginaire,

il vient :

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0, \\ \alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1 = 0, \\ 2 h_0 h_1 - g_0 g'_1 - g'_0 g_1 = 0, \\ h_1^2 - g_1 g'_1 - (h_0^2 - g_0 g'_0) + d = 0. \end{cases}$$

Tirons des deux relations intermédiaires les valeurs proportionnelles de g_1, h_1, g'_1 et écrivons que $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif :

$$\omega^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)(h_0^2 - g_0 g'_0) < 0.$$

La quatrième relation donne

$$h_0^2 - g_0 g'_0 - d < 0;$$

d'où, puisque $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0,

$$d > h_0^2 - g_0 g'_0 > \frac{\omega^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma},$$

on a en outre

$$\alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0.$$

Pour qu'on puisse trouver g_0, h_0, g'_0 vérifiant cette égalité et les deux inégalités qui précèdent, il faut que $d > \frac{\omega^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$; c'est de plus suffisant, car si l'on regarde g_0, h_0, g'_0 comme les coordonnées d'un point dans l'espace, le plan $\alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0$ coupe toujours en des points réels la quadrique $h_0^2 - g_0 g'_0 = \lambda^2$, *qui est un hyperboloïde à une nappe*.

Finalement, pour que $h_1^2 - g_1 g'_1$ *puisse* être négatif, il est *nécessaire* qu'on ait

$$(16)\qquad d > 0, \qquad \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0, \qquad \omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) < 0.$$

Sous une autre forme, cela revient à dire que la relation singulière

$$\rho(h^2 - gg' - d) + \sigma(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0,$$

où ρ et σ sont des entiers quelconques, a son invariant positif, quels que soient ρ et σ; cet invariant est, en effet,

$$\sigma^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\rho\sigma\omega + 4\rho^2 d;$$

et cette condition était évidente *a priori*.

197. D'une manière générale, soient

$$F_1 = A\,g + B\,h + Cg' + D\,(h^2 - gg') + E = 0.$$
$$F_2 = A'g + B'h + C'g' + D'(h^2 - gg') + E' = 0.$$

deux relations singulières entre g, h, g'; pour qu'il existe des périodes vérifiant ces relations et l'inégalité $h_1^2 - g_1 g_1' < 0$, il est nécessaire que l'invariant de la relation

$$\rho F_1 + \sigma F_2 = 0$$

soit positif. Géométriquement, si l'on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes, cela revient à dire que le discriminant de la quadrique $\rho F_1 + \sigma F_2 = 0$ n'est jamais nul pour des valeurs réelles de ρ et σ; cette quadrique ne peut donc appartenir à la variété cône, à moins qu'elle ne se réduise à un plan, c'est-à-dire à moins que les termes en $h^2 - gg'$ ne disparaissent.

Si le terme en $h^2 - gg'$ manque dans F_1 et existe dans F_2, on voit de même que le plan $F_1 = 0$ ne peut toucher la quadrique $F_2 = 0$.

198. Cela posé, reprenons les relations (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe; elles doivent être des conséquences des deux relations

$$(13) \qquad h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega.$$

En regardant toujours g, h, g' comme des coordonnées courantes, cela revient à écrire que les quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, passent par la conique représentée par les équations (13); par suite, en désignant par θ', α', β', γ', ω', des constantes, on a d'abord, pour la quadrique $A = 0$:

$$\begin{aligned} b_2(h^2 - gg') &+ g[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'] \\ &+ g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 \equiv \theta'(h^2 - gg' - d) \\ &+ (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)(\alpha' g + \beta' h + \gamma' g' - \omega'), \end{aligned}$$

ce qui donne de suite, en supposant $\gamma \gtrless 0$,

$$\gamma' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \theta' = b_2, \qquad \omega' = 0,$$

et il reste

$$(17) \qquad \begin{aligned} &g[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'] + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 \\ &\equiv - b_2 d + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)\alpha' g; \end{aligned}$$

d'où, en identifiant,

$$a_3 = \alpha\alpha', \qquad a_2 + b_3 = \beta\alpha', \qquad b_2 = \gamma\alpha',$$
$$a_0 - d_3 = -\omega\alpha', \qquad b_0 - d_2 = 0, \qquad d_0 = b_2 d.$$

Les quatre premières de ces relations montrent que α' est un entier, car si c'était une fraction $\frac{p}{q}$, réduite à sa plus simple expression, q devrait diviser α, β, γ, et ω, qui sont supposés sans autre diviseur commun que l'unité. On peut donc écrire, en remplaçant α' par σ,

$$(18)\qquad \begin{cases} a_3 = \alpha\sigma, \\ a_2 + b_3 = \beta\sigma, \\ b_2 = \gamma\sigma, \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} a_0 - d_3 + \sigma\omega = 0, \\ b_0 - d_2 = 0, \\ d_0 - db_2 = 0. \end{cases}$$

Maintenant, en tenant compte de (13) et de (18), l'équation (B) s'écrit

$$-a_2 d + h\sigma\omega + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0,$$

ce qui doit évidemment être une conséquence de

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0.$$

Donc, en désignant par ρ un entier

$$(20)\qquad \begin{cases} a_1 = \alpha\rho, \\ b_1 - d_3 + \sigma\omega = \beta\rho, \\ -d_2 = \gamma\rho, \\ d_1 + a_2 d = \omega\rho. \end{cases}$$

En opérant de même pour les équations (C) et (D), et en désignant par ν un entier, il vient :

$$(21)\qquad \begin{cases} -c_3 = \alpha\nu, \\ a_0 - c_2 + \sigma\omega = \beta\nu, \\ b_0 = \gamma\nu, \\ c_0 + b_3 d = \omega\nu, \end{cases}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} a_1 - c_3 = 0, \\ b_1 - c_2 + \sigma\omega = 0, \\ c_1 - a_3 d = 0. \end{cases}$$

La relation $a_1 = c_3$ donne $\nu = -\rho$; remplaçant ν par cette valeur et résolvant les équations (18), (19), (20), (21) et (22) par rapport aux a_i, b_i, c_i, d_i, on trouve que ces seize entiers s'expriment comme il suit en fonction des entiers ρ, σ et de a_0 et b_3, que nous désignerons par θ et τ :

$$(23)\quad \begin{cases} a_0 = \theta, & b_0 = -\gamma\rho, & c_0 = -\omega\rho - d\tau, & d_0 = \gamma\, d\sigma, \\ a_1 = \alpha\rho, & b_1 = \theta + \beta\rho, & c_1 = \alpha\, d\sigma, & d_1 = \omega\rho - \beta\, d\sigma + d\tau \\ a_2 = \beta\sigma - \tau, & b_2 = \gamma\sigma, & c_2 = \theta + \omega\sigma + \beta\rho, & d_2 = -\gamma\rho. \\ a_3 = \alpha\sigma, & b_3 = \tau, & c_3 = \alpha\rho, & d_3 = \theta + \omega\sigma. \end{cases}$$

199. *Remarque.* — On a supposé, pour obtenir ces relations, $\gamma \gtrless 0$; dans le cas contraire, on verrait sans difficulté qu'elles subsistent encore, à condition que les inégalités nécessaires du n° 196 soient vérifiées.

200. Les formules (23) où ρ, σ, θ et τ désignant des *entiers quelconques* résolvent le problème en donnant les nombres caractéristiques des multiplications complexes cherchées; les transformations correspondantes sont données par les formules (1) et (2) :

$$(24)\quad \begin{cases} U = (a_0 + a_3 g + a_2 h)u + (b_0 + b_3 g + b_2 h)v, \\ V = (a_1 + a_3 h + a_2 g')u + (b_1 + b_3 h + b_2 g')v. \end{cases}$$

201. La multiplication n'est qu'une transformation qui conduit des périodes g, h, g' aux mêmes périodes g, h, g'; d'après la théorie générale de la transformation et le n° 187, g, h et g', considérées comme périodes *finales*, vérifient la relation (6), $F_2 = 0$ de ce numéro, laquelle est de la forme

$$(25)\quad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

De même g, h, et g', considérées comme périodes *initiales*, vérifient la relation analogue (5), $F_1 = 0$:

$$(26)\quad A'g + B'h + C'g' + D'(h^2 - gg') + E' = 0.$$

Calculons A, B, C, D, E pour la multiplication (23). On a, en désignant par K l'indice de cette multiplication,

$$AK = (ac)_{03} + (ac)_{12} = \alpha(2\theta\rho + 2\, d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - \beta\, d\sigma^2),$$
$$DK = (ab)_{03} + (ab)_{12} = 2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta.$$

Il est inutile de calculer BK, CK, EK, car la relation (25) est nécessairement de la forme

$$m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

où m et n désignent des entiers; on voit ainsi que la relation *finale*, $F_2 = 0$, entre g, h, g' est

$$(27)\quad \begin{aligned} &(h^2 - gg' - d)[2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta] \\ &\quad + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)[2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2] = 0. \end{aligned}$$

On trouverait de même pour la relation *initiale*, $F_1 = 0$,

$$(28)\quad \begin{aligned} &(h^2 - gg' - d)(2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau) \\ &\quad + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)(2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + d\beta\sigma^2) = 0. \end{aligned}$$

202. *Degré.* — Le *degré* de la transformation, c'est-à-dire le nombre des points u, v qui répondent à un point U, V est égal (nº 141) au déterminant des nombres a_i, b_i, c_i, d_i; on trouve, pour sa valeur,

$$[\theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) - d\alpha\gamma\sigma^2]^2.$$

203. *Remarque.* — La multiplication considérée ne sera ordinaire (nº 184) que si la relation (27) est une identité; en ce cas la relation (28) en sera une également.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$(29)\quad \begin{cases} 2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\sigma\rho + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta = 0, \\ 2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - d\beta\sigma^2 = 0. \end{cases}$$

Tirons τ de la première de ces relations et portons dans la seconde; il vient, en supposant $2\theta + \beta\rho \gtrless 0$,

$$\rho\{(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)^2 + \sigma^2[d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) - \omega^2]\} = 0.$$

D'après les inégalités du nº 196, la quantité entre crochets est une somme de carrés; elle ne peut dès lors être nulle que si $\sigma = 0$, $2\theta + \beta\rho = 0$, cas écarté : on a donc $\rho = 0$, ce qui donne ensuite, par (29),

$$\theta(2\tau - \beta\sigma) = 0, \qquad d\sigma(2\tau - \beta\sigma) = 0;$$

d'où

$$2\tau - \beta\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = \sigma = 0.$$

Enfin, si $2\theta+\beta\rho=0$ les relations (29) donnent

$$\rho\sigma(\beta^2-4\alpha\gamma)=0, \qquad \sigma(2\,d\tau+2\omega\rho-\beta\,d\sigma)=0;$$

d'où les solutions

$$\sigma=0, \qquad \text{ou} \qquad \rho=2\tau-\beta\sigma=0.$$

Finalement, pour que la multiplication définie par les entiers (23) soit ordinaire, il faut et il suffit que soit vérifiée une des hypothèses suivantes :

1° $$\rho=2\tau-\beta\sigma=0,$$
2° $$\sigma=2\theta+\beta\rho=0,$$

La multiplication ordinaire par un nombre entier, θ, correspond à $\rho=\sigma=\tau=0$ (n° 186).

204. Conformément au langage que nous avons adopté (n° 187), nous disons que la multiplication complexe définie par les entiers (23) a_i, b_i, c_i, d_i *conduit* de la relation singulière (28) à la relation singulière (27). Proposons-nous de rechercher les multiplications qui conduisent d'une relation à la même.

Soit

$$m(h^2-gg'-d)+n(\alpha g+\beta h+\gamma g'-\omega)=0 \tag{30}$$

cette relation, m et n désignant des entiers quelconques; pour que les relations initiale et finale (28) et (27) soient identiques à (30), il faut et il suffit que

$$\frac{m}{n}=\frac{2\theta\tau+(2\alpha\gamma-\beta^2)\rho\sigma+\beta\rho\tau-\beta\sigma\theta}{2\theta\rho+2\,d\sigma\tau+2\omega\rho\sigma+\beta\rho^2-\beta\,d\sigma^2}$$
$$=\frac{2\theta\tau-2\alpha\gamma\rho\sigma+2\omega\sigma\tau-\beta\sigma\theta-\beta\omega\sigma^2+\beta\rho\tau}{2\theta\rho-2\,d\sigma\tau+\beta\rho^2+\beta\,d\sigma^2}.$$

On met aisément ces équations sous la forme :

$$(2\theta+\beta\rho+\omega\sigma)[n(2\tau-\beta\sigma)-2m\rho]=0,$$
$$\sigma\{(2\tau-\beta\sigma)(2md+n\omega)+\rho[n(\beta^2-4\alpha\gamma)+2\omega m]\}=0.$$

On y satisfait de quatre manières :

1° $$\sigma = 0, \qquad 2\theta + \beta\rho = 0;$$

2° $$\sigma = 0, \qquad n\tau - m\rho = 0;$$

3° $$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$
$$n(2\tau - \beta\sigma) - 2m\rho = 0;$$

4° $$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$
$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0.$$

205. Examinons successivement ces quatre hypothèses :

1° $\sigma = 0$ et $2\theta + \beta\rho = 0$ donne (n° 203) une transformation ordinaire qu'on devait évidemment rencontrer, puisqu'en ce cas les premiers membres des relations initiale et finale, étant identiquement nuls, sont identiques entre eux.

2° $\sigma = 0$ et $n\tau - m\rho = 0$ donne une transformation singulière : on reconnait aisément qu'on trouve ainsi les multiplications singulières répondant au cas où g, h et g' seraient liées *uniquement* par la relation $m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$.

3° Des deux équations

$$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$
$$(2\tau - \beta\sigma)n \qquad\qquad - \rho.2m \qquad\qquad = 0,$$

on déduit

$$2\tau - \beta\sigma = 0, \qquad \rho = 0,$$

transformation ordinaire (n° 203). Cela suppose toutefois que le déterminant

$$-2m(2md + n\omega) - n^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) - 2\omega mn$$

n'est pas nul. Cette quantité s'écrit, en changeant le signe,

$$n^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\omega mn + 4m^2 d;$$

elle ne peut s'annuler pour aucun système de valeurs de m et n (autre que 0,0), car $\omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ est négatif (n° 196).

4° C'est ce cas qui donne des multiplications singulières nouvelles, conduisant d'une relation singulière à la même relation ; il est caractérisé par la condition

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0,$$

σ étant $\gtrless 0$, et aussi ρ et $2\tau - \beta\sigma$ n'étant pas nuls simultanément. Si ρ, σ, θ et τ sont des entiers quelconques satisfaisant à ces conditions, la multiplication dont les entiers caractéristiques sont donnés par les formules (23) conduira de la relation

$$m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

à la même relation; m et n étant définis par l'équation

$$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{m}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)\rho + \omega(2\tau - \beta\sigma)} = \frac{n}{-2\omega\rho - 2d(2\tau - \beta\sigma)}.$$

206. *Corollaire.* — Étant donnée une relation initiale (30), on peut toujours trouver une multiplication conduisant de cette relation à une relation *différente*; car il suffit que ρ, σ, θ, τ soient choisis de manière à vérifier

$$\frac{m}{n} = \frac{2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau}{2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + \beta d\sigma^2},$$

et de telle sorte que ni σ, ni ρ, ni $2\theta + \beta\rho + \omega\sigma$ ne soient nuls : ce choix est évidemment possible.

207. *Composition de deux multiplications.* — Si nous effectuons successivement deux multiplications, définies respectivement par les valeurs ρ, σ, θ, τ et ρ', σ', θ', τ' des entiers qui figurent dans les formules (23), nous obtenons une multiplication du même type (23), pour laquelle les entiers correspondants seront ρ'', σ'', θ'', τ''. On obtient leurs valeurs sans difficulté en partant des formules du n° 146 relatives à la composition de deux transformations; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\rho'' &= \rho\theta' + \theta\rho' + \beta\rho\rho' - d(\sigma\tau' - \sigma'\tau) + \omega\rho\sigma',\\
\sigma'' &= \sigma\theta' + \theta\sigma' + \tau\rho' - \rho\tau' + \beta\rho\sigma' + \omega\sigma\sigma',\\
\theta'' &= \theta\theta' - \alpha\gamma\rho\rho' + \alpha\gamma d\sigma\sigma' - (d\tau + \omega\rho)(\beta\sigma' - \tau'),\\
\tau'' &= \theta\tau' + \tau\theta' + \alpha\gamma(\rho\sigma' - \sigma\rho') + \beta\tau\rho' + \omega\sigma\tau'.
\end{aligned}$$

208. On déduit de ces formules une conséquence arithmétique intéressante.

Posons, pour simplifier,

$$\xi = 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma,$$
$$\eta = 2\tau - \beta\sigma;$$

les entiers ξ et η remplaçant θ et τ. On trouve, en appelant ξ'' et η'' les quantités $2\theta'' + \beta\rho'' + \omega\sigma''$ et $2\tau'' - \beta\sigma''$,

$$(31)\quad \begin{cases} 2\xi'' = \xi\xi' + d\eta\eta' + \Delta\rho\rho' + (\omega^2 - d\Delta)\sigma\sigma' + \omega(\rho\eta' + \rho'\eta), \\ 2\eta'' = \xi\eta' + \xi'\eta - \omega(\sigma'\eta - \sigma\eta') + \Delta(\sigma\rho' - \sigma'\rho), \\ 2\rho'' = \rho\xi' + \rho'\xi + \omega(\rho\sigma' - \sigma\rho') + d(\sigma'\eta - \sigma\eta'), \\ 2\sigma'' = \sigma\xi' + \sigma'\xi + \rho'\eta - \rho\eta', \end{cases}$$

en écrivant $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta$.

Maintenant observons que le degré de la transformation composée est le produit des degrés des transformations composantes; ce degré, pour la transformation ξ, η, ρ, σ, s'écrit, en vertu de la formule du n° 202,

$$\frac{1}{16}[\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2]^2.$$

On aura donc

$$(32)\quad \begin{aligned} &[\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2] \\ \times &[\xi'^2 - d\eta'^2 - 2\omega\rho'\eta' - \Delta\rho'^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma'^2] \\ = 4 &[\xi''^2 - d\eta''^2 - 2\omega\rho''\eta'' - \Delta\rho''^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma''^2], \end{aligned}$$

en désignant par ξ, η, ρ, σ; ξ', η' ρ' σ', des entiers quelconques, et ξ'', η'', ρ'', σ'' étant définis par les formules (31). On aurait dû écrire $\pm$ devant le second membre de (32), mais on reconnaît de suite que l'identité des deux membres exige le signe $+$. On a ainsi une propriété curieuse de la forme quaternaire

$$\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2.$$

209. *Carré d'une multiplication.* — Si l'on fait dans les formules précédentes $\rho' = \rho$, $\sigma' = \sigma$, $\theta' = \theta$, $\tau' = \tau$, il vient

$$\rho'' = \rho(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma),$$
$$\sigma'' = \sigma(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma),$$
$$\tau'' = \tau(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma),$$
$$\theta'' = \theta^2 - \alpha\gamma\rho^2 + \alpha\gamma d\sigma^2 - (d\tau + \omega\rho)(\beta\sigma - \tau).$$

Comme conséquence, on voit que si la multiplication considérée est une de celles du type 4° du n° 205, conduisant d'une relation singulière à la même relation, ρ'', σ'' et τ'' sont nuls, puisque

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0.$$

Le carré d'une telle multiplication est donc une multiplication ordinaire par un nombre entier (n° 203); cet entier est θ''.

Si l'on désigne par D^2 le degré de la multiplication considérée (n° 202)

$$D = \theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) - \alpha\gamma\, d\sigma^2,$$

on a

$$D + \theta'' = (2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)\theta = 0.$$

Ainsi

$$\theta'' = -D.$$

Multiplication dans le cas elliptique.

210. Supposons les périodes g, h, g' liées par une relation singulière d'invariant carré parfait n^2, et par une ou deux autres relations. Si la relation singulière était la seule liant les périodes, on rentrerait dans un cas examiné (n° 193).

On peut ramener la relation singulière à la forme $nh - 1 = 0$ (I, n° 15); remplaçons h par $\frac{1}{n}$ dans les quatre équations fondamentales de la multiplication complexe, celles-ci deviennent :

$$(A)\quad n^2 a_3 g^2 + n[a_2 + b_3 + n(a_0 - d_3)]g + b_2 + n(b_0 - d_2) - n^2 d_0 = 0,$$

$$(B)\quad n^2 a_2 gg' + n[a_3 + na_1]g + n[b_2 - nd_2]g' + b_3 + n(b_1 - d_3) - n^2 d_1 = 0,$$

$$(C)\quad n^2 b_3 gg' + n[a_3 - nc_3]g + n[b_2 + nb_0]g' + a_2 + n(a_0 - c_2) - n^2 c_0 = 0,$$

$$(D)\quad n^2 b_2 g'^2 + n[a_2 + b_3 + n(b_1 - c_2)]g' + a_3 + n(a_1 - c_3) - n^2 c_1 = 0,$$

En tenant compte de $h^2 = \frac{1}{n^2}$, les équations (B) et (C) sont singulières, car $gg' = (gg' - h^2) + \frac{1}{n^2}$; si donc (A) et (D) sont des identités, on retombe dans le cas où g, h, g' ne sont liées que par des relations singulières.

Si (A), par exemple, n'est pas une identité, et si (B) ou (C) n'en est pas une, les périodes sont encore liées par trois relations singulières;

car (B) donne

$$g = \frac{\rho g' + \sigma}{\rho' g' + \sigma'}$$

les ρ et σ étant entiers, et si nous portons cette valeur dans (A), nous trouvons

$$n^2 a_3 g \frac{\rho g' + \sigma}{\rho' g' + \sigma'} + \mathrm{M} g + \mathrm{P} = 0,$$

relation de la forme

$$\mathrm{M}_1 g g' + \mathrm{N}_1 g + \mathrm{P}_1 g' + \mathrm{Q}_1 = 0,$$

c'est-à-dire singulière, en raison de $h^2 = \frac{1}{n^2}$.

Donc, pour échapper au cas de relations uniquement singulières, il faut que (B) *et* (C) soient des identités, et que (A) ou (D) n'en soit pas une. Or (A), par exemple, est de la forme

$$\mathrm{M} g^2 + \mathrm{N} g + \mathrm{P} = 0,$$

M, N, P étant entiers : si l'on se reporte au tableau des périodes

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & \frac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \frac{1}{n}, & g', \end{matrix}$$

on voit que le couple $\left(g, \frac{1}{n}\right)$ est un couple de périodes elliptiques de multiplication complexe, c'est-à-dire que l'un des deux systèmes de fonctions elliptiques auxquelles se réduisent les fonctions abéliennes considérées possède une multiplication complexe.

Même conclusion si (D) n'est pas une identité.

Il est aisé de trouver les multiplications relatives à ces cas.

211. Supposons d'abord que (A) n'est pas une identité et que (D) en est une; en écrivant que $(\mathrm{D}) \equiv (\mathrm{B}) \equiv (\mathrm{C}) \equiv 0$, on a

$$\begin{matrix} b_2 = 0, & & a_1 + b_3 + n(b_1 - c_2) = 0, & a_3 + n(a_1 - c_3) - n^2 c_1 = 0, \\ a_2 = 0, & a_3 + n a_1 = 0, & b_2 - n d_2 = 0, & b_3 + n(b_1 - d_3) - n^2 d_1 = 0, \\ b_3 = 0, & a_3 - n c_3 = 0, & b_2 + n b_0 = 0, & a_2 + n(a_0 - c_2) - n^2 c_0 = 0, \end{matrix}$$

ce qui donne

$$(33) \quad \left\{ \begin{matrix} a_2 = b_2 = b_3 = b_0 = d_2 = 0, & a_3 = -n^2 c_1, & b_1 = c_2; \\ a_1 = n c_1, & c_3 = -n c_1, & a_0 = c_2 + n c_0, & d_3 = c_2 - n d_1. \end{matrix} \right.$$

La période g vérifie (A), c'est-à-dire une relation quadratique de la forme

$$n^2 m g^2 + npg + q = 0, \tag{34}$$

m, p, q étant entiers sans diviseur commun.

Écrivons que (A) est identique à (34), à un facteur près, il vient, en tenant compte de (33),

$$c_1 = -\rho m, \qquad c_0 + d_1 = \rho p, \qquad d_0 = -\rho q,$$

ρ désignant un entier; et finalement les entiers caractéristiques de la multiplication complexe cherchée sont donnés par les formules :

$$\left\{\begin{array}{llll} a_0 = c_2 + nc_0, & b_0 = 0, & c_0 = c_0, & d_0 = -\rho q, \\ a_1 = -n\rho m, & b_1 = c_2, & c_1 = -\rho m, & d_1 = -c_0 + \rho p, \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = c_2, & d_2 = 0, \\ a_3 = n^2 \rho m, & b_3 = 0, & c_3 = n\rho m, & d_0 = c_2 + nc_0 - n\rho p; \end{array}\right. \tag{35}$$

ρ, c_0, c_2 sont des entiers arbitraires.

Le *degré* de cette multiplication complexe, égal au déterminant des a_i, b_i, c_i, d_i (n° 141), est

$$c_2^2[(c_1 + nc_0)^2 - np\rho(c_2 + nc_0) + n^2 mq\rho^2]$$

quantité toujours positive, car $p^2 - 4mq$ doit être < 0, pour que g, donné par (34) soit imaginaire.

Remarque. — En vertu de ce qui précède, si les équations (A), (B), (C), (D) établissent entre les périodes une relation singulière d'invariant carré parfait et *deux* autres relations, une de celles-ci ne pourra être singulière sans que l'autre le soit également.

212. On trouverait de même sans difficulté les formules qui répondent au cas où (D) seul ne serait pas une identité, et à celui où (A) et (D) ne seraient pas simultanément des identités.

Multiplication dans le cas de trois relations singulières.

213. Les trois relations peuvent (n° 195) être réduites aux formes

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h = \omega, \qquad \beta' h + \gamma' g' = \omega';$$

les deux dernières ont leur invariant carré parfait.

On peut alors ramener l'une d'elles au type $nh - 1 = 0$; les deux autres seront des formes

$$A\,gg' + B\,g + C\,g' + D = 0,$$
$$A_1 gg' + B_1 g + C_1 g' + D = 0.$$

En tirant g' de la dernière pour porter dans la précédente, on voit que g vérifie une relation quadratique $Mg^2 + Ng + P = 0$ à coefficients entiers, et il en est de même de g'.

On retombe donc sur le cas elliptique où les deux systèmes de fonctions elliptiques correspondantes ont une multiplication complexe; mais, outre les relations quadratiques que vérifient g et g', il y a de plus une relation $Agg' + Bg + Cg' + D = 0$, qui n'existe pas en général dans le cas précédent.

Nous n'indiquerons pas les formules de multiplication complexe relatives au cas de trois relations singulières; on les obtiendrait sans difficulté en imitant la marche déjà suivie.

Multiplication complexe, en général.

214. Revenons au cas général de la multiplication complexe, c'est-à-dire à la discussion des équations fondamentales (A), (B), (C), (D) du n° 185 :

$$(A)\qquad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0,$$
$$(B)\qquad gha_3 + gg'a_2 + h^2 b_3 + hg'b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0,$$
$$(C)\qquad gha_3 + gg'b_3 + h^2 a_2 + hg'b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g'b_0 - c_0 = 0,$$
$$(D)\qquad h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

Nous avons établi (n° 190) que ces relations entraînent au moins une relation singulière entre g, h et g'.

Distinguons maintenant plusieurs cas.

215. I. Les quatre relations (A), (B), (C), (D) se réduisent à une seule, laquelle, par ce qui vient d'être dit, est nécessairement une relation singulière; nous avons appris à former (n°s 193-194) les multiplications complexes correspondantes.

216. II. Les quatre relations (A), (B), (C), (D) se réduisent à deux :

géométriquement, c'est dire que, en regardant g, h, g' comme des coordonnées courantes, les quatre quadriques $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$ ont une ligne commune. On peut supposer que cette ligne est une droite ou une conique (véritable ou décomposée) : les relations (A), (B), (C), (D) entrainent en effet entre g, h, g' au moins une relation singulière qui, par une transformation du premier ordre, peut être ramenée à la forme linéaire en g, h, g'.

Si la ligne commune aux quatre quadriques est une droite, celle-ci a deux équations du type

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = o, \qquad \alpha_1 g + \beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = o,$$

les α, β, γ, ω étant rationnels par rapport aux coefficients des surfaces, c'est-à-dire étant des entiers : les périodes g, h, g' sont alors uniquement liées par deux relations singulières.

Si la ligne commune aux quatre quadriques est une conique, elle ne peut avoir comme points à l'infini que les deux points

$$h^2 - gg' = o, \qquad a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = o.$$

En effet, en dehors du cas signalé au n° 189 et où toutes les relations entre les périodes sont encore singulières, ces points sont les seuls communs à l'infini aux quatre quadriques (n° 189).

Deux cas sont alors à distinguer selon que la conique passe par ces deux points, ou qu'elle passe par un seul en y touchant alors le plan de l'infini. Dans le premier cas, le plan de la conique a une équation de la forme

$$a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = \omega,$$

ω étant une fraction, et en tenant compte de cette relation entre les périodes, les quatre relations (A), (B), (C), (D) deviennent singulières, comme le montrent les formes (7) des termes du plus haut degré dans ces équations.

Par suite, dans ce premier cas, g, h et g', qui sont, par hypothèse, simplement indéterminés, sont liés uniquement par deux relations singulières.

Dans le second cas, soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = o,$$

le plan de la conique; α, β, γ, ω étant des fractions ou, si l'on veut, des

entiers. Il faut, en vertu de l'hypothèse, que, dans le plan de l'infini, les droites $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, $a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = 0$ se coupent sur la conique $h^2 - gg' = 0$; l'un des points où la première droite coupe la conique ayant ainsi ses coordonnées fractionnaires, il en est de même du second, ce qui exige que la quantité $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ soit un carré. En d'autres termes, il existe entre les périodes une relation singulière d'invariant carré parfait, qu'on peut ramener au type $nh - 1 = 0$, et l'on retombe (n° 210) soit sur le cas d'une seconde relation singulière, examiné aux n°s 195-209, soit sur le cas où g (ou g') vérifie une relation du deuxième ordre à coefficients entiers; c'est le cas de multiplication elliptique complexe étudié au n° 211.

217. III. Les quatre quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont un nombre fini de points communs, c'est-à-dire que g, h, g' sont liés par *trois* relations.

Je dis que, dans ce cas, il existe entre les périodes *une* ou *trois* relations singulières; ou encore, puisqu'il y a une relation singulière au moins, je dis que les équations (A), (B), (C), (D) ne peuvent entraîner deux relations singulières sans en entraîner une troisième, distincte des deux premières.

Le théorème est vrai si l'une des relations singulières de l'hypothèse a un invariant carré parfait (n° 211, *Remarque*); nous aurons donc, dans ce qui suit, le droit de supposer qu'on est en dehors du cas elliptique.

Distinguons maintenant trois cas :

218. 1° La transformation de multiplication complexe considérée est singulière et conduit d'une relation singulière entre g, h, g' à une relation singulière différente : cela revient à dire que les expressions F_1 et F_2 du n° 187 ne sont pas identiquement nulles et sont linéairement distinctes.

Effectuons une transformation ordinaire du premier ordre, de manière à faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$ dans la relation $F_2 = 0$; je dis que le terme analogue ne disparaîtra pas dans $F_1 = 0$. Sinon, en éliminant g' entre $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, on trouverait une relation singulière du type $Mg + Nh + P = 0$, d'invariant carré parfait N^2, ce qui est contraire à l'hypothèse (n° 217).

Considérons maintenant les identités (3) et (4) du n° 187 :

$$(3)\qquad \begin{aligned} &A(a_3h + a_2g' + a_1) - B(a_3g + a_2h + a_0) \\ &+ C(b_3h + b_2g' + b_1) - D(b_3g + b_2h + b_0) \equiv F_1, \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} &A(a_3h + b_3g' - c_3) + B(a_2h + b_2g' - c_2) \\ &- C(a_3g + b_3h - d_3) - D(a_2g + b_2h - d_2) \equiv F_2. \end{aligned}$$

Entre ces deux identités, éliminons D; il vient une relation de la forme

$$(36)\qquad \begin{aligned} &AP_1 + BP_2 + CP_3 \\ &\equiv F_1(a_2g + b_2h - d_2) - F_2(b_3g + b_2h + b_0) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 = {}&(a_3h + a_2g' + a_1)(a_2g + b_2h - d_2) \\ &- (a_3h + b_3g' - c_3)(b_3g + b_2h + b_0), \\ P_2 = {}&- (a_3g + a_2h + a_0)(a_2g + b_2h - d_2) \\ &- (a_2h + b_2g' - c_2)(b_3g + b_2h + b_0), \\ P_3 = {}&(b_3h + b_2g' + b_1)(a_2g + b_2h - d_2) \\ &+ (a_3g + b_3h - d_3)(b_3g + b_2h + b_0). \end{aligned}$$

En développant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned} P_1 &= Cb_3 - Ba_2 + h[(ba)_{03} + (ba)_{12} + (ad)_{32} + (bc)_{32}] \\ &\qquad + (cb)_{03} + (ad)_{12}, \\ P_2 &= Aa_2 + Cb_2 + g[(ad)_{23} + (bc)_{23}] + (ad)_{20} + (bc)_{20}, \\ -P_3 &= Ab_3 + Bb_2 + g[(ba)_{03} + (ba)_{12}] + (db)_{12} + (db)_{03}, \end{aligned}$$

de sorte que l'identité (36) prend la forme

$$(37)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}A\left(\frac{\partial F_2}{\partial h} - \frac{\partial F_1}{\partial h}\right) - B\frac{\partial F_1}{\partial g'} + C\frac{\partial F_2}{\partial g'} \\ &\equiv F_1(a_2g + b_2h - d_2) - F_2(b_3g + b_2h + b_0). \end{aligned}$$

Cela posé, observons que $B - C = 0$ est une relation singulière entre g, h, g', dont le premier membre est une combinaison linéaire de F_1 et de F_2; sinon les périodes seraient liées par trois relations singulières et le théorème à démontrer serait établi. On peut alors, en posant pour abréger

$$\Phi = F_2 - F_1,$$

écrire l'identité (37)

$$\frac{1}{2}A\Phi'_h - C\Phi'_g \equiv F_1R_1 + F_2R_2, \tag{38}$$

R_1 et R_2 étant linéaires en g, h, g'.

En éliminant A au lieu de D entre les identités (3) et (4), on trouve de même

$$\frac{1}{2}D\Phi'_h - C\Phi'_g = F_1R'_1 + F_2R'_2. \tag{39}$$

Comme F_1 contient un terme en $h^2 - gg'$ et que F_2 n'en contient pas, $\Phi(= F_2 - F_1)$ n'est pas identiquement nul, et même Φ'_g, Φ'_h, $\Phi'_{g'}$, ne sont pas des constantes.

Les surfaces (quadrique et plan) $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ se coupent suivant une conique qui rencontre en *deux* points, *à distance finie*, le plan $\Phi'_h = 0$. En effet : 1° le plan $\Phi'_h = 0$ ne peut coïncider avec le plan $F_2 = 0$ de la conique, car Φ'_h ne contient que h, tandis que F_2 doit contenir des termes en g et g', pour que l'invariant de la relation singulière $F_2 = 0$ ne soit pas carré parfait; 2° la conique ne rencontre pas le plan $\Phi'_h = 0$ à l'infini, c'est-à-dire qu'aucun des points à l'infini $h^2 - gg' = 0$, $h = 0$, n'est sur le plan $F_2 = 0$, car il faudrait pour cela que F_2 ne contînt pas de termes en g (ou en g'), et l'invariant correspondant serait encore carré parfait.

Je dis maintenant que les deux points où la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ coupe le plan $\Phi'_h = 0$ sont situés sur la quadrique $C = 0$. Si l'un d'eux, en effet, n'était pas sur C, il serait, en vertu des identités (38) et (39), sur les plans $\Phi'_g = 0$ et $\Phi'_{g'} = 0$. En d'autres termes, le point

$$\Phi'_h = \Phi'_g = \Phi'_{g'} = 0,$$

qui est le centre de $\Phi = 0$, serait sur la conique commune à $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, donc sur $\Phi = 0$. Or cela est impossible, car la quadrique $\Phi = 0$, contenant des termes du second ordre dans son équation, ne peut appartenir à la variété cône (n° 197).

Donc les deux points où la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ coupe le plan $\Phi'_h = 0$ sont sur la quadrique $C = 0$; donc les deux autres points où cette conique coupe $C = 0$ sont, d'après (38) et (39), sur $A = 0$ et sur $D = 0$. En d'autres termes (puisque $B - C \equiv \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$), les quadriques $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ n'ont à distance finie que

deux points communs ([1]), c'est-à-dire [en vertu de (3) et (4)] que les quadriques (A), (B), (C), (D) se coupent, à distance finie, en deux points, situés sur la quadrique proprement dite $F_1 = 0$. La droite qui joint ces deux points a les coefficients de ses équations rationnels en fonction de ceux des équations (A), (B), (C), (D), c'est-à-dire entiers, et il y a entre les périodes, outre la relation singulière du second ordre $F_1 = 0$, deux autres relations singulières (puisque linéaires).

On complète ce raisonnement en observant que la droite dont on vient de parler ne saurait être sur la quadrique $F_1 = 0$; elle est en effet dans le plan $F_2 = 0$ qui contient les deux points communs à (A), (B), (C), (D) à distance finie, et l'on a vu (n° 197) que le plan $F_2 = 0$ ne peut toucher la quadrique $F_1 = 0$.

219. 2° La transformation de multiplication complexe considérée est singulière et conduit d'une relation singulière à la même relation $F_1 = 0$.

Soit

$$(40) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

cette multiplication.

Par hypothèse, il y a entre les périodes deux relations singulières, qui peuvent être supposées (n° 195) de la forme

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega.$$

Parmi les multiplications complexes déduites de ces deux relations, considérons-en une qui conduise de la relation singulière $F_1 = 0$ à une relation singulière différente $F_2 = 0$ (n° 206)

$$(40\ bis) \qquad u = \lambda_1 u' + \mu_1 v', \qquad v = \lambda_2 u' + \mu_2 v'.$$

Il est clair que la transformation composée de (40) et (40 *bis*)

$$(41) \qquad \begin{cases} U = \lambda (\lambda_1 u' + \mu_1 v') + \mu (\lambda_2 u' + \mu_2 v'), \\ V = \lambda' (\lambda_1 u' + \mu_1 v') + \mu' (\lambda_2 u' + \mu_2 v'), \end{cases}$$

([1]) A moins que la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ne soit tout entière située sur $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$; en ce cas, contrairement à l'hypothèse, les quatre dernières quadriques auraient une courbe commune.

sera encore une multiplication complexe, et qu'elle conduira de la relation $F_1 = 0$ à la relation $F_2 = 0$.

En vertu de ce qui précède, si l'existence de cette nouvelle multiplication détermine complètement g, h et g', il y a entre ces périodes une troisième relation singulière et le théorème est établi; si g, h et g' ne sont pas déterminés, c'est que la multiplication nouvelle est une de celles formées aux nos 195-209 et qui se déduisent de l'existence de deux relations singulières entre les périodes.

On a ainsi, pour la transformation (40 *bis*), d'après les formules ordinaires de la transformation,

$$\lambda_1 = a'_0 + a'_3 g + a'_2 h, \qquad \lambda_2 = a'_1 + a'_3 h + a'_2 g';$$
$$\mu_1 = b'_0 + b'_3 g + b'_2 h, \qquad \mu_2 = b'_1 + b'_3 h + b'_2 g';$$

les a'_i et b'_i étant donnés par les formules (23) où l'on écrit ρ', σ', θ', τ' à la place de ρ, σ, θ, τ. De même pour la transformation (41)

$$(41\ bis)\qquad \begin{cases} \lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 = a_0 + a_3 g + a_2 h, \\ \lambda\mu_1 + \mu\mu_2 = b_0 + b_3 g + b_2 h, \\ \lambda'\lambda_1 + \mu'\lambda_2 = a_1 + a_3 h + a_2 g', \\ \lambda'\mu_1 + \mu'\mu_2 = b_1 + b_3 h + b_2 g'; \end{cases}$$

les a_i et b_i étant donnés par les formules (23). En portant dans ces équations les valeurs ci-dessus de λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, on en déduit les valeurs de λ, μ, λ', μ'; or, à l'aide des relations

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega,$$

et des expressions des a_i, b_i, a'_i, b'_i en fonction des ρ, σ, θ, τ; ρ', ..., τ' on trouve

$$\lambda = mg + nh + p,$$
$$\mu = m'g + n'h + p',$$

m, n, p, m', n', p' étant fractionnaires; on a des expressions analogues pour λ' et μ'.

Les deux premières relations (41 *bis*), mises alors sous la forme

$$a'_3(\lambda g + \mu h) + a'_2(\lambda h + \mu g') = m_1 g + n_1 h + p_1,$$
$$b'_3(\lambda g + \mu h) + b'_2(\lambda h + \mu g') = m'_1 g + n'_1 h + p'_1,$$

donnent aussi, pour $\lambda g + \mu h$ en $\lambda h + \mu g'$, des expressions linéaires,

à coefficients fractionnaires, en g et h; et l'on obtient un résultat semblable pour $\lambda' g + \mu' h$ et $\lambda' h + \mu' g'$.

Il faut maintenant écrire, pour que (40) soit une multiplication complexe, que λ et λ'; μ et μ'; $\lambda g + \mu h$ et $\lambda' g + \mu' h$; $\lambda h + \mu g'$ et $\lambda' h + \mu' g'$ sont des périodes : d'après ce qui précède, on n'est conduit ainsi à écrire que des relations *linéaires* entre g, h et g'. Si ce sont des identités ou des conséquences de $\alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega$, la multiplication complexe considérée (40) ne suppose entre g, h et g' que les deux relations singulières de l'hypothèse; si l'une, au moins, n'est pas une identité, ou une conséquence de $\alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega$, c'est qu'il y a, entre les périodes, trois relations singulières. C. Q. F. D.

220. 3° La transformation de multiplication complexe considérée est ordinaire : il suffit de la faire suivre d'une multiplication singulière du premier degré, déduite de l'existence des deux relations singulières admises, pour rentrer dans un des cas précédents.

221. Ainsi, dans le cas où les périodes g, h, g' sont déterminées complètement par les équations fondamentales de la multiplication complexe, il y a entre elles une ou trois relations singulières.

S'il n'y en a qu'une et si son invariant est carré parfait, il résulte du n° 210 que g et g' vérifient chacun une relation quadratique à coefficients entiers, c'est-à-dire que les deux systèmes de fonctions elliptiques par lesquelles s'expriment les fonctions abéliennes considérées possèdent chacun une multiplication complexe.

Si l'invariant n'est pas carré parfait, on a un cas nouveau qui sera examiné plus loin.

222. *Conclusion.* — En résumé, cette discussion prouve qu'il ne peut y avoir de multiplication complexe que dans les cinq cas suivants :

1° Les périodes g, h, g' sont liées uniquement par une relation singulière;

2° et 3° Elles sont liées uniquement par deux ou trois relations singulières;

4° Elles sont liées par une relation singulière d'invariant carré parfait, et les deux systèmes de fonctions elliptiques auxquelles se

ramènent alors les fonctions abéliennes possèdent l'un ou l'autre, ou tous deux, une multiplication elliptique complexe;

5° Elles sont liées par une relation singulière d'invariant non carré parfait et par deux autres relations non singulières.

Les quatre premiers cas ont été étudiés précédemment; il ne nous reste à examiner que le cinquième.

Dernier cas de multiplication abélienne complexe.

223. Nous ferons deux hypothèses, selon que l'invariant de la relation singulière qui lie les périodes est pair ou impair.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE : *Invariant pair.*

224. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme

$$g = cg'$$

c étant un entier positif, puisque l'invariant $4c$ doit être > 0. Reprenons maintenant les équations fondamentales (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe, et faisons-y $g = cg'$. Les résultats obtenus dans B et C doivent être identiques, car $B - C = 0$ étant une relation singulière est, soit une identité, soit une conséquence de $g - cg' = 0$.

Voici ce que deviennent les quatre équations, quand on y fait la substitution indiquée :

$$\text{(A)} \quad a_3c^2g'^2 + (a_2 + b_3)cg'h + b_2h^2 + c(a_0 - d_3)g' + (b_0 - d_2)h - d_0 = 0,$$

$$\text{(B)} \quad a_2c\, g'^2 + (a_3c + b_2)\, g'h + b_3h^2 + (ca_1 - d_2)g' + (b_1 - d_3)h - d_1 = 0,$$

$$\text{(C)} \quad b_3c\, g'^2 + (a_3c + b_2)\, g'h + a_2h^2 + (b_0 - cc_3)g' + (a_0 - c_2)h - c_0 = 0,$$

$$\text{(D)} \quad b_2g'^2 + (a_2 + b_3)\, g'h + a_3h^2 + (b_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0.$$

Écrivons que les deux expressions intermédiaires sont identiques; il vient

$$(42) \quad \begin{cases} a_2 = b_3, & ca_1 - d_2 = b_0 - cc_3; \\ b_1 - d_3 = a_0 - c_2, & c_0 = d_1. \end{cases}$$

Observons encore que (A) et (D) doivent être identiques à un facteur près; en multipliant en effet (D) par $-c$ et ajoutant à (A), on obtient

la relation

$$0 = h^2(b_2 - a_3 c) + cg'^2(a_3 c - b_2) + g'c[a_0 - d_3 - b_1 + c_2] \\ + h[b_0 - d_2 - ca_1 + cc_3] - d_0 + cc_1.$$

Comme $cg'^2 = gg'$, on voit que c'est une relation *singulière*, et puisque $g = cg'$ est la seule relation possible de cette nature, il faut que l'on ait

$$(43) \quad \begin{cases} b_2 = a_3 c, & a_0 - d_3 = b_1 - c_2, \\ b_0 - d_2 = c(a_1 - c_3), & d_0 = cc_1. \end{cases}$$

Ces équations combinées avec les équations (42), donnent l'ensemble des relations entre les a_i, b_i, c_i, d_i :

$$(44) \quad \begin{cases} a_2 = b_3, & a_0 = b_1, & b_0 = ca_1, & c_0 = d_1; \\ b_2 = a_3 c, & d_3 = c_2, & d_2 = cc_3, & d_0 = cc_1. \end{cases}$$

225. Cela posé, il ne subsiste, entre h et g', que les équations (D) et (C), qui, en tenant compte des relations (44), s'écrivent

$$(45) \quad ca_3 g'^2 + 2b_3 g'h + a_3 h^2 + (b_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0,$$

$$(46) \quad cb_3 g'^2 + 2ca_3 g'h + b_3 h^2 + c(a_1 - c_3)g' + (b_1 - c_2)h - c_0 = 0.$$

On peut donc dire que g' et h sont définis par deux équations *à coefficients entiers* de la forme

$$(47) \quad cpg'^2 + 2ng'h + ph^2 + qg' + rh + s = 0,$$

$$(48) \quad cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + crg' + qh + s' = 0,$$

n et p ne peuvent être nuls à la fois, sinon ces équations seraient singulières.

Pour trouver toutes les multiplications complexes correspondantes, il faut écrire que les équations (45) et (46) sont des conséquences de (47) et (48), ce qui donne, en désignant par λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 des constantes :

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda_1 p + \mu_1 n, & b_3 &= \lambda_2 p + \mu_2 n, \\ b_3 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp, & ca_3 &= \lambda_2 n + \mu_2 cp, \\ b_1 - c_2 &= \lambda_1 q + \mu_1 cr, & c(a_1 - c_3) &= \lambda_2 q + \mu_2 cr, \\ a_1 - c_3 &= \lambda_1 r + \mu_1 q, & b_1 - c_2 &= \lambda_2 r + \mu_2 q, \\ -c_1 &= \lambda_1 s + \mu_1 s', & -c_0 &= \lambda_2 s + \mu_2 s'. \end{aligned}$$

On en tire

$$cp(\lambda_1 - \mu_2) = n(\lambda_2 - c\mu_1),$$

$$n(\lambda_1 - \mu_2) = p(\lambda_2 - c\mu_1).$$

D'ailleurs, le déterminant $cp^2 - n^2$ ne peut s'annuler; p et n, en effet, ne sont pas nuls et c n'est pas un carré parfait, car on retomberait (n° 210) sur le cas elliptique de multiplication elliptique complexe; donc $\lambda_1 = \mu_2$, $\lambda_2 = c\mu_1$, et l'on en conclut, pour les a_i, b_i, c_i, d_i, les valeurs suivantes :

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_0 = c_2 + \lambda_1 q + \mu_1 cr, & b_0 = cc_3 + \lambda_1 cr + \mu_1 cq, \\ a_1 = c_3 + \lambda_1 r + \mu_1 q, & b_1 = c_2 + \lambda_1 q + \mu_1 cr, \\ a_2 = \lambda_1 n + \mu_1 cp, & b_2 = \lambda_1 cp + \mu_1 cn, \\ a_3 = \lambda_1 p + \mu_1 n, & b_3 = \lambda_1 n + \mu_1 cp, \\ -c_0 = \lambda_1 s' + \mu_1 cs, & -d_0 = \lambda_1 cs + \mu_1 cs', \\ -c_1 = \lambda_1 s + \mu_1 s', & -d_1 = \lambda_1 s' + \mu_1 cs, \\ c_2 = c_2, & d_2 = cc_3, \\ c_3 = c_3, & d_3 = c_2. \end{array}\right.$$

Dans ces formules, c_2 et c_3 désignent des entiers arbitraires; λ_1 et μ_1, également arbitraires, sont des mombres entiers ou même fractionnaires, mais tels alors que les a_i, b_i, c_i, d_i, soient entiers : on voit immédiatement, dans ce dernier cas, que les facteurs qui *peuvent* figurer au dénominateur de λ_1 et μ_1 sont connus *a priori* et sont en nombre limité.

226. Il faut maintenant rechercher dans quels cas les équations (47) et (48), jointes à $g = cg'$, donnent pour g, h, g' des valeurs telles que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif.

A cet effet, observons que les équations (47) et (48), si l'on y regarde h et g' comme des coordonnées courantes, représentent deux coniques *concentriques;* pour simplifier les calculs, transportons l'origine au centre commun dans le plan des hg'; *cela ne changera pas les parties imaginaires de* g, h, g', et les deux équations deviennent

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} cpg'^2 + 2ng'h + ph^2 + \varpi = 0, \\ cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + \varpi' = 0, \end{array}\right.$$

ϖ et ϖ' désignant des constantes qu'il est inutile d'expliciter.

On en déduit, en appelant g_1, h_1, g'_1 et g_0, h_0, g'_0 les parties imaginaires et réelles de g, h, g'

$$(51)\quad g' = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)}\,\frac{1}{h}, \qquad -g'_1 = \frac{\varpi' n - \omega p}{2(cp^2 - n^2)}\,\frac{h_1}{h_0^2 + h_1^2}.$$

L'élimination de g' entre les deux équations (50) donne l'équation en h :

(52) $$h^4 + Mh^2 + cN^2 = 0;$$

étant posé

$$M = \frac{\varpi' cp - \varpi n}{cp^2 - n^2},$$

$$N = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)}.$$

En remplaçant h par $h_0 + ih_1$ et séparant le réel de l'imaginaire, on trouve :

$$h_0^4 + h_1^4 - 6h_0^2 h_1^2 + M(h_0^2 - h_1^2) + cN^2 = 0,$$
$$2h_0 h_1 (2h_0^2 - 2h_1^2 + M) = 0.$$

Si $h_0 h_1$ est $\gtrless 0$, on aura $-2(h_0^2 - h_1^2) = M$; substituons à M cette valeur dans la première des deux équations précédentes, nous trouvons

(53) $$(h_0^2 + h_1^2)^2 - cN^2 = 0.$$

Or la condition $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$ s'écrit, en y remplaçant g'_1 par sa valeur (51) et g_1 par cg'_1,

(54) $$(h_0^2 + h_1^2)^2 - cN^2 < 0,$$

ce qui est en contradiction avec (53). Il faut donc que $h_0 h_1 = 0$, et comme h_1 ne peut être nul, puisque g_1 et g'_1 le seraient aussi (51), on a

$$h_0 = 0,$$

et l'équation (52), donne

(55) $$h_1^4 - Mh_1^2 + cN^2 = 0.$$

Cette équation doit avoir au moins une racine réelle, telle que $h_1^4 - cN^2$ soit négatif (54); il en résulte que l'*équation* (55) *en* h_1^2 doit avoir ses deux racines réelles et positives (car leur produit est positif); cela implique

(56) $$M > 0, \qquad M^2 - 4cN^2 > 0.$$

S'il en est ainsi, la plus petite racine de l'équation en h_1^2 est positive

et inférieure à $\sqrt{cN^2}$, puisque le produit des deux racines est cN^2; donc, si h_1^2 est cette plus petite racine, $h_1^4 - cN^2$ sera < 0.

Inversement, on reconnaît que les conditions (56), qui sont nécessaires, sont suffisantes, et *voici le résultat final, traduit géométriquement :*

227. Les périodes de multiplication complexe, dans le cas où elles vérifient une relation singulière d'invariant pair, non carré parfait, et deux autres relations non singulières, sont déterminées par des équations réductibles aux formes

$$g = cg',$$
$$cpg'^2 + 2ng'h + ph^2 + qg' + rh + s = 0,$$
$$cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + crg' + qh + s' = 0;$$

les n, p, q, r, s, s' sont des entiers; c est un entier positif. Les deux dernières équations représentent, en h et g', deux coniques concentriques; il faut que ces coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les deux cordes communes qui passent par le centre soient réelles.

S'il en est ainsi, l'élimination de g' entre les deux dernières équations donne pour h une équation du quatrième ordre; les deux racines imaginaires conjuguées pour lesquelles la partie imaginaire est la plus petite, en valeur absolue, conviennent et conviennent seules au problème; g' et g se déterminent ensuite sans ambiguïté en fonction de h.

Quant aux multiplications complexes qui correspondent à ces périodes, leurs entiers caractéristiques sont définis par les formules (49).

Deuxième hypothèse : *Invariant impair.*

228. La relation singulière entre g, h et g' peut être supposée de la forme

$$g = h + cg' \qquad (c > 0),$$

c étant > 0 pour que l'invariant $1 + 4c$ soit supérieur à 1.

Remplaçons g par cette valeur dans les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe; celles-ci

deviennent

$$\text{(A)}\qquad c^2a_3g'^2+[2a_3c+ca_2+cb_3]hg'+(a_3+b_3+a_2+b_2)h^2 \\ +c(a_0-d_3)g'+(b_0-d_2+a_0-d_3)h-d_0=0,$$

$$\text{(B)}\qquad ca_2g'^2+[ca_3+a_2+b_2]hg'+(a_3+b_3)h^2 \\ +(ca_1-d_2)g'+(b_1-d_3+a_1)h-d_1=0.$$

$$\text{(C)}\qquad cb_3g'^2+[ca_3+b_3+b_2]hg'+(a_3+a_2)h^2 \\ +(b_0-cc_3)g'+(a_0-c_2-c_3)h-c_0=0,$$

$$\text{(D)}\qquad b_2g'^2+[b_3+a_2]hg'+a_3h^2 \\ +(b_1-c_2)g'+(a_1-c_3)h-c_1=0.$$

Comme dans le cas précédent, les premiers membres de (B) et de (C) doivent être identiques, ce qui donne

$$(57)\qquad \begin{cases} a_2=b_3, & b_0+d_2=c(a_1+c_3), \\ b_1+c_2+c_3=a_0-a_1+d_3, & c_0=d_1. \end{cases}$$

Maintenant, en multipliant les premiers membres de (A), (C), (D) par des constantes indéterminées et ajoutant à (A), on peut *toujours* faire en sorte que les termes du second ordre dans le résultat soient de la forme $h^2-hg'-cg'^2$, à un facteur près; comme

$$h^2-hg'-cg'^2=h^2-gg';$$

la relation qu'on obtient ainsi entre h et g' est singulière, et elle doit être, dès lors, une identité; cela revient à dire que les premiers membres de (A), (C), (D) ne sont pas linéairement distincts, ce qui exige l'évanouissement des déterminants du troisième ordre compris dans la matrice

$$\begin{matrix} b_2 & 2b_3 & a_3 & b_1-c_2 & a_1-c_3 & c_1, \\ c^2a_3 & 2c(a_3+b_3) & a_3+2b_3+b_2 & c(a_0-d_3) & b_0-d_2+a_0-d_3 & d_0, \\ cb_3 & ca_3+b_2+b_3 & a_3+b_3 & ca_1-d_2 & b_1-d_3+a_1 & d_1. \end{matrix}$$

Or, le premier de ces déterminants développé donne

$$(ca_3-b_2-b_3)[(b_2+ca_3)^2+(b_2+ca_3)(a_3+2b_3)-c(a_3+2b_2)^2]=0.$$

La quantité entre crochets ne peut être nulle, à moins que b_2+ca_3 et a_3+2b_3 ne soient nuls à la fois : le discriminant $1+4c$ n'est pas en effet un carré parfait, puisqu'on a exclu le cas elliptique,

Mais si $b_2 + ca_3 = a_3 + 2b_3 = 0$, on reconnaît de suite que dans les relations (A), (B) et (D) les termes du plus haut degré sont

$$2cb_3(h^2 - hg' - cg'^2), \quad -b_3(h^2 - hg' - cg'^2) \quad \text{et} \quad -2b_3(h^2 - hg' - cg'^2),$$

c'est-à-dire que ces relations seraient singulières, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que

$$(58) \qquad ca_3 = b_2 + b_3.$$

En tenant compte de cette relation, la matrice devient

$$\begin{matrix} ca_3 - b_3 & b_3 & b_1 - c_2 & a_1 - c_3 & c_1, \\ c^2 a_3 & c(a_3 + b_3) & c(a_0 - d_3) & b_0 - d_2 + a_0 - d_3 & d_0, \\ cb_3 & ca_3 & ca_1 - d_2 & b_1 - d_3 + a_1 & d_1, \end{matrix}$$

ce qui donne d'abord

$$(b_1 - c_2)c^2[ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2] + c^2(a_0 - d_3)[-ca_3^2 + a_3 b_3 + b_3^2] \\ + (ca_1 - d_2)c[ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2] = 0.$$

Le facteur $ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2$ ne peut s'annuler, puisque $1 + 4c$ n'est pas carré parfait et que d'ailleurs si a_2, a_3, b_2, b_3 étaient nuls à la fois, les équations (A), (B), (C), (D) seraient singulières; il reste donc

$$c(b_1 - c_3 - a_0 + d_3) + ca_1 - d_2 = 0.$$

On trouve de même

$$c(a_1 - c_3) - b_0 + d_2 - a_0 + b_1 + a_1 = 0, \\ cc_1 - d_0 + d_1 = 0.$$

En utilisant (57) et (58), on obtient toutes les relations entre les a_i, b_i, c_i, d_i sous la forme :

$$(59) \qquad \left\{ \begin{matrix} b_2 + b_3 = ca_3, & b_0 = ca_1, & d_2 = cc_3, \\ a_2 = b_3, & b_1 = a_0 - a_1, & d_3 = c_2 + c_3, \\ & & d_1 = c_0, \\ & & d_0 = c_0 + cc_1. \end{matrix} \right.$$

229. Il ne subsiste maintenant, entre h et g', que les équations (C)

et (D), qui s'écrivent en tenant compte de (59),

$$(60)\qquad cb_3 g'^2 + 2ca_3 hg' + (a_3 + b_3) h^2 + c(a_1 - c_3) g' + (a_0 - c_2 - c_3) h - c_0 = 0,$$

$$(61)\qquad (ca_3 - b_3) g'^2 + 2b_3 hg' + a_3 h^2 + (a_0 - a_1 - c_2) g' + (a_1 - c_3) h - c_1 = 0.$$

On peut dire que h et g' sont définis par deux équations *à coefficients entiers* de la forme

$$(62)\qquad cng'^2 + 2cphg' + (n + p) h^2 + crg' + (q + r) h + s = 0,$$

$$(63)\qquad (cp - n) g'^2 + 2nhg' + ph^2 + qg' + rh + s' = 0;$$

n et p ne peuvent être nuls à la fois, sinon ces équations seraient singulières.

Pour trouver toutes les multiplications complexes correspondantes, il faut écrire que les équations (60) et (61) sont des conséquences de (62) et (63); on obtient ainsi les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i sous la forme

$$(64)\qquad \begin{cases} a_0 = c_2 + c_3 + \lambda_2(q + r + cr) + \mu_2(q + r), \\ a_1 = c_3 + \lambda_2(q + r) + \mu_2 r, \\ a_2 = \lambda_2 cp + \mu_2 n, \\ a_3 = \lambda_2(n + p) + \mu_2 p, \\ b_0 = cc_3 + \lambda_2 c(q + r) + \mu_2 cr, \\ b_1 = c_2 + \lambda_2 cr + \mu_2 q, \\ b_2 = \lambda_2 cn + \mu_2(cp - n), \\ b_3 = \lambda_2 cp + \mu_2 n, \\ -c_0 = \lambda_2(s + cs') + \mu_2 s, \\ -c_1 = \lambda_2 s + \mu_2 s', \\ c_2 = c_2, \\ c_3 = c_3, \\ -d_0 = \lambda_2(s + cs + cs') + \mu_2(s + cs'), \\ -d_1 = \lambda_2(s + cs') + \mu_2 s, \\ d_2 = cc_3, \\ d_3 = c_2 + c_3. \end{cases}$$

Dans ces formules c_2 et c_3 sont deux entiers arbitraires; λ_2 et μ_2, également arbitraires, sont des entiers, ou des fractions choisies de telle sorte que les a_i, b_i, c_i, d_i soient entiers.

Enfin, on établit, comme dans le cas précédent, les conditions néces-

saires et suffisantes pour que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif, et le *résultat est celui-ci :*

230. Les périodes de multiplication complexe, dans le cas où elles vérifient une relation singulière d'invariant impair non carré parfait, et deux autres relations non singulières, sont déterminées par des équations réductibles aux formes

$$\begin{gathered} g = h + cg', \\ cng'^2 + 2cphg' + (n+p)h^2 + crg' + (q+r)h + s = 0, \\ (cp-n)g'^2 + 2nhg' + ph^2 + qg' + rh + s' = 0; \end{gathered}$$

les $n, p, q, \ldots, s'$ sont des entiers; c est un entier positif. Les deux dernières équations représentent, en h et g', deux coniques concentriques; il faut que ces coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les deux cordes communes qui passent par le centre soient réelles.

S'il en est ainsi, l'élimination de g' entre les deux dernières équations donne pour h une équation du quatrième ordre; les deux racines imaginaires conjuguées pour lesquelles la partie imaginaire est la plus petite en valeur absolue conviennent et conviennent seules au problème; g et g' se déterminent ensuite sans ambiguïté en fonction de h.

Quant aux multiplications complexes qui correspondent à ces périodes, leurs entiers caractéristiques sont définis par les formules (64).

QUATRIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES EN ELLES-MÊMES.

---

231. Le problème de déterminer, parmi toutes les surfaces hyperelliptiques dont chaque point répond à un seul couple d'arguments aux périodes près, celles qui possèdent des transformations birationnelles en elles-mêmes, et de former toutes ces transformations, revient à chercher les multiplications complexes de degré *un*.

Désignons, en effet, par U, V le point qui répond, dans une telle transformation au point u, v; comme du, dv, dU, dV sont des différentielles de première espèce et qu'il n'existe que deux différentielles de cette nature, dU et dV sont linéaires en du et dv, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} U &= \lambda\, u + \mu\, v + \text{const.}, \\ V &= \lambda' u + \mu' v + \text{const.} \end{aligned}$$

Négligeons les constantes, que nous réintroduirons ensuite; on voit bien que l'on est ramené à chercher toutes les multiplications complexes qui font correspondre à un point U, V *un seul point* u, v.

Distinguons maintenant deux cas, selon que la transformation en question est ordinaire ou non.

232. *Transformations ordinaires.* — Si (u, v) et (U, V) désignent les deux points de la surface transformés l'un de l'autre et si $\mathfrak{S}(u, v)$ est une fonction thêta paire du premier ordre, lorsque le point u, v décrira une courbe $\mathfrak{S}(u+\alpha, v+\beta) = 0$, le point U, V décrira une courbe analogue $\mathfrak{S}(U+\alpha', V+\beta') = 0$; une transformation ordinaire du premier ordre change, en effet, une fonction thêta d'ordre *un* en une fonction semblable. En augmentant U et V de constantes convenables on peut faire en sorte que les deux courbes coïncident, et par suite la courbe $\mathfrak{S}(u+\alpha, v+\beta) = 0$ admettra une transformation birationnelle en elle-même.

Or, cette courbe est une courbe de genre *deux*, donc hyperelliptique; elle a les modules de la surface et n'admet, *en général*, que deux transformations birationnelles, à savoir la transformation unité et celle qui fait correspondre à un point son conjugué hyperelliptique; sur la surface ces transformations sont (¹) :

$$U = u, \qquad V = v$$

et

$$U = -2\alpha - u, \qquad V = -2\beta - v.$$

Elles sont comprises dans les formules

$$(1) \qquad U = \varepsilon u + \text{const.}, \qquad V = \varepsilon v + \text{const.} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

(¹) *Voir* par exemple à ce sujet notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX, de ce Journal, 4ᵉ série, p. 422.

qui donnent les transformations birationnelles évidentes de la surface en elle-même.

Mais il peut se faire que la courbe de genre *deux* possède *d'autres transformations univoques* que les précédentes; pour les trouver, prenons cette courbe sous la forme

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_6).$$

Soit X, Y le point transformé de x, y : les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe se transformeront évidemment les unes dans les autres, de sorte que l'on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{\sqrt{(X - a_1)\ldots(X - a_6)}} = \dfrac{\alpha x + \beta}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}\,dx, \\[2ex] \dfrac{X\,dX}{\sqrt{(X - a_1)\ldots(X - a_6)}} = \dfrac{\alpha' x + \beta'}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}\,dx, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ étant des constantes. On en tire

$$X = \frac{\alpha' x + \beta'}{\alpha x + \beta}, \qquad dX = k\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2},$$

et en portant ces valeurs de X et dX dans (2), il vient

$$\frac{k}{\sqrt{[\alpha' x + \beta' - a_1(\alpha x + \beta)]\ldots}} = \frac{1}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}.$$

En d'autres termes, la forme sextique $(X - a_1 Z)\ldots(X - a_6 Z)$ se réduit, à un facteur constant près, à la forme $(x - a_1 z)\ldots(x - a_6 z)$ par la substitution

$$X = \alpha' x + \beta' z, \qquad Z = \alpha x + \beta z.$$

Le problème revient donc à chercher toutes les formes binaires sextiques admettant une transformation linéaire en elles-mêmes autre que $X = \pm x$, $Z = \pm z$; la solution en est connue ([1]), les formes correspondantes sont au nombre de six :

1° $$Ax^6 + Bx^4 z^2 + Cx^2 z^4 + Dz^6.$$

([1]) *Voir*, par exemple, un Mémoire de M. O. Bolza dans l'*American Journal of Mathematics*, t. X, p. 50.

La surface de Kummer correspondant à cette forme est le *tétraédroïde de Cayley*.

2°
$$xz(Ax^4 + Bx^2z^2 + Cz^4).$$

La surface de Kummer correspondante est *deux fois tétraédroïde*.

3°
$$Ax^6 + Bx^3z^3 + Cz^6.$$

La surface de Kummer correspondante est *trois fois tétraédroïde*.

4°
$$x^6 + z^6.$$

La surface de Kummer correspondante est *quatre fois tétraédroïde*.

5°
$$xz(x^4 + z^4).$$

La surface de Kummer correspondante est *six fois tétraédroïde* (¹).

6°
$$z(x^5 + z^5).$$

L'expression des périodes correspondant aux cinq premiers cas est bien connue; on a : dans le premier cas,
$$g = g';$$
dans le deuxième cas,
$$h = \frac{1}{2}, \qquad g = g';$$
dans le troisième cas,
$$g = g' = 2h;$$
dans le quatrième cas,
$$g = g' = 2h = \frac{2i}{\sqrt{3}};$$
dans le cinquième cas,
$$g = g' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{2}), \qquad h = \frac{1}{2}.$$

Dans les trois premiers cas, il n'y a entre les périodes que des relations singulières; dans les deux autres, on peut définir les périodes respectivement par les équations
$$g = g' = 2h, \qquad h^2 - gg' = 1,$$
$$g = g', \qquad 2h = 1, \qquad h^2 - gg' + g - 1 = 0,$$
qui sont encore des relations singulières.

(¹) *Voir*, à ce sujet, un travail de M. Hutchinson.

On en déduira toutes les transformations univoques cherchées par les formules qui vont être données (n°s 235, 237, 240).

Le sixième cas est plus intéressant et compliqué; nous le traiterons complètement à la fin de ce travail.

233. Ainsi, *les surfaces hyperelliptiques possédant des transformations birationnelles ordinaires en elles-mêmes (autres que les transformations évidentes) sont celles qui dérivent des radicaux portant sur les polynomes*

$$Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D, \qquad x(Ax^4 + Bx^2 + C),$$
$$Ax^6 + Bx^3 + C, \qquad x^6 + 1, \qquad x(x^4 + 1), \qquad x^5 + 1.$$

234. *Transformations singulières.* — Il reste à faire la même étude pour les transformations *singulières*, ce qui revient à la recherche des multiplications complexes singulières de degré *un;* nous examinerons successivement les cinq cas de multiplication.

235. *Surfaces simplement singulières.* — Les périodes étant liées *uniquement* par une relation singulière,

$$g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

les multiplications complexes, *singulières ou non,* sont, à une constante additive près, données par les formules (n° 193)

$$\text{(3)} \qquad U = \rho u - \gamma\sigma v, \qquad V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v.$$

Le degré δ' étant

$$\delta' = (\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2)^2,$$

la transformation (3) sera birationnelle si les entiers ρ et σ sont tels que

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Dans le cas non elliptique, c'est-à-dire si $\beta^2 - 4\gamma$ n'est pas carré, cette équation, avec le second membre $+1$, a toujours des solutions autres que $\rho = \pm 1$, $\sigma = 0$; pour qu'elle en ait si l'on prend -1, il faut et il suffit que la forme $X^2 - (\beta^2 - 4\gamma) Y^2$ puisse représenter -4 (n° 179). Dans les deux cas, il résulte des n°s 169 et 180 que toutes les transformations (3) sont des puissances d'une seule d'entre elles, combinées avec la transformation $U = -u$, $V = -v$.

Donc, *toutes les transformations birationnelles, ordinaires ou singulières, d'une surface hyperelliptique simplement singulière, en elle-même, s'obtiennent en combinant une même transformation du type* (3), *et ses puissances, avec les transformations*

$$U = \varepsilon u + \text{const.}, \qquad V = \varepsilon v + \text{const.} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si la surface est une surface de Kummer à un point de laquelle correspondent les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$, les transformations birationnelles précédentes se réduisent aux puissances d'une seule d'entre elles et forment un groupe *évidemment infini*. C'est là le premier exemple qui ait été donné de surface admettant un groupe infini et discontinu de transformations birationnelles sans admettre de transformations continues; je l'ai indiqué incidemment dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du premier semestre de 1898; M. Painlevé a fait connaître ensuite, dans le même Recueil, un exemple encore plus simple, qui correspond à un cas de dégénérescence des fonctions abéliennes en fonctions elliptiques.

236. *Remarque.* — Les transformations (3) sont, en général, singulières, car l'indice correspondant, K, est (n° 193) $\sigma(2\rho + \beta\sigma)$ et ne peut être nul que pour $\sigma = 0$ et $2\rho + \beta\sigma = 0$.

Si $\sigma = 0$, la relation $\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1$ donne $\rho = \pm 1$, et l'on retombe sur la transformation $U = \pm u$, $V = \pm v$; si $2\rho + \beta\sigma = 0$, la même relation, écrite $(2\rho + \beta\sigma)^2 - (\beta^2 - 4\gamma)\sigma^2 = \pm 4$, montre que l'invariant, $\beta^2 - 4\gamma$, qui est essentiellement positif et supérieur à 1, doit être égal à 4, ce qui répond au cas elliptique du tétraédroïde.

En supposant, par exemple, comme on en a le droit, que la relation singulière correspondante soit $g - g' = 0$, on trouve la transformation *ordinaire*

$$U = v, \qquad V = u.$$

On devait effectivement rencontrer une telle transformation (n° 232). En dehors de l'invariant 4, les surfaces simplement elliptiques n'ont pas de transformations birationnelles en elles-mêmes autres que les transformations évidentes : car, si $\beta^2 - 4\gamma$ est carré parfait, la forme $\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2$ ne peut représenter $+1$ que pour $\sigma = 0$, $\rho = \pm 1$, et elle ne peut représenter -1 que si $\beta^2 - 4\gamma = 4$, avec $2\rho + \beta\sigma = 0$; $\sigma = \pm 1$.

237. *Surfaces doublement singulières.* — Les périodes étant liées uniquement par deux relations singulières réductibles (n° 195) aux formes

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega,$$

les transformations birationnelles en elles-mêmes, *ordinaires ou singulières*, de la surface correspondante sont données par les formules du n° 200

$$(4) \qquad \begin{cases} U = u[\theta \quad + \alpha\sigma g + (\beta\sigma - \tau)h \,] + v[\quad - \gamma\rho + \tau g + \gamma\sigma h \,], \\ V = u[\alpha\rho + \alpha\sigma h + (\beta\sigma - \tau)g'] + v[\theta + \beta\rho + \tau h + \gamma\sigma g'], \end{cases}$$

où θ, σ, ρ, τ sont des entiers arbitraires, tels seulement que le degré de la multiplication soit l'unité, c'est-à-dire (n° 202) que

$$\theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 - \alpha\gamma\, d\sigma^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) = \pm 1.$$

Cette équation, si l'on pose, comme au n° 208,

$$(5) \qquad \xi = 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma, \qquad \eta = 2\tau - \beta\sigma, \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma,$$

s'écrit

$$(6) \qquad \xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2 = \pm 4.$$

On est ainsi ramené à la résolution en nombres entiers d'une équation évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de ξ, η, ρ, σ; car, par exemple, elle se réduit à une équation de Pell pour $\eta = \sigma = 0$, si l'on prend $+4$ au second membre.

Nous n'en connaissons pas la solution générale; les résultats du n° 208 montrent que, si l'on en a deux solutions ξ, η, ρ, σ et ξ', η', ρ', σ', on en obtiendra une troisième ξ'', η'', ρ'', σ'' par les formules (31) de ce numéro.

238. *Remarque I.* — Parmi les transformations précédentes, celles qui sont ordinaires rentrent dans l'un des deux cas (n° 203),

$$\rho = \eta = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi = \sigma = 0;$$

on reconnait aisément qu'elles correspondent à des cas elliptiques de tétraédroïde, comme cela doit être (n° 232).

239. *Remarque II.* — Les multiplications qui répondent à

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0,$$

c'est-à-dire à $\xi = 0$, ont été rencontrées au n° 205. Pour qu'il en existe de degré un, il faut que l'équation

$$(7) \qquad -d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2 = \pm 4$$

ait des solutions entières en η, ρ, σ, telles que $\eta + \beta\sigma$ soit pair; alors on voit de suite que $\beta\rho + \omega\sigma$ est également pair, et les équations (5) où $\xi = 0$, donnent des valeurs entières pour θ et τ.

Le carré d'une de ces multiplications (n° 209) est la multiplication ordinaire

$$U = \varepsilon u, \qquad V = \varepsilon v,$$

ε étant ± 1 selon que le second membre de (7) a été ∓ 4.

Il en résulte que si l'équation (7) a des solutions entières de la nature indiquée, le second membre étant égal à -4, le carré de la transformation birationnelle correspondante (4) sera la transformation unité, c'est-à-dire que la transformation birationnelle est *involutive*.

Sur la surface de Kummer, où un même point répond aux arguments u, v et $-u$, $-v$, on a aussi des transformations involutives en prenant le second membre de (7) égal à $+4$.

240. *Surfaces triplement singulières.* — Elles possèdent également des transformations birationnelles qu'il serait aisé de trouver *toutes*, en suivant la même marche que dans le cas précédent.

241. *Autres surfaces possédant des multiplications complexes.* — Ce sont celles qui correspondent au quatrième et au cinquième cas de multiplication complexe; *il n'y a entre les périodes qu'une seule relation singulière*, et une ou deux autres non singulières; nous traiterons simultanément tous ces cas par une méthode différente de celle qui précède.

Soit $g + \beta h + \gamma g' = 0$ la relation singulière unique qui lie les périodes; considérons une transformation birationnelle de la surface en elle-même

$$(\text{T}) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

c'est-à-dire une transformation de *degré* un, conduisant des périodes g, h, g' aux mêmes périodes. Si l et k sont ses deux indices, on aura

(8) $$l^2+\beta kl+\gamma k^2=+1.$$

Effectuons maintenant deux fois de suite la transformation T; nous obtenons une transformation T^2, et pour ses indices L et K, les formules (29) et (30) du n° 148, où l'on fait

$$l_1=l, \qquad k_1=k, \qquad B_1=B=\beta, \qquad \Delta=\Delta_1=\beta^2-4\gamma,$$

donnent

$$2K=k(2l+\beta k)+\varepsilon_1 k\,(2l+\beta k),$$
$$2(2L+\beta K)=(2l+\beta k)^2+\varepsilon_1 k^2(\beta^2-4\gamma),$$

ε_1 étant ± 1, selon que T est droite ou gauche.

On trouve ainsi, pour $\varepsilon=+1$

$$K=k(2l+\beta k),$$
$$L=l^2-\gamma k^2;$$

pour $\varepsilon=-1$

$$K_1=0,$$
$$L_1=1,$$

en tenant compte de (8). On vérifie également que

(9) $$L^2+\beta KL+\gamma K^2=+1.$$

242. Plaçons-nous d'abord dans le cas de $\varepsilon=+1$, et supposons, pour fixer les idées, que la partie imaginaire, g_1, de g soit positive; les fonctions intermédiaires singulières d'indices L et K sont celles qui vérifient

$$\varphi(u+1,v)=\varphi(u,v+1)=\varphi(u,v),$$
$$\varphi(u+g,v+h)=\varphi(u,v)e^{2\pi i[-Lu+\gamma Kv]+\nu},$$
$$\varphi(u+h,v+g')=\varphi(u,v)e^{2\pi i[-Ku-(L+\beta K)v]+\nu'}.$$

En vertu de (9), pour ν et ν' donnés, elles se réduisent (I, n° 28) à une seule d'entre elles, $\varphi(u,v)$, à un facteur constant près. Pour d'autres valeurs de ν et ν', les fonctions intermédiaires d'indices L et K se réduisent évidemment (à un facteur près) à $\varphi(u+c,v+c')$, les constantes c et c' étant convenablement choisies.

Cela posé, soit $\Im(u,v)$ une fonction thêta, d'ordre un, paire; lorsque U, V décrit, sur la surface considérée, la courbe $\Im(U+c,V+c')=0$,

le point u, v *qui lui correspond univoquement par* T^2, décrit (n° 164) la courbe $\varphi(u+c_1, v+c'_1)=0$; et réciproquement, si u, v décrit $\varphi(u+c_1, v+c'_1)=0$, c_1 et c'_1 étant des constantes quelconques, U, V décrit $\mathfrak{S}(U+c, V+c')=0$.

Considérons maintenant la transformation de la surface en elle-même

$$(S)\qquad \begin{cases} U'=lu-\gamma kv, \\ V'=ku+(l+\beta k)v. \end{cases}$$

Elle est birationnelle (n° 235) en vertu de (8), et ses indices, calculés au n° 193, sont précisément L et K; d'après ce qui précède, si u, v décrit $\varphi(u+c_1, v+c'_1)=0$, le point U', V', qui lui correspond par S, décrira $\mathfrak{S}(U'+c_2, V'+c'_2)=0$.

Par suite la transformation T^2S^{-1} fait correspondre point par point les deux courbes

$$(10)\qquad \mathfrak{S}(U+c, V+c')=0, \qquad \mathfrak{S}(U'+c_2, V'+c'_2)=0;$$

elle est donc ordinaire et d'ordre 1, puisqu'elle fait correspondre, à une fonction thêta une fonction thêta de même ordre (n° 164).

En d'autres termes, *en dehors des six cas spéciaux signalés au n°* 232, la transformation T^2S^{-1} doit se réduire soit à la substitution unité, soit à la substitution qui ne fait que changer les signes des variables ([1]).

Sous une autre forme, la substitution T^2 doit être identique à la substitution

$$(11)\qquad \begin{cases} U=lu-\gamma kv, \\ V=ku+(l+\beta k)v, \end{cases}$$

ou à cette même substitution dans laquelle les signes de l et k seraient simultanément changés.

243. Supposons maintenant $\varepsilon=-1$; la transformation T^2, qui a pour indices $L_1=1$ et $K_1=0$, est *ordinaire;* si donc l'on exclut encore les six cas du n° 232, T^2 devra se réduire à la substitution unité ou à la substitution $U=-u$, $V=-v$ ([2]).

([1]) Si l'on est dans un des six cas spéciaux, T^2S^{-1} devra se réduire à une des transformations univoques *ordinaires* de la surface en elle-même.

([2]) Dans les six cas spéciaux, T^2 devra se réduire à une des transformations univoques *ordinaires* de la surface en elle-même.

244. Exprimons d'abord que T^2 est identique à (11); on a, en partant de (T),

$$(12)\quad \begin{cases} l = \lambda^2 + \mu\lambda', & k = \lambda'(\lambda + \mu'), \\ -\gamma k = \mu(\lambda + \mu'), & l + \beta k = \mu'^2 + \mu\lambda'. \end{cases}$$

La quantité k est $\gtrless 0$, sinon la transformation (T) serait ordinaire, et l'on retomberait dans un des six cas exclus; alors λ' est aussi $\gtrless 0$, et les équations (12) donnent

$$\lambda = \frac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'},$$

$$\mu = -\gamma\lambda',$$

$$\mu' = \frac{k + \beta\lambda'^2}{2\lambda'}.$$

Quant à λ', il satisfait à l'équation bicarrée

$$(13)\quad \lambda'^4(\beta^2 - 4\gamma) - 2\lambda'^2(2l + \beta k) + k^2 = 0,$$

qui donne, à cause de (8),

$$(14)\quad \lambda'^2 = \frac{2l + \beta k \pm 2}{\beta^2 - 4\gamma}.$$

La transformation (T) est ainsi

$$(T)\quad \begin{cases} U = \dfrac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'} u - \gamma\lambda' v, \\ V = \lambda' u + \dfrac{k + \beta\lambda'^2}{2\lambda'} v, \end{cases}$$

λ' étant défini par (14).

Écrivons que c'est une transformation faisant correspondre à u, v un seul point U, V; nous avons en particulier (n° 137), les a_i étant des entiers,

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'} = a_0 + a_3 g + a_2 h, \\ \lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g', \end{cases}$$

d'où

$$\frac{k - \beta\lambda'^2}{2\lambda'^2} = \frac{a_0 + a_3 g + a_2 h}{a_1 + a_3 h + a_2 g'}.$$

Comme λ'^2 est une fraction (14), c'est là une relation singulière entre g, h, g', qui doit être une conséquence de $g + \beta h + \gamma g' = 0$, ce

qui donne en particulier

$$a_2(\beta\lambda'^2 - k) = a_3 2\gamma\lambda'^2,$$
$$a_2 2\lambda'^2 \qquad = a_3(\beta\lambda'^2 + k).$$

On en conclut que $a_2 = a_3 = 0$, car le déterminant $\lambda'^4(\beta^2 - 4\gamma) - k^2$ ne peut être nul.

S'il était nul, en effet, on aurait par (13)

$$\lambda'^2(2l + \beta k) = k^2,$$

et en écrivant que

$$\lambda'^4(\beta^2 - 4\gamma) = k^2,$$

on trouverait

$$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 0,$$

résultat contradictoire avec l'hypothèse (8).

Alors, a_2 et a_3 étant nuls, les équations (15) montrent que λ' et $\frac{1}{2\lambda'}(k - \beta\lambda'^2)$ sont entiers; en appelant ρ cette dernière quantité, la transformation (T) s'écrit

$$U = \rho u - \gamma\lambda' v,$$
$$V = \lambda' u + (\rho + \beta\lambda')v,$$

λ' et ρ étant des entiers. On vérifie de plus, en tenant compte de (8) et (14), que

$$\rho^2 + \beta\lambda'\rho + \gamma\lambda'^2 = \pm 1.$$

Dans ces conditions, (T) est une des transformations connues qui dérivent de l'existence de la relation singulière $g + \beta h + \gamma g' = 0$ (n° 235), et la surface considérée n'admet pas d'autres transformations univoques.

245. Il reste maintenant à reconnaître si T^2 peut être identique à la substitution $U = \varepsilon u$, $V = \varepsilon v$, $(\varepsilon = \pm 1)$; il faut pour cela que

$$\varepsilon = \lambda^2 + \mu\lambda', \qquad 0 = \lambda'(\lambda + \mu'),$$
$$0 = \mu(\lambda + \mu'), \qquad \varepsilon = \mu'^2 + \mu\lambda'.$$

De là deux hypothèses :

1° $\qquad \mu = \lambda' = 0; \qquad$ d'où $\qquad \lambda^2 = \mu'^2 = \varepsilon;$

la transformation (T) serait alors

$$U = \pm u, \qquad V = \pm v,$$

ou

$$U = \pm iu, \qquad V = \pm iv.$$

Dans ce dernier cas, il faut, pour qu'à un point u, v corresponde un seul point U, V, que

$$i = a_0 + a_3 g + a_2 h, \qquad 0 = a_1 + a_3 h + a_2 g',$$

les a étant entiers; comme il n'y a pas de relation singulière entre h et g' seuls, $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ et a_0, égal à i, ne peut être entier. On ne trouve donc, dans cette hypothèse, que les transformations évidentes $U = \pm u$, $V = \pm v$.

2° $$\lambda + \mu' = 0, \qquad \lambda^2 + \mu\lambda' = \varepsilon.$$

Alors les relations

$$\lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h, \qquad \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h,$$
$$\lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g', \qquad -\lambda = b_1 + b_3 h + b_3 g',$$

donnent

$$a_0 + b_1 + a_3 g + h(a_2 + b_3) + b_2 g' = 0.$$

Il suffit maintenant de se reporter aux équations (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe et aux formes (7) du n° 189, pour reconnaître que, grâce à cette relation, (A), (B), (C), (D) deviennent singulières; en d'autres termes, la transformation considérée n'implique entre les périodes que des relations singulières, et comme g, h, g' ne sont supposées liées que par une relation de cette nature, la transformation (T) en dérive.

246. La conclusion de toute cette analyse est la suivante :

Dans le cas de multiplication complexe où les périodes sont liées par une relation singulière et une ou deux autres non singulières, les surfaces hyperelliptiques correspondantes ne possèdent pas d'autres transformations univoques en elles-mêmes que celles dérivant de la relation singulière et étudiées au n° 235.

Il faut y joindre naturellement les transformations habituelles

$$U = \pm u + c, \qquad V = \pm v + c'.$$

Les seuls cas d'exception possibles sont les six cas du n° 232, qui ont été explicitement réservés aux n°s 242, 243 et 244; les cinq premiers n'impliquent entre les périodes que des relations singulières et sont compris dans les formules générales des n°s 235, 237 et 240; il reste seulement à examiner le sixième, et tout d'abord à reconnaître quelles relations il suppose entre les périodes.

Étude du cas hyperelliptique dérivé du radical $\sqrt{x^5+1}$.

247. On trouve aisément pour les périodes, en posant

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

les valeurs

$$g = \omega^2 - \omega^3, \qquad h = -(1+\omega^2), \qquad g' = -\omega^4, \qquad h^2 - gg' = -\omega^3;$$

d'où la relation singulière d'invariant *cinq*

$$h^2 - gg' - g - h - 1 = 0.$$

Faisons sur les périodes la transformation ordinaire du premier ordre définie par

$$a_3 = b_1 = c_2 = -d_0 = 1,$$

tous les autres a_i, b_i, c_i, d_i étant nuls; on trouve, en appelant G, H, G' les périodes nouvelles

$$G = -\frac{1}{g}, \qquad H = -\frac{h}{g}, \qquad G' = -\frac{h^2 - gg'}{g},$$

liées par la relation

$$G + H - G' - 1 = 0.$$

Prenons pour périodes les quantités G, H, G' + 1 que nous désignerons par g', h, g — ces lettres n'ayant pas la même signification que plus haut — il vient

$$g = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^3}, \qquad h = \frac{1+\omega^2}{\omega^2 - \omega^3}, \qquad g' = \frac{-1}{\omega^2 - \omega^3},$$

avec

$$g = h + g'.$$

On vérifie ensuite que h et g' sont liés par les deux équations à

coefficients entiers

$$(16) \qquad \begin{cases} 2g'h + h^2 - g' - h = 0, \\ g'^2 + h^2 - h + 1 = 0; \end{cases}$$

elles sont du type du n° 230, où l'on aurait posé (puisque $c = 1$)

$$n = 0, \quad p = 1, \quad r = -1, \quad q = 0, \quad s = 0, \quad s' = 1.$$

Nous sommes donc placés dans le dernier cas de multiplication complexe, l'invariant de la relation singulière (ici 5) étant impair (et non carré).

248. Pour rechercher toutes les transformations univoques de la surface correspondante, on peut raisonner comme il suit :

Soit T l'une quelconque d'entre elles, d'indices l et k. Je dis que l'on peut trouver deux entiers ρ et σ, tels que

$$(17) \qquad l = \rho^2 - \gamma\sigma^2, \quad k = \sigma(2\rho + \beta\sigma), \quad \ldots. \quad (\beta = \gamma = -1).$$

Cela revient, en effet, à dire que la substitution

$$U = lu - \gamma k v,$$
$$V = ku + (l + \beta k) v,$$

où

$$l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = +1,$$

est le carré d'une substitution de même forme

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} U = \rho u + \gamma\sigma v \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v, \end{cases}$$

où

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma_2 = \pm 1.$$

Comme la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, ici $x^2 - xy - y^2$, peut représenter -1, la proposition a été établie au n° 180.

La transformation T change une fonction thêta d'ordre un,

$$\vartheta(U + c, V + c'),$$

en une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u + c_1, v + c'_1)$, d'indices l et k; la transformation (S) produit, en raison de (17), un changement analogue (n° 242). On en conclut, comme au n° 242, que TS^{-1} est une des transformations *ordinaires* de la surface en elle-même (en comprenant dans celles-ci $U = \pm u$, $V = \pm v$). En d'autres termes T est le

produit d'une transformation univoque ordinaire par S; d'ailleurs S, qui est, d'après sa forme même, une des transformations univoques dérivant de l'existence de la relation singulière $g - h - g' = 0$, est une puissance d'une certaine transformation Σ_1 (nº 235) de sorte que l'on obtient toutes les transformations birationnelles de la surface en elle-même en faisant suivre une transformation univoque ordinaire d'une puissance de Σ_1.

Cette transformation Σ_1 se trouve aisément, c'est

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} U = v, \\ V = u - v. \end{cases}$$

249. Cherchons maintenant les transformations *ordinaires* de degré un. A cet effet, reportons-nous au nº 229 qui donne les entiers caractéristiques des multiplications complexes dans le cas qui nous occupe; nous devons faire dans ces formules

$$n = 0, \quad p = 1, \quad r = -1, \quad q = 0, \quad s = 0, \quad s' = 1, \quad c = 1;$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0 &= c_2 + c_3 - 2\lambda_2 - \mu_2, & b_0 &= c_3 - \lambda_2 - \mu_2, \\ a_1 &= c_3 - \lambda_2 - \mu_2, & b_1 &= c_2 - \lambda_2, \\ a_2 &= \lambda_2, & b_2 &= \mu_2, \\ a_3 &= \lambda_2 + \mu_2, & b_3 &= \lambda_2. \\ -c_0 &= \lambda_2, & -d_0 &= \lambda_2 + \mu_2, \\ -c_1 &= \mu_2, & -d_1 &= \lambda_2, \\ c_2 &= c_2, & d_2 &= c_3, \\ c_3 &= c_3, & d_3 &= c_2 + c_3. \end{aligned}$$

Les c_2, c_3, λ_2, μ_2 sont des *entiers* arbitraires; il faut exprimer maintenant que la multiplication est ordinaire et de degré un; c'est-à-dire que ses indices l et k sont respectivement ± 1 et 0. Or, d'après la théorie générale de la transformation,

$$l = (ad)_{03} + (ad)_{12}, \qquad k = (ac)_{03} + (ac)_{12}.$$

On a ainsi

$$(18) \qquad \begin{cases} \pm 1 = 2c_3^2 + 2c_2c_3 + c_2^2 - c_3(3\lambda_2 + 2\mu_2) \\ \qquad\qquad - c_2(2\lambda_2 + \mu_2) + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_2\mu_2 + \mu_2^2, \\ 0 = c_3^2 + 2c_2c_3 - c_3(2\lambda_2 + 2\mu_2) - c_2(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2^2 + 2\lambda_2\mu_2. \end{cases}$$

Posons $2c_3 - \lambda_2 - \mu_2 = x$, $2c_2 - \lambda_2 = y$, retranchons les deux équations (18) membre à membre et conservons la seconde, il vient, ε désignant ± 1 :

$$4\varepsilon = x^2 + y^2 + 2\lambda_2^2 - 2\lambda_2\mu_2 + 3\mu_2^2,$$
$$0 = x^2 + 2xy + \lambda_2^2 + 4\lambda_2\mu_2 - \mu_2^2.$$

L'élimination de y donne en x l'équation bicarrée

$$5x^4 + 2x^2[5\lambda_2^2 + 5\mu_2^2 - 8\varepsilon] + (\lambda_2^2 + 4\lambda_2\mu_2 - \mu_2^2)^2 = 0.$$

L'équation en x^2 doit avoir ses racines réelles; leur produit étant > 0, la somme doit être > 0 pour qu'il y en ait au moins une positive; donc

$$5\lambda_2^2 + 5\mu_2^2 - 8\varepsilon < 0,$$

ce qui exige $\varepsilon = +1$, de plus λ_2 et μ_2 ne pourront prendre que les valeurs 0 et ± 1, et de telle sorte que $5(\lambda_2^2 + \mu_2^2)$ soit < 8. On a donc à envisager les hypothèses suivantes :

1° $\lambda_2 = \mu_2 = 0$; ce qui donne $x = 0$, $y = \pm 2$, $c_3 = 0$, $c_2 = \pm 1$, et la transformation correspondante est

$$U = \pm u, \qquad V = \pm v;$$

2° $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = \varepsilon$, d'où $x = \eta$, $y = 0$, en posant $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, et par suite $2c_3 = \varepsilon + \eta$, $c_2 = 0$. La transformation correspondante est

$$U = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon g\right] u + \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] v,$$
$$V = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] u + \varepsilon g' v;$$

3° $\lambda_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = 0$, d'où $x = \eta$, $y = -\eta$, $2c_3 = \varepsilon + \eta$, $2c_2 = \varepsilon - \eta$, et la transformation correspondante est

$$U = [\ -\varepsilon + \varepsilon g + \varepsilon h\ ]\, u + \left[\ \frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon g\right] v,$$
$$V = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h + \varepsilon g'\right] u + \left[-\frac{\eta + \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] v.$$

250. On vérifie sans difficulté que toutes ces équations donnent des transformations univoques, qui sont des puissances de la transfor-

mation

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} -\mathrm{U} = gu + h\,v, \\ -\mathrm{V} = hu + g'v, \end{cases}$$

combinées avec $\mathrm{U} = -u$, $\mathrm{V} = -v$. D'ailleurs la cinquième puissance de cette transformation est l'unité, comme on le reconnaît aisément : toutes ces vérifications se font en tenant compte des relations (16) entre g' et h et de $g = h + g'$.

En d'autres termes, les transformations ordinaires se réduisent à une transformation T, *de période cinq*, et à ses puissances T^2, T^3, T^4, combinées avec $\mathrm{U} = -u$, $\mathrm{V} = -v$; et finalement, en vertu du n° 248, si l'on désigne toujours par Σ_1 la substitution $\mathrm{U} = v$, $\mathrm{V} = u - v$, toutes les transformations birationnelles de la surface considérée en elle-même sont, au signe près, et à des constantes additives près, comprises dans la formule

$$\mathrm{T}^m \Sigma_1^n,$$

m et n étant entiers et m positif et plus petit que 5.

SUR

LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES

(Troisième Mémoire).

Journal de Mathématiques, 5e série, t. VII, 1901.

Les couples de périodes normales des fonctions abéliennes auxquelles conduit le problème d'inversion, appliqué à une courbe de genre deux, sont du type

$$(1,0);\quad (0,1);\quad (g,h);\quad (h,g');$$

et si g_1, h_1, g'_1 désignent les parties imaginaires de g, h, g', la quantité

$$h_1^2 - g_1 g'_1$$

est *essentiellement négative*.

Existe-t-il des fonctions uniformes de deux variables, admettant quatre couples de périodes du type précédent, *dans le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif ?*

Ce sujet se lie étroitement à la théorie des fonctions abéliennes singulières, qui a fait l'objet de deux Mémoires publiés dans ce Journal (5e série, t. V et VI) : les fonctions dont il s'agit d'entreprendre l'étude n'existent, en effet, que si g, h, g' vérifient une de ces relations qui caractérisent les fonctions abéliennes singulières

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E sont des entiers.

C'est pour cette raison que nous désignerons les fonctions à étudier sous le nom de *fonctions quadruplement périodiques singulières*, en gardant celui d'*abéliennes* pour les fonctions qui correspondent au cas de $h_1^2 - g_1 g'_1$ négatif.

La théorie de la *transformation* établit entre les deux classes de

fonctions un lieu plus intime encore : les transformations singulières *de degré négatif*, dont nous avons réservé explicitement l'étude, font passer d'un système de périodes pour lequel $h_1^2 - g_1 g_1'$ est négatif à un système analogue pour lequel $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif, et réciproquement; en d'autres termes, les fonctions abéliennes singulières et les fonctions quadruplement périodiques singulières se transforment ainsi les unes dans les autres.

Les divers paragraphes du présent Mémoire ont pour objets principaux :

1° La recherche des conditions d'existence des fonctions quadruplement périodiques singulières, et leur expression par des quotients de fonctions intermédiaires nouvelles;

2° La transformation de ces fonctions et les transformations de degré négatif des fonctions abéliennes singulières;

3° Les propriétés principales des nouvelles fonctions intermédiaires;

4° L'étude du cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est nul : je montre qu'il y a alors dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Nota. — Les numéros de ce Travail font suite à ceux de nos deux Mémoires précédents; pour indiquer un renvoi à un numéro du premier ou du second, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I ou II.

Existence et expression des fonctions quadruplement périodiques singulières.

251. Soit $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g') un système de périodes pour les variables u et v, avec la condition fondamentale

$$h_1^2 - g_1 g_1' > 0, \tag{1}$$

g_1, h_1, g_1' désignant les parties imaginaires de g, h, g'. Il résulte d'un beau théorème de M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII) que toute fonction uniforme $F(u, v)$ admettant les quatre paires de périodes précédentes, est le quotient de deux fonctions *entières* de u, v, appartenant à la classe des *fonctions intermédiaires*, c'est-à-dire se

reproduisant, multipliées par une exponentielle $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$ quand u et v augmentent d'une période.

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle, on peut déterminer les constantes a, b, c, d, f de manière que le produit obtenu, $\varphi(u, v)$, vérifie (I, n° 20) les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)e^{\theta u}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)e^{\lambda u+\mu v+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'}. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces relations ne sont compatibles que si

$$\theta = -2\pi i n,$$

n étant entier; de même la première et la seconde, combinées successivement avec les deux autres, donnent

$$\lambda = -2\pi i l; \qquad \lambda' = 2\pi i l';$$
$$\mu = 2\pi i(m - ng); \qquad \mu' = 2\pi i(m' - n'h),$$

l, m, l', m' étant entiers. Et, par la combinaison des deux dernières relations (2), on obtient

$$\lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h + 2\pi i q,$$

q étant entier. En y remplaçant λ, μ, λ', μ' par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$(3)\qquad l'g + (m'+l)h - mg' - n(h^2 - gg') + q = 0.$$

252. Si les entiers l', $m'+l$, m, n, q sont nuls à la fois, la relation (3) est satisfaite quels que soient g, h, g' : dans ce cas, les quantités θ, μ, λ', qui figurent dans les équations (2), sont nulles; λ et μ' sont égaux à $-2\pi i l$, et dès lors ces équations (2) sont du type de celles qui caractérisent les fonctions thêta de u, v, formées avec les périodes (1, 0); (0, 1); (g, h); (h, g'). Mais cette conclusion est inadmissible, car les séries thêta, construites avec ces périodes, sont divergentes à cause de l'inégalité fondamentale (1): $h_1^2 - g_1 g'_1 > 0$.

Il est donc nécessaire, pour l'existence de fonctions $\varphi(u, v)$ vérifiant les relations (2), que les coefficients numériques dans l'équation (3) ne soient pas nuls simultanément, c'est-à-dire que les quantités g, h, g',

$h^2 - gg'$ doivent être liées par une relation linéaire à coefficients entiers : c'est ce que j'ai appelé, dans les Mémoires I et II, une *relation singulière* entre les périodes.

253. Soit alors

$$(4) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

cette relation, les entiers A, B, ..., E étant supposés sans diviseur commun. En écrivant que le premier membre de (3) est identique à celui de (4), multiplié par un facteur entier, $-k$, on trouve

$$l' = -Ak; \quad m' + l = -Bk; \quad m = Ck; \quad n = Dk; \quad q = -Ek,$$

de sorte que les relations (2) deviennent

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i Dku}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[lu-(C-Dg)kv]+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2i\pi[Aku+(l+Bk+Dkh)v]+\nu'}. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\varphi(u, v)$ est donc ce que j'ai appelé (II, n° 163) une *fonction intermédiaire singulière*, formée avec les périodes g, h, g', liées par (4); les entiers l et k sont ses *indices*.

Il s'agit maintenant de chercher si de pareilles fonctions existent lorsque $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif : le cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est négatif a été complètement étudié dans les premiers Mémoires.

Invariant et réduction de la relation singulière.

254. Un certain nombre de résultats et de démonstrations, donnés par d'autres ou par nous pour le cas des périodes normales, s'étendent sans changement au cas actuel ($h_1^2 - g_1 g_1' > 0$); indiquons les plus utiles pour notre objet.

255. La théorie ordinaire de la transformation, créée par M. Hermite, demeure applicable, dans les conditions suivantes :

Soit un premier système de fonctions uniformes à deux variables U et V, admettant les quatre couples de périodes (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'); soit de même un second système analogue, de variables u et v,

et de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'); on pose

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

λ, λ', μ, μ' étant des constantes, et l'on cherche à déterminer ces constantes et les périodes g, h, g', en fonction de G, H, G', ou inversement, de manière qu'à un système u, v, donné aux périodes près, ne corresponde qu'un système U, V, aux périodes près.

La transformation est dite *ordinaire* lorsque, dans cette recherche, on fait abstraction de toute relation liant g, h, g'.

Les résultats fondamentaux obtenus par M. Hermite, pour les transformations ordinaires, subsistent alors même que $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif; rien n'est à changer aux démonstrations. Par exemple, pour une *transformation d'ordre k*, les périodes g, h, g' s'expriment, en fonction de G, H, G', par les équations classiques [où $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$].

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} g &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}G + 2(db)_{03}H + (db)_{02}G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \\ h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [2(ad)_{03} - k]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}, \\ g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}G + 2(ac)_{03}H + (ac)_{02}G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}, \\ h^2 - gg' &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31}G + 2(cd)_{03}H + (cd)_{02}G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}, \end{aligned}\right.$$

les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont des entiers vérifiant les relations de la transformation d'ordre k :

$$(ad)_{01} + (bc)_{01} = (ad)_{02} + (bc)_{02} = (ad)_{13} + (bc)_{13} = (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,$$
$$(ad)_{03} + (bc)_{03} = (ad)_{12} + (bc)_{12} = k.$$

De ces formules M. Hermite a déduit la suivante

$$(7)\qquad h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{k^2}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

$\mathfrak{M}^2$ désignant une quantité réelle positive, et G_1, H_1, G'_1, les parties imaginaires de G, H, G'. En d'autres termes, $h_1^2 - g_1 g'_1$ et $H_1^2 - G_1 G'_1$, sont toujours de même signe, c'est-à-dire que :

Une transformation ordinaire change une fonction quadruplement périodique singulière de U, V *en une fonction analogue de* u, v.

256. Pour compléter ce résultat, observons que la relation singulière (4), entre g, h, g' conduit en vertu de (6), à une relation singulière entre G, H, G'; et réciproquement, si G, H, G' vérifient une relation singulière, il en est de même de g, h, g'.

Dès lors, on établit, comme dans mon premier Mémoire (n°s 1-3) que :

Une transformation ordinaire du premier ordre change la relation singulière (4)

$$(4) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E *sont des entiers sans diviseur commun, en une relation singulière analogue par rapport aux nouvelles périodes; dans cette opération, la quantité*

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

demeure invariable

Nous l'appellerons encore l'*invariant* de la relation (4).

257. *Réciproquement*, il résulte des n°s 4 à 13 du premier Mémoire que deux relations singulières de même invariant sont réductibles l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier ordre : les démonstrations ne font, en effet, aucune hypothèse sur le signe de $h_1^2 - g_1 g_1'$.

Dès lors, si Δ est son invariant, la relation singulière (4) peut se ramener au type

$$-\frac{\Delta}{4} g + g' = 0, \qquad \text{si } \Delta \text{ est de la forme } 4N;$$

$$-\frac{\Delta - 1}{4} g + h + g' = 0, \qquad \text{si } \Delta \text{ est de la forme } 4N + 1.$$

Mais nous n'avons pas le droit de dire ici que l'invariant est un nombre essentiellement positif, car la démonstration (I, 14) suppose $h_1^2 - g_1 g_1'$ négatif; nous parviendrons plus loin à ce résultat d'une manière différente.

Fonctions intermédiaires singulières.

258. Cela posé, pour étudier les fonctions intermédiaires singulières, nous avons le droit de supposer la relation singulière (4) ramenée

au type

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0, \tag{8}$$

où α, β, γ sont entiers et sans diviseur commun. Dans ce cas, les relations (5), où l'on fait $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $D = E = 0$, deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v) \\ &\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[lu - k\gamma v] + \nu}, \\ &\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v] + \nu'}; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et il s'agit de reconnaître s'il existe des fonctions uniformes entières vérifiant ces relations (9), dans lesquelles l et k désignent deux entiers jusqu'ici arbitraires,

259. Imitons, à cet effet, la méthode de notre premier Mémoire (I, nos 21-29), en distinguant deux cas, selon que la quantité δ

$$\delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 \tag{10}$$

est nulle ou non.

Si $\delta = 0$, il faut que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant de (8), soit un carré parfait, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = n^2$; on est alors placé dans un cas elliptique (I, n° 15) et les fonctions $\varphi(u, v)$ correspondantes se réduisent, pour $\delta = 0$, à des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable : la démonstration, donnée au n° 23 du premier Mémoire, est encore valable, car elle suppose seulement que $h_1^2 - g_1 g_1'$ n'est pas nul.

Laissant de côté le cas de $\delta = 0$, nous pouvons, puisque $\delta \gtrless 0$, faire dans la fonction $\varphi(u, v)$ le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= -(l+\beta k)U - k\gamma V, \\ v &= -k\alpha U - lV, \end{aligned}$$

et nous reconnaissons (I. n° 24) que $\varphi(u, v)$ devient une fonction $\theta(U, V)$, vérifiant les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\theta(U+1, V) = \theta(U, V+1) = \theta(U, V), \\ &\theta(U+G, V+H) = \theta(U, V)\, e^{2\pi i\delta U + \text{const.}}, \\ &\theta(U+H, V+G') = \theta(U, V)\, e^{2\pi i\delta V + \text{const.}}; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$\theta\left(U - \frac{l}{\delta}, V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l+\beta k}{\delta}\right) = \theta(U, V). \tag{12}$$

On a posé, pour abréger

$$\begin{aligned}
\delta G &= -lg + k\gamma h,\\
\delta H &= -lh + k\gamma g' = -k\alpha g - (l+\beta k)h,\\
\delta G' &= -k\alpha h - (l+\beta k)g'.
\end{aligned}$$

Les relations (11) montrent que $\theta(U, V)$ est une fonction thêta, de U, V, formée avec les périodes (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'); pour qu'il existe de telles fonctions, deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

1° Si G_1, H_1, G'_1 désignent les parties imaginaires de G, H, G', il faut que $H_1^2 - G_1 G'_1$ soit négatif; or, en vertu des expressions ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\delta^2(H_1^2 - G_1 G'_1) = {} & [-k\alpha g_1 - (l+\beta k)h_1](-lh_1 + k\gamma g'_1)\\
& -[-k\alpha h_1 - (l+\beta k)g'_1](-lg_1 + k\gamma h_1)\\
= {} & \delta(h_1^2 - g_1 g'_1).
\end{aligned}$$

Ainsi $H_1^2 - G_1 G'_1$ a le signe de $\delta(h_1^2 - g_1 g'_1)$; comme par hypothèse, $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, il est nécessaire que l'on ait

(13) $$\delta < 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 < 0.$$

2° En second lieu, δ, ordre de la fonction $\theta(U, V)$, doit avoir un signe contraire à celui de la partie imaginaire de G, c'est-à-dire que G_1 doit être positif :

(14) $$-lg_1 + k\gamma h_1 > 0.$$

Si les inégalités (13) et (14) sont vérifiées, il existe des fonctions thêta, $\theta(U, V)$, satisfaisant aux relations (11); il faut chercher maintenant si, parmi ces fonctions, on peut en trouver qui vérifient aussi les relations (12). Le raisonnement du n° 27 du Mémoire I s'applique encore sans modification, en remplaçant δ par sa valeur absolue, mod δ, et l'on reconnaît que les fonctions $\theta(U, V)$, vérifiant (11) et (12), sont des fonctions linéaires et homogènes de mod δ d'entre elles.

260. En résumé, les conditions (13) et (14)

$$\delta < 0 \quad \text{et} \quad -lg_1 + k\gamma h_1 > 0$$

sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions intermé-

diaires singulières vérifiant les relations (9), c'est-à-dire d'*indices* l et k, dans l'hypothèse où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif.

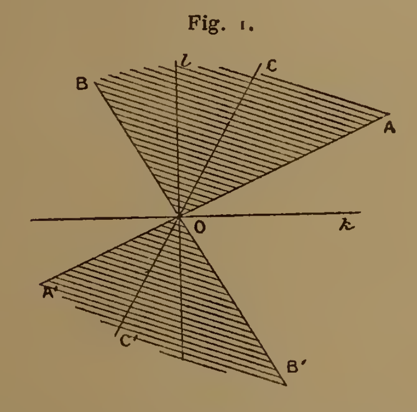
261. *Remarque.* — Pour que δ, c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, puisse être négatif, il est nécessaire que les racines de ce trinome en l et k soient réelles et inégales, c'est-à-dire que

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0.$$

En d'autres termes, l'*invariant* de la relation singulière qui lie les périodes doit être *positif*, comme dans le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif.

262. Cela posé, on peut donner une autre forme à l'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$. A cet effet, regardons l et k comme les coordonnées

Fig. 1.



d'un point dans un plan, et construisons les deux droites *réelles*, AOA' et BOB', qui ont pour équation

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = 0.$$

La condition $\delta < 0$ exprime que le point l, k n'est pas, par rapport aux droites AOA', BOB' dans la région qui contient l'axe des l, c'est-à-dire que ce point doit se trouver dans la région non ombrée.

Construisons de même la droite $-lg_1 + k\gamma h_1 = 0$; cette droite COC', est dans la région ombrée, car si l'on fait $l = \gamma h_1$, $k = g_1$ dans le trinome $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve, en tenant compte de ce que $\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1$ est nul, $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$ quantité positive. L'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ ne sera donc vérifiée, *dans la région non ombrée*, que par les points de l'*un* des deux angles AOB' ou BOA'.

Pour reconnaître quel angle convient, observons que la droite $2l + \beta k = 0$ est dans la région non ombrée, car si l'on fait $l = -\frac{1}{2}\beta$, $k = 1$ dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve $-\frac{1}{4}(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$, résultat négatif. Remplaçons alors l et k par $-\frac{1}{2}\beta$ et 1 dans $-lg_1 + k\gamma h_1$, nous obtenons $\frac{1}{2}(2\gamma h_1 + \beta g_1)$; si cette quantité est positive, l'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ sera vérifiée dans celui des deux angles AOB′ et BOA′ pour lequel la coordonnée k est positive; ce sera l'inverse si $2\gamma h_1 + \beta g_1 < 0$.

En résumé, les deux conditions $\delta < 0$ et $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ sont équivalentes aux suivantes

$$(15) \qquad \delta < 0 \quad \text{et} \quad k(2\gamma h_1 + \beta g_1) > 0;$$

et l'on peut énoncer ce théorème :

263. *Soit un système de périodes* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), *entre lesquelles existe la relation singulière*

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

α, β, γ *étant entiers sans diviseur commun; désignons par* g_1, h_1, g'_1 *les parties imaginaires de* g, h, g', *et supposons*

$$h_1^2 - g_1 g'_1 > 0.$$

Pour qu'il existe des fonctions INTERMÉDIAIRES SINGULIÈRES, $\varphi(u, v)$, *d'indices* l *et* k, *c'est-à-dire vérifiant les relations*

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[lu - k\gamma v] + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v] + \nu'}, \end{cases}$$

où ν *et* ν' *sont deux constantes données, il faut et il suffit :*

1° *Que les indices (entiers)* l *et* k *soient tels que la quantité*

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$$

soit négative;

2° *Que l'indice* k *ait le signe de la quantité*

$$2\gamma h_1 + \beta g_1.$$

Les fonctions $\varphi(u, v)$ *vérifiant les relations précédentes s'expriment alors en fonction linéaire et homogène de* mod δ *d'entre elles,* δ *désignant* $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$.

Développements en série des fonctions intermédiaires.

264. En augmentant u et v de constantes convenables, on peut faire en sorte que, dans les équations (9), les constantes ν et ν' aient des valeurs particulières

$$\nu = -\pi i[lg - k\gamma h]; \qquad \nu' = -\pi i[k\alpha h + (l + \beta k)g'].$$

La fonction entière $\varphi(u, v)$, qui vérifie les deux premières relations (9), peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$\varphi(u, v) = \sum_{m,n} A_{mn} e^{2\pi i\, mu + nv}.$$

Pour abréger les calculs ultérieurs posons (I, n° 39)

$$A_{mn} = B_{mn} e^{\pi i[G_0 m^2 + 2H_0 mn + G'_0 n^2]},$$

où G_0, A_0, G'_0 désignent les quantités

$$G_0 = \frac{1}{\delta}[(l + \beta k)g + k\gamma h],$$

$$H_0 = \frac{1}{\delta}[(l + \beta k)h + k\gamma g'] = \frac{1}{\delta}[-k\alpha g + lh],$$

$$G'_0 \qquad = \frac{1}{\delta}[-k\alpha h + lg'].$$

En exprimant que la série $\varphi(u, v)$ vérifie les deux dernières relations (9), on trouve

$$B_{m,n} = B_{m+l, n-k\gamma} = B_{m+k\alpha, n+l+k\beta}.$$

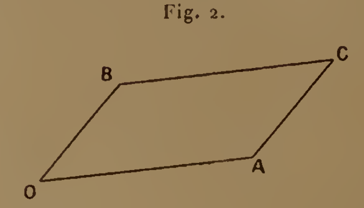
Ainsi $B_{m,n}$ ne change pas quand on augmente m et n de l et $-k\gamma$, ou de $k\alpha$ et $l + k\beta$; géométriquement, si m, n sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, $B_{m,n}$ a la même valeur en tous les points homologues d'un réseau de parallélogrammes, construit sur les périodes $l - ik\gamma, k\alpha + i(l + k\beta)$. Construisons ce réseau à partir de l'origine, et appelons *parallélogramme principal* celui qui a pour sommets les points

O, A, B, C de coordonnées :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{O}: x=0, & y=0, & \mathrm{B}: x=k\alpha, & y=l+k\beta; \\ \mathrm{A}: x=l, & y=-k\gamma; & \mathrm{C}: x=l+k\alpha, & y=-k\gamma+l+k\beta. \end{array}$$

L'aire de ce parallélogramme est mod δ; il y a donc, à son intérieur et sur les côtés OA, OB, mod δ points de coordonnées entières; soit p, q un de ces points (parmi lesquels figure l'origine); à ce point et aux

Fig. 2.



points homologues du réseau correspondent, dans $\varphi(u, v)$, les termes pour lesquels $m=p+l\rho+k\alpha\sigma$, $n=q-k\gamma\rho+(l+k\alpha)\sigma$, ρ et σ étant des entiers quelconques. La somme de ces termes est, à un facteur constant près, la série $\Phi_{p,q}(u, v)$:

$$\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i[p+l\rho+k\alpha\sigma]u+2\pi i[q-k\gamma\rho+(l+\beta k)\sigma]v} \times e^{\pi i f[p+l\rho+k\alpha\sigma,\, q-k\gamma\rho+(l+\beta k)\sigma]},$$

$f(x, y)$ désignant la forme quadratique $G_0 x^2+2H_0 xy+G'_0 y^2$; et ρ, σ prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Comme p et q peuvent recevoir mod δ systèmes de valeurs, répondant aux points à cordonnées entières du parallélogramme principal, on voit que la fonction $\varphi(u, v)$ est une fonction linéaire et homogène des mod δ fonctions $\Phi_{p,q}(u, v)$, dont on a les développements en séries de Fourier. Ces séries sont convergentes comme on le reconnaît aisément en s'appuyant sur les inégalités $\delta<0$ et $-lg_1+k\gamma h_1>0$.

265. *Fonctions quadruplement périodiques singulières.* — Une quelconque de ces fonctions sera, d'après le théorème rappelé plus haut de M. Appell, le quotient de deux fonctions intermédiaires $\varphi(u, v)$, c'est-à-dire le quotient de deux combinaisons linéaires et homogènes de séries $\Phi_{p,q}(u, v)$, où l'on remplacera u et v par $u+$ const., $v+$ const. Ces séries, tant au numérateur qu'au dénominateur, correspondront aux mêmes valeurs des indices l et k, valeurs quelconques d'ailleurs, vérifiant seulement les inégalités fondamentales (15).

Transformation.

266. La théorie des transformations singulières, comprenant comme cas particulier celle des transformations ordinaires et telle que nous l'avons présentée dans notre second Mémoire (n°s 136 et suivants), s'applique sans changement au cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif. Voici l'énoncé général du problème :

Soit un premier système de fonctions uniformes à deux variables U *et* V, *admettant comme périodes les quantités* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G'); *soit de même un second système analogue, de variables* u *et* v *et de périodes* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G') : *les quantités* $H_1^2 - G_1 G_1'$ *et* $h_1^2 - g_1 g_1'$ *peuvent avoir un signe quelconque, c'est-à-dire que les fonctions du premier et du second système peuvent être soit abéliennes, soit quadruplement périodiques singulières. Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions du second, et cela en établissant entre les variables des relations de la forme*

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v;$$

λ, μ, λ', μ' *désignant des constantes.*

Il résulte du Mémoire II que, si g, h, g' sont liés par une relation singulière

$$(2) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les relations qui lient les périodes G, H, G' et g, h, g' sont

$$G = \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02}g + [(bc)_{02} + (da)_{02}]h + (db)_{02}g' + (ab)_{02}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')};$$

$$G' = \frac{(cd)_{31} + (ac)_{31}g + [(bc)_{31} + (da)_{31}]h + (db)_{31}g' + (ab)_{31}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')};$$

$$-H = \frac{(cd)_{03} + (ac)_{03}g + [(bc)_{03} + (da)_{03}]h + (db)_{03}g' + (ab)_{03}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')};$$

$$H = \frac{(cd)_{12} + (ac)_{12}g + [(bc)_{12} + (da)_{12}]h + (db)_{12}g' + (ab)_{12}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')};$$

$$H^2 - GG' = \frac{(cd)_{01} + (ac)_{01}g + [(bc)_{01} + (da)_{01}]h + (db)_{01}g' + (ab)_{01}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')};$$

où l'on a posé $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$.

Dans ces formules, les seize quantités a_i, b_i, c_i, d_i sont les *entiers caractéristiques* de la transformation; ils vérifient les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{r} (ac)_{03}+(ac)_{12}=\mathrm{A}k, \\ (db)_{03}+(db)_{12}=\mathrm{C}k, \\ (ab)_{03}+(ab)_{12}=\mathrm{D}k, \\ (cd)_{03}+(cd)_{12}=\mathrm{E}k, \\ (bc)_{03}+(bc)_{12}-(ad)_{03}-(ad)_{12}=\mathrm{B}k, \end{array}\right.$$

k désignant un entier, d'ailleurs quelconque.

Inversement, g, h, g' et h^2-gg' sont donnés par des formules analogues (II, n° 138), en fonction de G, H, G' et $\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}'$; et l'on en déduit que si g, h, g' vérifient une relation singulière, il en est de même de G, H, G' et réciproquement.

267. Le *degré* de la transformation est la valeur du déterminant $(a_0 b_1 c_2 d_3)$; nous le désignerons par δ.

Les *indices* de la transformation sont deux entiers, l et k :

$$(4)\quad l=(ad)_{03}+(ad)_{12};$$

et k est l'entier qui figure dans les formules (3), avec la convention faite (II, n° 141) pour préciser son signe.

Entre le degré et les indices existe la relation

$$(5)\quad \delta=l^2+\mathrm{B}kl+(\mathrm{AC}+\mathrm{DE})k^2.$$

Si $k=0$, la transformation est ordinaire; le degré est alors le carré de l'ordre $\delta=l^2$.

Soit Δ l'invariant de la relation singulière (2) entre g, h, g'; soit de même Δ' celui de la relation singulière correspondante entre G, H, G'; on a (II, n° 142)

$$k^2\Delta=k'^2\Delta',$$

k' désignant un entier, ce qui montre que Δ et Δ' sont de même signe, comme cela devait être, puisque nous savons que l'invariant d'une relation singulière est positif, quel que soit le signe de $h_1^2-g_1g'_1$ (I, n° 14 et III, n° 261).

268. *Signe du degré.* — A un *point* (u, v), c'est-à-dire à un système de valeurs de u, v, déterminées aux périodes près, la transformation

considérée fait correspondre, par hypothèse, un seul point (U, V); inversement (II, n° 143), à un point (U, V) elle fait correspondre un nombre de points (u, v) égal à son degré en valeur absolue, c'est-à-dire égal à mod δ.

Les indices l et k étant des entiers quelconques, et l'invariant

$$B^2 - 4AC - 4DE$$

étant positif, le nombre δ, donné par (5), peut être *soit positif*, *soit négatif*.

Il résulte, de plus, du Mémoire II (n° 144 ou n° 161) que l'on a, entre les parties imaginaires des périodes g, h, g' et G, H, G′, la relation

$$(6) \qquad h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

où $\mathfrak{M}^2$ est une quantité réelle et positive.

De là cette conséquence importante que :

Les transformations de degré positif font passer d'un système de fonctions abéliennes ou de fonctions quadruplement périodiques singulières à un système de même nature.

Les transformations de degré négatif font passer d'un système de fonctions abéliennes à un système de fonctions quadruplement périodiques singulières, et réciproquement.

269. Les théorèmes et formules relatifs à la composition de deux transformations, à la réduction d'une transformation, à la transformation des fonctions intermédiaires singulières, subsistent sans modification, alors même que $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif et δ négatif.

En particulier, les transformations de degré -1 sont données, à une transformation ordinaire près d'ordre un, par les formules (II, n° 166)

$$(7) \qquad U = lu - \gamma k v, \qquad V = ku + (l + \beta k) v,$$

en supposant g, h, g' liés par la relation singulière (où $\alpha = 1$, comme on a le droit de l'admettre)

$$g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

Dans ces formules l et k sont les indices de la transformation consi-

dérée; ils vérifient la relation $\delta = -1$, c'est-à-dire

(8) $$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = -1 \quad \text{ou} \quad (2l + \beta k)^2 - \Delta k^2 = -4.$$

Quant aux périodes des fonctions en U et V, elles ont pour expression

(9) $$\left\{\begin{array}{l} G = lg - \gamma kh, \\ H = lh - \gamma kg' = kg + (l + \beta k)h, \\ G' = kh + (l + \beta k)g', \\ \qquad \text{d'où} \\ -g = (l + \beta k)G + \gamma kH, \\ -h = (l + \beta k)H + \gamma kG' = -kG + lH, \\ -g' = -kH + lG', \end{array}\right.$$

elles sont liées aussi par la relation

$$G + \beta H + \gamma G' = 0.$$

On démontre (II, n° 180) que toutes ces transformations sont les puissances *impaires* d'une même transformation de degré -1.

270. De là résultent des conséquences intéressantes pour la théorie des fonctions quadruplement périodiques singulières.

1° Trois fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux mêmes périodes, sont liées par une relation algébrique. Car une transformation de degré négatif les change en trois fonctions abéliennes de u, v, aux mêmes périodes.

2° Soit un système de fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux périodes (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'), ou plus simplement (G, H, G'). Pour que ce système admette des transformations de degré -1, il faut et il suffit, comme on le reconnaît par (8), que la forme

$$x^2 - \Delta y^2,$$

où Δ désigne l'invariant de la relation singulière en G, H, G', puisse représenter le nombre -4.

Si cette condition est réalisée, une quelconque des transformations correspondantes de degré -1 change *toute* fonction quadruplement périodique singulière de U, V, aux périodes (G, H, G'), en une fonc-

tion *abélienne* (n° 268) de u, v, dont les périodes (g, h, g') sont liées à G, H, G′ par (9). Réciproquement, la transformation inverse change *toute* fonction abélienne de u, v, aux périodes g, h, g', en une fonction quadruplement périodique singulière de U, V, aux périodes G, H, G′ : dans ces transformations, les *points* u, v et U, V se correspondent d'une manière univoque.

En d'autres termes, *dans le cas considéré, la théorie des fonctions quadruplement périodiques singulières se confond exactement avec celle des fonctions abéliennes.*

Au point de vue de la théorie des surfaces, la conséquence est la suivante :

Appelons *surface hyperelliptique* toute surface algébrique pour laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions uniformes de deux paramètres à quatre paires de périodes : trois fonctions quadruplement périodiques singulières étant liées (1°) par une relation algébrique, déterminent ainsi une surface hyperelliptique; cette surface sera dite *générale* si, à un de ses points, ne répond qu'un système de valeurs des paramètres, aux périodes près.

D'après ce qui précède, si l'invariant Δ d'un système de fonctions quadruplement périodiques singulières est tel que la forme $x^2 - \Delta y^2$ puisse représenter -4, toute surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions de ce système sera aussi une surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions abéliennes (singulières).

Les fonctions quadruplement périodiques considérées ne conduisent donc pas à de nouvelles surfaces hyperelliptiques *générales*.

3° Si la forme $x^2 - \Delta y^2$ ne peut représenter le nombre -4, les conclusions sont différentes.

Les fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux périodes (G, H, G′) et d'invariant Δ, n'admettent pas alors de transformation de degré -1. Une transformation de degré négatif, δ, les change toujours en fonctions abéliennes de u, v; mais en fonctions abéliennes *particulières;* car à un système U, V, la transformation considérée fait correspondre mod δ systèmes u, v, qui se déduisent de l'un d'eux par l'addition de constantes (parties aliquotes de périodes); les fonctions abéliennes de u, v obtenues par cette transformation ne

changent donc pas quand on augmente les variables, u, v, de certaines quantités, différentes des périodes.

Dès lors, une surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions quadruplement périodiques singulières dont l'invariant Δ est tel que la forme $x^2 - \Delta y^2$ ne puisse représenter -4, ne sera jamais une suface hyperelliptique *générale* correspondant à des fonctions abéliennes. On suppose, bien entendu, que les périodes des fonctions singulières considérées ne sont liées que par une seule relation singulière.

On obtiendra donc, dans ce cas, de nouvelles surfaces hyperelliptiques *générales*, échappant, comme surfaces *générales* à la représentation paramétrique par les fonctions abéliennes.

La liaison de ces surfaces avec la courbe de genre deux est la suivante : une surface hyperelliptique générale, S, représentable par des fonctions abéliennes, correspond *point par couple* (II, n° 181) à une courbe C, de genre deux, c'est-à-dire qu'à un point de S répond un couple sur C, et réciproquement. Si S n'est pas une surface générale, à un de ses points correspondent q systèmes d'arguments abéliens ($q > 1$), et par suite à un point de S répondent q couples sur C, tandis qu'à un couple de C ne répond toujours qu'un point de S.

Soit maintenant $-4N$ le plus petit multiple négatif de 4 (en valeur absolue) que puisse représenter la forme $x^2 - \Delta y^2$; il résulte de (8) qu'il existera des transformations de degré $-N$ pour les fonctions quadruplement périodiques singulières d'invariant Δ. Une de ces transformations changera les fonctions considérées de U, V en fonctions abéliennes de u, v, de manière qu'à un point U, V répondent N points u, v (n° 268) : une surface elliptique *générale*, représentable paramétriquement par les fonctions quadruplement périodiques en question, sera donc liée à une courbe C, de genre deux, de telle sorte qu'à un couple sur la courbe réponde un seul point de la surface, mais qu'à un point de la surface répondent N couples sur la courbe.

Propriétés des fonctions intermédiaires singulières.

271. Il s'agit, bien entendu, des fonctions intermédiaires singulières qui correspondent au cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif; le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1$ négatif a été traité dans les deux précédents Mémoires.

Soit toujours

$$(1)\qquad \mathrm{A}g + \mathrm{B}h + \mathrm{C}g' + \mathrm{D}(h^2 - gg') + \mathrm{E} = 0 \qquad (h_1^2 - g_1 g_1' > 0),$$

la relation singulière entre les périodes d'une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u, v)$, d'indices l et k; celle-ci vérifie les relations (5) du n° 253,

$$\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i \mathrm{D} k u},\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[lu - (\mathrm{C} - \mathrm{D}g)kv] + \nu},\\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[\mathrm{A}ku + (l + \mathrm{B}k + \mathrm{D}kh)v] + \nu'}.
\end{aligned}$$

Opérons sur cette fonction une transformation d'indices l_1 et k_1, faisant passer des variables u, v aux variables u', v'; soit

$$(2)\qquad \mathrm{A}_1\mathcal{G} + \mathrm{B}_1\mathcal{H} + \mathrm{C}_1\mathcal{G}' + \mathrm{D}_1(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + \mathrm{E}_1 = 0,$$

la relation singulière entre les périodes de u', v'; désignons par Δ et Δ_1 les invariants des relations (1) et (2); la transformation considérée change $\varphi(u, v)$ en une fonction intermédiaire de u', v', aux périodes $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$ et dont les indices l_2 et k_2 sont donnés par les relations (II, n° 165):

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
2k_2 &= k_1(2l + \mathrm{B}k) + \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + \mathrm{B}_1 k_1),\\
2(2l_2 + \mathrm{B}_1 k_2) &= (2l + \mathrm{B}k)(2l_1 + \mathrm{B}_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1};
\end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles ε_1 désigne ± 1, selon une règle déterminée (II, n°s 142, 149 et 165).

272. *Corollaire.* — Deux fonctions intermédiaires singulières, correspondant à une même relation singulière (1), d'indice l et k, l' et k', ont toujours un nombre de zéros communs, abstraction faite des multiples des périodes, égal à la valeur absolue de

$$(4)\qquad 2ll' + \mathrm{B}(kl' + lk') + 2(\mathrm{AC} + \mathrm{DE})kk'.$$

Le théorème a été établi (II, n° 165, *Remarque*) pour le cas de $h_1^2 - g_1 g_1' < 0$. Dans le cas contraire, une transformation de degré négatif, δ_1, change les deux fonctions de u, v considérées en fonctions analogues de u', v' pour lesquelles $\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1\mathcal{G}_1'$ est négatif, et dont les indices, l_2 et k_2, l_2' et k_2' sont donnés par (3). De plus, à un système

u', v' ne répond qu'un système u, v, tandis qu'à un système u, v répondent $\operatorname{mod}\delta_1$ systèmes u', v'. Le nombre de zéros communs aux deux fonctions d'indices l_2 et k_2, l'_2 et k'_2, en u', v', étant par ce qui précède

$$(5) \qquad 2l_2l'_2 + B_1(k_2l'_2 + l_2k'_2) + 2(A_1C_1 + D_1E_1)k_2k'_2,$$

celui des zéros communs aux deux fonctions en u et v primitives, d'indices l et k, l' et k', s'obtiendra en divisant ce nombre par $\operatorname{mod}\delta_1$: en remplaçant l_2, k_2, l'_2, k'_2 par leurs valeurs (3), on retombe ainsi sur le nombre (4), pris en valeur absolue. C. Q. F. D.

273. *Fonctions intermédiaires normales.* — En désignant par ω, ω', θ, θ' des nombres égaux à 0 ou 1, on donnera, pour les fonctions intermédiaires normales, d'indices l et k, et de caractéristique $(\omega, \theta, \omega', \theta')$ la même définition que dans le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$. Par exemple, en supposant la relation singulière entre g, h, g' ramenée au type

$$\alpha g + \beta h + g' = 0,$$

les équations auxquelles satisfont les fonctions intermédiaires normales, d'indices l, k, de caractéristique $(\omega, \theta, \omega', \theta')$, sont (I, n° 37)

$$\begin{aligned}
F(u+1, v) &= e^{\omega\pi i} F(u, v),\\
F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v),\\
F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i} F(u, v) e^{2\pi i[-lu+kv]+\pi i[-lg+kh]},\\
F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i} F(u, v) e^{-2\pi i[k\alpha u+(l+k\beta)v]-\pi i[k\alpha h+(l+k\beta)g']}.
\end{aligned}$$

La caractéristique nulle est celle qui répond à $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

Parmi les fonctions intermédiaires, les seules qui puissent être paires ou impaires sont les fonctions normales.

274. Cela posé, les théorèmes sur le nombre des fonctions normales, paires et impaires, d'indices et de caractéristique donnés, qu'on a obtenus dans le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, s'étendent sans nouvelle démonstration au cas actuel; dans les théorèmes énumératifs, il suffira de remplacer la quantité δ :

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2,$$

laquelle est ici négative (n° 260), par son module.

Par exemple :

Le nombre des fonctions normales singulières d'indices l et k, et de caractéristique nulle, paires ou impaires, linéairement distinctes, est donné par le tableau

		Paires.	Impaires.	
δ *impair*		$\frac{\bmod \delta + 1}{2}$	$\frac{\bmod \delta - 1}{2}$	
δ *pair*	k pair	$\frac{\bmod \delta + 4}{2}$	$\frac{\bmod \delta - 4}{2}$	$(\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2)$
	k impair	$\frac{\bmod \delta + 2}{2}$	$\frac{\bmod \delta - 2}{2}$	$(h_1^2 - g_1 g'_1 > 0)$

De même, *toutes* les fonctions normales paires, de caractéristique et d'indices donnés, ou *toutes* les fonctions impaires, s'annulent pour une demi-période quelconque; sous une autre forme, les fonctions paires s'annulent pour certaines demi-périodes, les fonctions impaires s'annulent pour les autres (I, n° 56). Les valeurs de ces demi-périodes, données dans le Mémoire I (n°s 56-65) pour le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, s'appliquent encore au cas actuel; faisons seulement observer ici qu'il n'y a plus lieu de considérer, sur une surface de Kummer, les courbes dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction normale paire ou impaire : dans le Mémoire I, cette surface de Kummer avait les coordonnées homogènes d'un de ses points exprimables par certaines fonctions *thêta*, aux périodes (g, h, g'); or, dans le cas actuel $h_1^2 - g_1 g'_1$ étant positif, de pareilles fonctions thêta n'existent plus.

Par exemple, en nous bornant aux fonctions de *caractéristique nulle*, d'indices l et k :

1° *Si δ est impair, les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta + 1)$ *fonctions paires s'annulent pour six demi-périodes; et les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta - 1)$ *fonctions impaires, pour les dix autres.*

2° *Si δ est pair et k pair, les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta + 4)$ *fonctions paires ne s'annulent simultanément pour aucune demi-période; et les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta - 4)$ *fonctions impaires s'annulent pour les seize demi-périodes*

3° *Si δ est pair et k impair, les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta + 2)$ *fonctions paires s'annulent*

pour quatre demi-périodes; et les $\frac{1}{2}(\text{mod}\,\delta - 2)$ *fonctions impaires pour les douze autres.*

275. *Somme des zéros communs à deux fonctions intermédiaires.* — C'est un problème que nous n'avons pas traité dans nos deux premiers Mémoires; nous nous bornerons à donner sans démonstration le résultat, applicable aussi bien au cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est négatif qu'à celui où il est positif.

Soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$$

la relation singulière entre les périodes; les deux fonctions intermédiaires considérées peuvent évidemment (nº 264) se mettre sous les formes

$$F_{l,k}(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad F_{l',k'}(u - \lambda', v - \mu');$$

λ, μ, λ', μ' étant des constantes, et $F_{l,k}(u, v)$, $F_{l',k'}(u, v)$ des fonctions normales de caractéristique nulle, d'indices respectifs l et k, l' et k'.

On trouve assez aisément pour les sommes des valeurs de u et v qui sont les zéros communs aux deux fonctions

$$\begin{aligned}\sum u = {} & (ll' + \alpha\gamma kk')(\lambda + \lambda') \\ & + \beta(lk'\lambda + kl'\lambda') - \gamma(kl' - lk')(\mu - \mu'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum v = {} & (ll' + \alpha\gamma kk')(\mu + \mu') \\ & + \beta(lk'\mu' + kl'\mu) + \alpha(kl' - lk')(\lambda - \lambda'),\end{aligned}$$

à des périodes près.

Cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est nul.

276. Nous terminerons ce Mémoire par l'étude des fonctions uniformes de u, v, admettant les périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), dans l'hypothèse, écartée jusqu'ici, où $h_1^2 - g_1 g_1' = 0$.

Je dis qu'il y a nécessairement, dans ce cas, dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Admettons en effet que les quatre paires de périodes soient dis-

tinctes; les raisonnements des nos 251-257 continuent à s'appliquer et établissent :

1° Que les périodes (g, h, g') sont liées par une relation singulière;
2° Que les fonctions uniformes à étudier sont des quotients de fonctions intermédiaires singulières;
3° Que la relation singulière peut se ramener, par une transformation ordinaire du premier ordre, au type $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, la quantité $h_1^2 - g_1 g'_1$ restant nulle après la transformation.

277. Tout revient donc à l'étude des fonctions entières, $\varphi(u, v)$ vérifiant les relations (9) du n° 258

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\,e^{-2\pi i(lu - k\gamma v) + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\,e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v] + \nu'}. \end{aligned}\right.$$

Si les indices l et k sont tels que $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ ne soit pas nul, le raisonnement du n° 259 ramène $\varphi(u, v)$ à une fonction *thêta*, $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, aux périodes $(\mathrm{G}, \mathrm{H}, \mathrm{G}')$, et l'on a trouvé

$$\delta(\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1 \mathrm{G}'_1) = h_1^2 - g_1 g'_1.$$

ce qui montre que $\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1 \mathrm{G}'_1$ est nul; la fonction *thêta* $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ ne peut donc pas exister, d'où même conclusion pour $\varphi(u, v)$.

Les fonctions entières $\varphi(u, v)$, satisfaisant aux relations (6) ci-dessus ne peuvent, par suite, exister que si δ est nul; il est nécessaire pour cela que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant de la relation singulière entre les périodes, soit un carré parfait, n^2. Cette relation pourra dès lors se ramener au type de même invariant

$$nh - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{1}{n},$$

et la fonction intermédiaire $\varphi(u, v)$ vérifiera les équations (5) du n° 253, qui deviennent ici

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\,e^{-2\pi i lu + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\,e^{-2\pi i(l+nk)v + \nu'}. \end{aligned}\right.$$

On reconnaît comme tout à l'heure qu'une pareille fonction ne peut

exister que si $\delta = 0$, c'est-à-dire si $l^2 + nkl = 0$; d'où les deux hypothèses

$$l = 0, \qquad l + nk = 0.$$

278. Soit d'abord $l = 0$; on a

$$\varphi\left(u + g, v + \frac{1}{n}\right) = \varphi(u, v) e^{\nu},$$

d'où

(8) $$\varphi(u + ng, v + 1) = \varphi(u + ng, v) = \varphi(u, v) e^{\nu''},$$

ν'' étant une constante. La fonction $\varphi(u, v)$ étant uniforme et admettant, par rapport à u ou v seul, la période 1, peut se développer en série de Fourier

$$\varphi(u, v) = \sum A_{\rho.\sigma} e^{2\pi i(\rho u + \sigma v)}.$$

Exprimons qu'elle vérifie (8); il vient

$$A_{\rho.\sigma} e^{2\pi i \rho n g} = A_{\rho,\sigma} e^{\nu''},$$

d'où

(9) $$\rho n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda,$$

λ désignant un entier.

Deux cas sont maintenant à distinguer selon que la relation (9) a lieu, ou non, pour plus d'une valeur de ρ.

1° Si elle n'est vérifiée que pour une seule valeur de l'entier ρ, soit ρ_0 cette valeur; la série $\varphi(u, v)$ s'écrit

$$\varphi(u, v) = e^{2\pi i \rho_0 u} \sum A_\sigma e^{2\pi i \sigma v} = e^{2\pi i \rho_0 u} \psi(v),$$

et les relations (7) montrent que $\psi(v)$ est une fonction *thêta* de la variable v.

C'est un cas de dégénérescence.

2° Si la relation (9) est vérifiée pour deux valeurs ρ_0 et ρ, c'est-à-dire si

$$\rho_0 n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda_0, \qquad \rho n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda,$$

on en tire

$$n(\rho - \rho_0)g = \lambda - \lambda_0,$$

c'est-à-dire que g est une fraction, $g = \frac{p}{q}$.

En ce cas, il y a *réduction du nombre des périodes* ou, ce qui revient au même, on obtient une période nulle en combinant les périodes initiales. Car si x, y et z sont des entiers, les quantités

$$x + zg \quad \text{c'est-à-dire} \quad x + z\frac{p}{q},$$

$$y + zh \quad \text{c'est-à-dire} \quad y + z\frac{1}{n},$$

forment une période, qui peut évidemment se réduire à (0, 0) par un choix convenable des entiers x, y, z.

279. Le cas où $l + nk$ serait nul donne lieu aux mêmes conclusions, et le théorème est établi.

SUR

LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES

D'INVARIANTS HUIT, DOUZE ET CINQ

Journal de Mathématiques, 6e série, t. II (1906).

1. J'ai donné autrefois les *équations modulaires* pour les fonctions abéliennes singulières de deux variables, dont les invariants sont respectivement huit, douze et cinq : dans le présent travail, je voudrais introduire, au lieu des *modules* ordinaires de Richelot, les valeurs des dix thêtas normaux du premier ordre, d'arguments nuls. On arriverait évidemment au but en remplaçant les modules, dans les équations modulaires, par leurs valeurs en fonction des dix thêtas, mais les relations ainsi obtenues seraient décomposables en facteurs difficiles à mettre en évidence : c'est donc par d'autres méthodes que nous formerons les équations cherchées.

Elles conduisent, comme les relations classiques entre les thêtas elliptiques, à des conséquences arithmétiques : pour les invariants huit ou douze ces conséquences, à peu près évidentes *a priori*, concernent les décompositions des nombres du corps quadratique $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ en sommes de carrés de deux nombres appartenant au même corps; pour l'invariant cinq, j'arrive à des propositions, un peu plus cachées peut-être, sur les décompositions en sommes de trois carrés des nombres du type $M + \frac{1}{2} N (1 + \sqrt{5})$, où M et N sont des entiers ordinaires.

Enfin, dans le cas de l'invariant douze, je comble une lacune de mes travaux précédents. Si l'on part de périodes vérifiant la relation $g = 3g'$, la transformation singulière de degré un, dont toutes les autres sont des puissances, change les fonctions abéliennes initiales en des fonc-

tions *de modules différents*, et *douze* est le plus petit invariant donnant lieu à ce fait remarquable. Le problème se posait, dès lors, d'exprimer les modules nouveaux en fonction des anciens ou, ce qui est identique, de traiter le même problème pour les dix thêtas d'arguments nuls : c'est la question qu'on trouvera résolue ici, et par formules très simples.

Cas de l'invariant HUIT.

2. Les paires de périodes d'un système de fonctions abéliennes étant 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', nous emploierons, pour les thêtas du premier ordre, les notations de Weierstrass : comme il ne s'agira, jusqu'à nouvel avis, que des valeurs de ces thêtas pour les arguments nuls, nous écrirons $\mathfrak{I}_5(g, h, g')$ ou $\mathfrak{I}_5$ pour la valeur de $\mathfrak{I}_5(u, v)$ au point $u = v = 0$.

Cherchons maintenant les relations qui lient les dix thêtas pairs lorsqu'on a, entre les périodes, la condition $g' = 2g$, à laquelle peut se ramener toute équation singulière d'invariant *huit*.

Soit posé

$$\Theta_5 = \mathfrak{I}_5(2g, 2h, 2g');$$

on a, d'une manière générale ([1]),

$$4\Theta_5^2 = \mathfrak{I}_5^2 + \mathfrak{I}_{12}^2 + \mathfrak{I}_{34}^2 + \mathfrak{I}_0^2. \tag{1}$$

Or, si $g' = 2g$, on peut écrire, par définition,

$$\Theta_5 = \sum e^{\pi i(2gm^2 + 4hmn + 4gn^2)}, \tag{2}$$

la somme portant sur les valeurs entières de m, n, de $-\infty$ à $+\infty$; de même

$$\mathfrak{I}_5 = \sum e^{\pi i(gm^2 + 2hmn + 2gn^2)},$$

$$\mathfrak{I}_{12} = \sum e^{\pi i(gm^2 + 2hmn + 2gn^2) + \pi i m}.$$

Dans la somme $\mathfrak{I}_5 + \mathfrak{I}_{12}$, les termes qui correspondent aux mêmes valeurs de m et de n se détruisent si m est impair, et s'ajoutent si m est pair; on a donc

$$\mathfrak{I}_5 \mathfrak{I}_{12} = 2 \sum e^{\pi i(4g\mu^2 + 4h\mu n + 2gn^2)},$$

([1]) Krause, *Transformation des fonctions hyperelliptiques* (Teubner, 1886), p. 160.

c'est-à-dire, par comparaison avec (2),

$$\Im_5 = \Im_{12} = 2\Theta_5.$$

En remplaçant $2\Theta_5$ par cette valeur dans (1), on trouve

$$\Im_{34}^2 + \Im_0^2 = 2\Im_5\Im_{12}.$$

On obtient, d'une manière analogue, cinq autres relations du même type entre les dix thêtas; voici le Tableau complet de ces six équations :

$$(3)\quad \begin{cases} \Im_{34}^2 + \Im_0^2 = 2\Im_5\Im_{12}, & \Im_{01}^2 + \Im_{23}^2 = 2\Im_5\Im_4, & \Im_2^2 + \Im_{14}^2 = 2\Im_4\Im_{12}, \\ \Im_{34}^2 - \Im_0^2 = 2\Im_4\Im_{03}, & \Im_{01}^2 - \Im_{23}^2 = 2\Im_{12}\Im^{0}{}_{2}, & \Im_2^2 - \Im_{14}^2 = 2\Im_5\Im_{02}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on tire de ces relations les quantités $\Im_{34}^2$, $\Im_2^2$, $\Im_{23}^2$, $\Im_{01}^2$, en fonction des seconds membres, et si l'on porte leurs valeurs dans l'équation $\Im_4^2\Im_{23}^2 + \Im_2^2\Im_{34}^2 = \Im_5^2\Im_{01}^2$, qui est une des équations biquadratiques générales entre les thêtas d'arguments nuls, on obtient, après suppression du facteur $\Im_4\Im_5$, évidemment différent de zéro, la relation nouvelle

$$(4)\qquad \Im_5^2 = \Im_4^2 + \Im_{12}^2 + \Im_{03}^2.$$

On constate ensuite aisément que les équations biquadratiques ordinaires entre les dix thêtas sont, dans le cas de $g' = 2g$, des conséquences de (3) et de (4); on verrait également qu'une seule des relations (3) et (4), jointe aux équations biquadratiques ordinaires, entraine les autres conditions (3) et (4); on déduirait, enfin, de tout cela la relation entre les *modules* qui caractérise les fonctions abéliennes singulières d'invariant *huit*.

3. *Corollaire I.* — Posons

$$(5)\qquad x = \frac{\Im_4(g, h, 2g)}{\Im_5(g, h, 2g)}, \qquad y = \frac{\Im_{12}}{\Im_5}, \qquad z = \frac{\Im_{03}}{\Im_5};$$

on a, par (4), $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et, par (3),

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{xy + z} = \dfrac{\Im_2}{\Im_5}, & \sqrt{yz + x} = \dfrac{\Im_{01}}{\Im_5}, & \sqrt{xz + y} = \dfrac{\Im_{34}}{\Im_5}, \\ \sqrt{xy - z} = \dfrac{\Im_{14}}{\Im_5}, & \sqrt{yz - x} = i\dfrac{\Im_{23}}{\Im_5}, & \sqrt{xz - y} = i\dfrac{\Im_0}{\Im_5}; \end{cases}$$

d'où cette conclusion : étant donnée la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on peut exprimer en fonction uniforme (hyperabélienne) de deux

variables g et h, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface, ainsi que les six radicaux $\sqrt{xy \pm z}$, $\sqrt{yz \pm x}$, $\sqrt{xz \pm y}$, et cela par les équations (5) et (6).

4. *Corollaire II.* — En remplaçant dans (3) et (4) les thêtas par leurs développements en séries d'exponentielles et faisant $g' = 2g$, on arriverait aisément, par des procédés qui seront appliqués plus tard au cas de l'invariant cinq, à des conséquences arithmétiques. Par exemple, l'équation (4) conduit à ce théorème : si M et N sont deux entiers quelconques, le nombre des décompositions de

$$4(2M + 1 + 2N\sqrt{2})$$

en deux carrés selon la formule

$$(7) \qquad (2m_1 + 2n_1\sqrt{2})^2 + (2m_2 + 2n_2\sqrt{2})^2$$

(où les m_i, n_i sont entiers), est égal au nombre des décompositions de la même quantité en deux carrés selon la formule

$$(8) \qquad [2\mu_1 + (2\nu_1 + 1)\sqrt{2}]^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\sqrt{2}]^2.$$

Mais cette proposition se démontre directement sans difficulté; car, à une décomposition (8) correspond une décomposition (7), et inversement, par les formules

$$m_1 = \nu_1 + \nu_2 + 1, \qquad n_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \qquad m_2 = \nu_1 - \nu_2, \qquad n_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}.$$

Les équations (3) ne donneraient de même que des conclusions à peu près évidentes *a priori*.

Cas de l'invariant DOUZE.

5. Nous supposerons que la relation singulière entre les périodes est $g = 3g'$; une méthode analogue à la précédente, et basée sur les formules de la transformation ordinaire du troisième ordre, conduit, sans grandes difficultés [1], aux relations quadratiques suivantes entre

[1] La méthode la plus simple consiste à observer que, si $g = 3g'$, les fonctions abéliennes proposées admettent une transformation du troisième ordre en elles-mêmes (ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 334, n° 194) qui change respectivement, à un même facteur près, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_{23}$, $\mathfrak{S}_{14}$, $\mathfrak{S}_0$; $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_{01}$; $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_{03}$; $\mathfrak{S}_{12}$, $\mathfrak{S}_{34}$ en $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_{23}$, $\mathfrak{S}_{14}$, $\mathfrak{S}_0$;

les dix thêtas :

$$(1)\qquad \vartheta_5^2+\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2-\vartheta_0^2=2\vartheta_4\,\vartheta_{01},$$

$$(2)\qquad \vartheta_5^2-\vartheta_{23}^2-\vartheta_{14}^2-\vartheta_0^2=2\vartheta_2\,\vartheta_{03},$$

$$(3)\qquad \vartheta_5^2-\vartheta_{23}^2+\vartheta_{14}^2+\vartheta_0^2=2\vartheta_{12}\vartheta_{34},$$

qu'il est aisé de vérifier *a posteriori*.

Considérons, par exemple, l'équation (1), et remplaçons-y les ϑ par leurs développements en séries : pour simplifier, nous poserons, dans ces développements,

$$h=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\qquad g'=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\xi-\eta),\qquad g=3g'=\frac{3}{2\sqrt{3}}(\xi-\eta);$$

il vient ainsi

$$\vartheta_5=\sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(n+m\sqrt{3})^2-\eta(n-m\sqrt{3})^2\right]},$$

$$\vartheta_{23}=\sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\frac{1}{2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}},$$

$$\vartheta_{14}=\sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\frac{1}{2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}+\pi i(m+n+1)},$$

$$\vartheta_0=\sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(n+m\sqrt{3})^2-\eta(n-m\sqrt{3})^2\right]+\pi i(m+n)}.$$

Toutes les sommes portent sur les valeurs entières de m et de n, de $-\infty$ à $+\infty$.

On a de même

$$\vartheta_4=\sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi\left(n+\frac{1}{2}+m\sqrt{3}\right)^2-\eta\left(n+\frac{1}{2}-m\sqrt{3}\right)^2\right]},$$

$$\vartheta_{01}=\sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}}.$$

Le premier membre de (1) est une somme de termes du type

$$(4)\qquad e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{3})-\eta(\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{3})\right]},$$

M et N étant entiers. Le coefficient dans $\vartheta_5^2-\vartheta_0^2$, du terme (4), pour lequel M et N sont donnés, s'obtient comme il suit. On pose

$$(5)\qquad \mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{3}=(n_1+m_1\sqrt{3})^2+(n_2+m_2\sqrt{3})^2,$$

ϑ_{01}, ϑ_4; ϑ_{03}, ϑ_2; ϑ_{14}, ϑ_{12}; dès lors, les relations classiques entre les thêtas initiaux et les thêtas transformés donnent de suite les équations (1), (2) et (3) : on prendra, par exemple, les relations indiquées par M. Krause [*loc. cit.*, p. 193, équations (1)].

et l'on détermine toutes les solutions en nombres entiers m_i, n_i, de cette équation; dans $\mathfrak{S}_3^2$, le coefficient du terme (4) est le nombre, $\mathfrak{N}$, de ces systèmes de solutions; dans $\mathfrak{S}_0^2$, c'est la somme $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$, étendue aux mêmes systèmes.

De même, si l'on pose

$$(6)\qquad M+N\sqrt{3}=\left[\nu_1+\frac{1}{2}+\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2+\left[\nu_2+\frac{1}{2}+\left(\mu_2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2,$$

le coefficient du terme (4), dans $\mathfrak{S}_{23}^2$, est le nombre, $\mathfrak{N}'$, des systèmes de solutions en nombres entiers, μ_i, ν_i, de cette équation; dans $\mathfrak{S}_{14}^2$, c'est la somme $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$.

Enfin, si l'on pose

$$(7)\qquad M+N\sqrt{3}=\left[\sigma_1+\left(\rho_1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2+\left(\sigma_2+\frac{1}{2}+\rho_2\sqrt{3}\right)^2,$$

le coefficient, dans $\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_{01}$, du terme (4), sera le nombre $\mathfrak{N}''$ des systèmes de solutions de l'équation (7) en nombres entiers ρ_i, σ_i.

On a donc, en vertu même de la relation (1),

$$(8)\qquad \mathfrak{N}+\mathfrak{N}'+\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}-\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}=2\mathfrak{N}''.$$

Or, l'équation (5) donne

$$(5\,bis)\qquad M\equiv m_1+n_1+m_2+n_2,\qquad N\equiv 0\pmod 2.$$

De même (6) et (7) donnent respectivement

$$(6\,bis)\qquad M\equiv 0,\qquad N\equiv \mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2+1\pmod 2,$$

$$(7\,bis)\qquad M\equiv \rho_2+\sigma_1+1,\qquad N\equiv \sigma_2+\sigma_1\pmod 2.$$

6. Il faut, dès lors, distinguer quatre cas, selon les parités de M et de N.

1° M *et* N *impairs*. — Les congruences (5 *bis*) et (6 *bis*) montrent que les décompositions (5) et (6) sont impossibles; la décomposition (7) l'est aussi, puisque, par (7 *bis*), M et N sont de parités contraires; donc, tous les termes de la relation (8) sont nuls, et celle-ci est vérifiée.

2° M *et* N *pairs*. — La décomposition (7) est impossible, de sorte que $\mathfrak{N}''$ est nul; par les congruences (5 *bis*) et (6 *bis*), $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$

est égal à $\Sigma(+1)$, c'est-à-dire à $\mathfrak{N}$; $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$ est égal à $-\mathfrak{N}'$, et la relation (8) est encore vérifiée.

3° M *impair et* N *pair*. — La décomposition (6) est impossible, $\mathfrak{N}'$ et $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$ sont donc nuls; $m_1+n_1+m_2+n_2$ étant impair, par (5 *bis*), $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$ est égal à $-\mathfrak{N}$, et la relation (8) s'écrit $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'$.

Or, cette égalité s'établit aisément *a priori*. Soit, en effet, ρ_1, σ_1, ρ_2, σ_2 une solution quelconque de (7); $\rho_2+\sigma_1$ est *pair* en vertu de (7 *bis*). D'ailleurs $-\rho_1-1$, σ_1, ρ_2, σ_2 est aussi une solution de (7), distincte de la première, de sorte que le nombre des solutions de (7) pour lesquelles $\rho_1+\sigma_2$ est *impair* et égal à $\frac{1}{2}\mathfrak{N}''$.

Soit alors $\rho_1, \ldots, \sigma_2$ une de ces solutions; on a identiquement, par la formule de Lagrange,

$$(9)\quad \left\{\left[\rho_1+\left(\rho_1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2+\left(\sigma_2+\frac{1}{2}+\rho_2\sqrt{3}\right)^2\right\}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\sigma_1+3\rho_2}{2}+\frac{\rho_1+\sigma_2+1}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{3\rho_1-\sigma_2+1}{2}+\frac{\sigma_1-\rho_2}{2}\sqrt{3}\right)^2.$$

Si donc on pose

$$(10)\quad \begin{cases} n_i=\dfrac{\sigma_1+3\rho_2}{2}, & m_i=\dfrac{\rho_1+\sigma_2+1}{2}, \\[2ex] n_j=\dfrac{3\rho_1-\sigma_2+1}{2}, & m_j=\dfrac{\sigma_1-\rho_2}{2}, \end{cases}$$

les m, n sont entiers, et l'on voit (en faisant successivement $i, j=1, 2$ ou $2, 1$), qu'à une solution de (7), pour laquelle $\rho_1+\sigma_2$ est impair, correspondent *deux* solutions de (5) et deux solutions *distinctes*, car, M étant impair, la congruence (5 *bis*) montre qu'on ne peut avoir à la fois $m_1=m_2$, $n_1=n_2$.

Inversement, si m_i, n_i, m_j, n_j est une solution quelconque de (5), on tire de (10)

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma_1=\dfrac{n_i+3m_j}{2}, & \rho_1=\dfrac{n_j+m_i-1}{2}, \\[2ex] \sigma_2=\dfrac{3m_i-n_j-1}{2}, & \rho_2=\dfrac{n_i-m_j}{2}. \end{cases}$$

Or, $m_1+n_1+m_2+n_2$ étant impair, par (5 *bis*), l'une des quan-

tités $n_i + m_j$ et $n_j + m_i$ est paire, la première par exemple, l'autre est impaire : les valeurs (11) des ρ, σ sont donc entières, et $\rho_1 + \sigma_2$ est évidemment impair.

Donc enfin, en vertu de la correspondance ainsi établie entre les solutions des équations (5) et (7), on a bien $\mathfrak{N} = 2 \times \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}''$, et la relation (8) est encore vérifiée.

4° M *pair et* N *impair.* — La relation (8) se réduit alors à l'égalité $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}''$, qu'on vérifie d'une manière analogue.

Donc enfin, la relation (8) est établie directement dans tous les cas; et, par là même, la relation (1) se trouve vérifiée par des raisonnements élémentaires d'arithmétique. Des considérations semblables s'appliquent aux relations (2) et (3).

Le système des formules (1), (2) et (3), ou l'une quelconque d'entre elles, caractérise le cas singulier où $g = 3g'$, et peut servir à former l'équation (dite *modulaire*) qui lie les modules de Richelot; on retrouverait ainsi la relation, de forme assez compliquée, que nous avons fait connaître précédemment [1].

Sans insister davantage sur ce point, nous aborderons une question intéressante, relative à la *transformation singulière* du premier degré des fonctions abéliennes pour lesquelles $g = 3g'$.

7. *Formules relatives à la transformation singulière de degré un.* — Soit $f(u, v)$ une fonction abélienne aux périodes 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', avec $g = 3g'$; si l et k sont deux entiers liés par $l^2 - 3k^2 = 1$, et si l'on pose

$$(12) \qquad U = lu + 3kv, \qquad V = ku + lv,$$

$f(u, v)$ devient une fonction abélienne F(U, V), aux paires de périodes 1, 0; 0, 1; G, H; H, G', définies par

$$(13) \qquad G = lg + 3kh, \qquad H = lh + 3kg' = kg + lh, \qquad G' = kg + lg'$$

et l'on a encore $G = 3G'$. Les deux fonctions $f(u, v)$ et F(U, V) sont dites liées par une transformation singulière de degré un, d'indices l et k; d'ailleurs, toutes les transformations ainsi obtenues sont des puissances de l'une d'elles, T_1, pour laquelle les indices l et k corres-

[1] *Comptes rendus*, 2e semestre 1899.

pondent à la plus petite solution positive de l'équation de Pell : $l^2 - 3k^2 = 1$ (¹).

J'ai montré de plus (²) que, la forme $l^2 - 3k^2$ pouvant représenter le nombre -1, les fonctions abéliennes déduites des fonctions $f(u, v)$ par les transformations T_1^{2q} ont les mêmes modules que celles-ci; les fonctions déduites des $f(u, v)$ par les T_1^{2q+1} ont entre elles les mêmes modules, mais *n'ont pas les mêmes modules que les* $f(u, v)$. L'invariant *douze* est le plus petit invariant (non carré) pour lequel ce dernier fait se produise.

Dès lors, se pose le problème suivant. La plus petite solution positive de $l^2 - 3k^2 = 1$ étant $l = 2$, $k = 1$, les formules (13) deviennent, pour T_1,

$$(14)\qquad G = 2g + 3g, \qquad H = 2h + 3g' = g + 2h, \qquad G' = h + 2g',$$

et l'on demande d'exprimer les fonctions abéliennes aux périodes 1, 0; 0, 1; G, H; H, G', à l'aide des modules des fonctions initiales, aux périodes 1, 0; 0, 1; g, h; h, g'; on suppose toujours $g = 3g'$. Au lieu des modules, on peut, ce qui revient au même, introduire les dix thêtas pairs d'argument nuls, et c'est ce que nous allons faire.

Nous désignerons par $\mathfrak{S}$ les thêtas qui correspondent à g, h, g'; par $\mathfrak{S}'$ ceux qui correspondent à G, H, G'. On a, en faisant $g = 3g'$,

$$\mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_5(g, h, g') = \sum e^{\pi i[g'(3\rho^2+\sigma^2)+2h\rho\sigma]}$$

(ρ, σ entiers, de $-\infty$ à $+\infty$).

$$\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_0(g, h, g') = \sum e^{\pi i[g'(3\rho^2+\sigma^2)+2h\rho\sigma]+\pi i(\rho+\sigma)}.$$

Posons

$$\Theta_5 = \mathfrak{S}_5(2G, 2H, 2G'),$$

on a de même, par (14),

$$\Theta_5 = \sum e^{\pi i g'[3(m+n)^2+(3m+n)^2]+2\pi i h(3m+n)(m+n)}$$

et de là résulte immédiatement, en observant que dans $\mathfrak{S}_5 + \mathfrak{S}_0$ les termes pour lesquels $\rho + \sigma$ est impair se détruisent, tandis que ceux pour lesquels $\rho + \sigma$ est pair s'ajoutent,

$$2\Theta_5 = \mathfrak{S}_5 + \mathfrak{S}_0.$$

(¹) Ce Journal, 5ᵉ série, t. VI, p. 313-316.

(²) *Ibid.*, p. 324.

Nous avons vu plus haut (n° 2) que

$$4\Theta_5^2 = \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2,$$

donc, on a

$$\vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2 = (\vartheta_5 + \vartheta_0)^2. \tag{15}$$

On trouverait de même

$$\left\{\begin{aligned} 4\Theta_{01}^2 &= \vartheta_5'^2 - \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 - \vartheta_0'^2 = (\vartheta_{23} + \vartheta_{14})^2, \\ 4\Theta_4^2 &= \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 - \vartheta_{34}'^2 - \vartheta_0'^2 = (\vartheta_{23} - \vartheta_{14})^2, \\ 4\Theta_{23}^2 &= \vartheta_5'^2 - \vartheta_{12}'^2 - \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2 = (\vartheta_5 - \vartheta^0)^2. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Partons maintenant des fonctions abéliennes aux paires de périodes 1, 0; 0, 1; G, — H; — H, G′, et effectuons sur elles la transformation T_1 : nous trouvons, par (14), pour les périodes transformées,

$$\mathcal{G} = 2G - 3H = g, \qquad \mathcal{H} = G - 2H = h, \qquad \mathcal{G}' = -H + 2G' = g'.$$

Le changement de H en — H laisse les ϑ' invariables, sauf ϑ'_{14} qui est changé de signe; il résulte de là que les équations (15) et (16) entraînent les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_5 + \vartheta'_0)^2, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_{23} - \vartheta'_{14})^2, \\ \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_{23} + \vartheta'_{14})^2, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_5 - \vartheta'_0)^2. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Enfin, on a, par (1), (2) et (3), puisque $g = 3g'$ et $G = 3G'$,

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_5^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 &= 2\vartheta_4\,\vartheta_{01}, & \vartheta_5'^2 + \vartheta_{23}'^2 + \vartheta_{14}'^2 - \vartheta_0'^2 &= 2\vartheta'_4\,\vartheta'_{01}, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 &= 2\vartheta_2\,\vartheta_{03}, & \vartheta_5'^2 - \vartheta_{23}'^2 - \vartheta_{14}'^2 - \vartheta_0'^2 &= 2\vartheta'_2\,\vartheta'_{03}, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 + \vartheta_0^2 &= 2\vartheta_{12}\vartheta_{34}, & \vartheta_5'^2 - \vartheta_{23}'^2 + \vartheta_{14}'^2 + \vartheta_0'^2 &= 2\vartheta'_{12}\vartheta'_{34}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

De toutes ces relations, et des relations biquadratiques générales entre les dix thêtas, on déduit sans difficulté les ϑ' en fonction des ϑ, sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned} & & \vartheta_{34}'^2 &= \vartheta_5\vartheta_0 + \vartheta_{23}\vartheta_{14}, \\ 2\vartheta_5'^2 &= \vartheta_5^2 + \vartheta_0^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2, & \vartheta_{12}'^2 &= \vartheta_5\vartheta_0 - \vartheta_{23}\vartheta_{14}, \\ 2\vartheta_0'^2 &= \vartheta_5^2 + \vartheta_0^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2, & \vartheta_2'^2 &= \vartheta_0\vartheta_{23} + \vartheta_5\,\vartheta_{14}, \\ 2\vartheta_{23}'^2 &= \vartheta_5^2 - \vartheta_0^2 + \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2, & \vartheta_{03}'^2 &= \vartheta_0\vartheta_{23} - \vartheta_5\,\vartheta_{14}, \\ 2\vartheta_{14}'^2 &= \vartheta_5^2 - \vartheta_0^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2, & \vartheta_4'^2 &= \vartheta_5\vartheta_{23} - \vartheta_0\,\vartheta_{14}, \\ & & \vartheta_{01}'^2 &= \vartheta_5\vartheta_{23} + \vartheta_0\,\vartheta_{14}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Les expressions des $\mathfrak{S}$ en fonction des $\mathfrak{S}'$ seraient les mêmes; il suffirait de permuter $\mathfrak{S}_i$ et $\mathfrak{S}'_i$, sauf $\mathfrak{S}_{14}$ qui serait changé en $-\mathfrak{S}'_{14}$.

8. *Relations entre les modules de Borchardt.* — Les quantités

$$\rho = \frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_5}, \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_5}, \qquad \tau = \frac{\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_5}$$

forment un système de modules de Borchardt; elles sont liées par une équation qu'on obtient aisément. On a, d'une manière générale, entre les $\mathfrak{S}$, la relation ordinaire

$$\mathfrak{S}_4^2 \mathfrak{S}_{01}^2 = \mathfrak{S}_5^2 \mathfrak{S}_{23}^2 - \mathfrak{S}_0^2 \mathfrak{S}_{14}^2,$$

d'où, en substituant à $\mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_{01}$ sa valeur (1),

$$(\mathfrak{S}_5^2 + \mathfrak{S}_{23}^2 - \mathfrak{S}_0^2 + \mathfrak{S}_{14}^2)^2 = 4(\mathfrak{S}_5^2 \mathfrak{S}_{23}^2 - \mathfrak{S}_0^2 \mathfrak{S}_{14}^2),$$

c'est-à-dire

$$(1 + \sigma^2 + \tau^2 - \rho^2)^2 = 4(\sigma^2 - \rho^2 \tau^2),$$

ce qu'on écrit aussi

$$(\tau^2 + \rho^2)^2 + 2(1 + \sigma^2)(\tau^2 - \rho^2) + (1 - \sigma^2)^2 = 0. \tag{20}$$

Telle est la relation, entre les modules de Borchardt considérés, qui caractérise le cas singulier où $g = 3g'$.

Pour les fonctions abéliennes liées aux précédentes par la transformation singulière (12), introduisons les modules analogues

$$\rho' = \frac{\mathfrak{S}'_0}{\mathfrak{S}'_5}, \qquad \sigma' = \frac{\mathfrak{S}'_{23}}{\mathfrak{S}'_5}, \qquad \tau' = \frac{\mathfrak{S}'_{14}}{\mathfrak{S}'_5},$$

nous aurons, en vertu de (19),

$$\rho'^2 = \frac{1 + \rho^2 - \sigma^2 - \tau^2}{1 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2}, \qquad \sigma'^2 = \frac{1 - \rho^2 + \sigma^2 - \tau^2}{1 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2}, \qquad \tau'^2 = \frac{1 - \rho^2 - \sigma^2 + \tau^2}{1 + \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2},$$

et ρ', σ', τ' sont liées aussi par l'équation (20).

Cas de l'invariant CINQ.

9. La relation singulière entre les périodes peut être supposée de la forme

$$g' = h + g;$$

pour trouver les relations correspondantes, les plus simples possibles, entre les dix thêtas pairs d'arguments nuls, considérons les deux produits

$$(1) \qquad \mathfrak{I}_0(u, v)\mathfrak{I}_{34}(u, v)\mathfrak{I}_{12}(u, v), \quad \mathfrak{I}_{23}(u, v)\mathfrak{I}_4(u, v)\mathfrak{I}_{01}(u, v).$$

Ce sont deux fonctions thêta du troisième ordre, paires et de caractéristique nulle; avec les notations que nous avons proposées pour les seize thêtas d'ordre un et les seize demi-périodes, on reconnaît immédiatement que chacune des deux fonctions (1) s'annule simplement pour les six demi-périodes

$$(24'), \quad (34'), \quad (41'), \quad (43'), \quad (14'), \quad (42'),$$

et doublement pour les trois demi-périodes

$$(44'), \quad (23'), \quad (32').$$

D'un autre côté, puisque $g' = h + g$, il existe une fonction intermédiaire singulière, d'indices $l = 1$, $k = 1$, de caractéristique nulle, et une seule (à un facteur constant près) (2); le développement en série de cette fonction $\varphi_{1,1}(u, v)$ est (3)

$$\varphi_{1,1} = \sum_{\rho, \sigma} e^{2\pi i(\rho+\sigma)u + 2\pi i(\rho+2\sigma)v + \pi i[G_0(\rho+\sigma)^2 + 2H_0(\rho+\sigma)(\rho+2\sigma) + G'_0(\rho+2\sigma)^2]},$$

étant posé $G_0 = 2g - h$; $H_0 = -g + h$; $G'_0 = g$; et ρ, σ variant, par valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. On peut écrire, en posant $\rho + \sigma = n$, $\sigma = m$,

$$(2) \qquad \varphi_{1,1} = \sum_{m, n} e^{2\pi i[nu + (m+n)v] + \pi i[g(m^2+n^2) + h(2mn+n^2)]}.$$

De même, il existe une et une seule fonction intermédiaire singulière d'indices $l = 2$, $k = -1$ et de caractéristique nulle, donnée par la formule

$$(3) \qquad \varphi_{2,-1} = \sum_{m, n} e^{2\pi i[(n-m)u + mv] + \pi i[g(m^2+n^2) + h(2mn+n^2)]}.$$

---

(1) Ce Journal, 4e série, t. IX, p. 58; 5 série, t. V, p. 287-288.
(2) Ce Journal, 5e série, t. V, p. 271-277 et p. 318-319.
(3) *Ibid.*, p. 274.

D'ailleurs $\varphi_{1,1}$ s'annule pour les six demi-périodes ([1])

$$(24'),\quad (34'),\quad (41'),\quad (44'),\quad (23'),\quad (32'); \tag{4}$$

$\varphi_{2,-1}$ s'annule pour les six demi-périodes

$$(43'),\quad (14'),\quad (42'),\quad (44'),\quad (23'),\quad (32'),$$

et le produit $\varphi_{1,1}(u,v)\varphi_{2,-1}(u,v)$ est une fonction thêta normale, d'ordre trois et de caractéristique nulle.

Ce produit, par ce qui précède, s'annule simplement pour les six demi-périodes, et doublement pour les trois demi-périodes qui annulent simplement et doublement les deux fonctions (1); donc, ρ désignant une constante arbitraire, les deux thêtas d'ordre trois, en u, v,

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi_{1,1}(u,v)\,\varphi_{2,-1}(u,v), \\ \mathfrak{S}_0(u,v)\,\mathfrak{S}_{34}(u,v)\,\mathfrak{S}_{12}(u,v)+\rho\mathfrak{S}_{23}(u,v)\,\mathfrak{S}_4(u,v)\,\mathfrak{S}_{01}(u,v) \end{array}\right. \tag{5}$$

ont, pour ces demi-périodes, un nombre de zéros communs égal à $6+4\times 3=18$, et l'on peut disposer de ρ de manière à leur donner un dix-neuvième zéro commun; mais deux thêtas d'ordre trois n'ayant que $2.3.3=18$ zéros communs, il faut alors que les deux fonctions (3) aient un facteur commun, et comme $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,-1}$ sont évidemment indécomposables, les deux fonctions (3), pour une valeur convenable de ρ, sont identiques, à un facteur constant près. On a donc, λ et μ désignant des constantes convenables,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\mathfrak{S}_0(u,v)\,\mathfrak{S}_{34}(u,v)\,\mathfrak{S}_{12}(u,v)+\mu\mathfrak{S}_{23}(u,v)\,\mathfrak{S}_4(u,v)\,\mathfrak{S}_{01}(u,v) \\ \quad =\mathfrak{S}_5(0,0)\,\varphi_{1,1}(u,v)\,\varphi_{2,-1}(u,v). \end{array}\right. \tag{6}$$

Pour déterminer λ, faisons, dans cette relation $u=0$, $v=\frac{1}{2}$ [ce qui correspond à la demi-période (12') annulant $\mathfrak{S}_{23}(u,v)$ et $\mathfrak{S}_4(u,v)$]; il reste ainsi

$$\lambda\mathfrak{S}_0\left(0,\frac{1}{2}\right)\mathfrak{S}_{34}\left(0,\frac{1}{2}\right)\mathfrak{S}_{12}\left(0,\frac{1}{2}\right)=\mathfrak{S}_5(0,0)\,\varphi_{1,1}\left(0,\frac{1}{2}\right)\varphi_{2,-1}\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

Or, par les développements (2) et (3), on a, en tenant compte de

([1]) *Ibid.*, p. 293.

$g' = h + g$,

$$\varphi_{1,1}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \sum e^{\pi i [g m^2 + 2 h m n + g' n^2] + \pi i (m+n)} = \vartheta_0(0, 0),$$

$$\varphi_{2,-1}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \sum e^{\pi i [g m^2 + 2 h m n + g' n^2] + \pi i m} = \vartheta_{12}(0, 0).$$

D'ailleurs,

$$\vartheta_0\left(0, \frac{1}{2}\right) = \vartheta_{12}(0, 0); \qquad \vartheta_{34}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \vartheta_5(0, 0);$$
$$\vartheta_{12}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \vartheta_0(0, 0),$$

de sorte que l'équation (7) donne $\lambda = 1$. On trouverait de même, en faisant, dans (6), $u = \frac{h}{2}$, $v = \frac{g'}{2}$ [ce qui répond à la demi-période (13')], $\mu = 1$; de sorte qu'on a l'identité

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\vartheta_0(u, v)\,\vartheta_{34}(u, v)\,\vartheta_{12}(u, v) + \vartheta_{23}(u, v)\,\vartheta_4(u, v)\,\vartheta_{01}(u, v) \\ &\quad = \vartheta_5(0, 0)\,\varphi_{1,1}(u, v)\,\varphi_{2,-1}(u, v). \end{aligned} \right.$$

Si l'on y suppose $u = v = 0$, il vient, *entre les thêtas d'ordre un et d'arguments nuls, la relation*

$$(9) \qquad \vartheta_0\vartheta_{34}\vartheta_{12} + \vartheta_{23}\vartheta_4\vartheta_{01} = \vartheta_5^3,$$

car $\varphi_{1,1}(0, 0)$ et $\varphi_{2,-1}(0, 0)$ sont égaux à $\vartheta_5(0, 0)$, en vertu même de (2) et (3) et de $g' = h + g$.

En considérant les *neuf* caractéristiques paires, autres que (0, 0, 0, 0), on obtiendrait *neuf* relations du même type que (8). Par exemple,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &-\vartheta_2(u, v)\,\vartheta_{12}(u, v)\,\vartheta_{14}(u, v) \\ &+\vartheta_5(u, v)\,\vartheta_{01}(u, v)\,\vartheta_{23}(u, v) = \vartheta_4(0, 0)\,\psi_{1,1}(u, v)\,\psi_{2,-1}(u, v). \end{aligned} \right.$$

Ici, les deux membres sont des thêtas de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, qui est celle de $\vartheta_4(u, v)$; $\psi_{1,1}$ est la fonction intermédiaire singulière d'indices $l = 1$, $k = 1$ et de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\psi_{2,-1}$ celle d'indices $l = 2$, $k = -1$, de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. On a

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{1,1}(u, v) &= \sum_{m,n} e^{2\pi i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u + \left(m+n+\frac{1}{2}\right)v\right] + \pi i \left\{ g\left[m^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] + h\left[2m\left(n+\frac{1}{2}\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] \right\}}, \\ \psi_{2,-1}(u, v) &= \sum_{m,n} e^{2\pi i\left[\left(n+m+\frac{1}{2}\right)u + mv\right] + \pi i \left\{ g\left[m^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] + h\left[2m\left(n+\frac{1}{2}\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] \right\}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait $u = v = 0$ dans l'identité (10), on obtient, *entre les thêtas d'arguments nuls*, la relation

$$-\vartheta_2\vartheta_{12}\vartheta_{14} + \vartheta_5\vartheta_{01}\vartheta_{23} = \vartheta_4^3. \tag{12}$$

10. Voici le Tableau complet des dix relations de cette espèce que donne l'application de la méthode (¹) :

$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_4^3 + \vartheta_2\,\vartheta_{12}\vartheta_{14} - \vartheta_5\,\vartheta_{01}\vartheta_{23} = 0,\\
&\vartheta_{03}^3 - \vartheta_2\,\vartheta_0\,\vartheta_{23} + \vartheta_{34}\vartheta_{14}\vartheta_{01} = 0,\\
&\vartheta_2^3 - \vartheta_0\,\vartheta_{23}\vartheta_{03} - \vartheta_4\,\vartheta_{12}\vartheta_{14} = 0,\\
&\vartheta_{01}^3 - \vartheta_{14}\vartheta_{03}\vartheta_{34} - \vartheta_5\,\vartheta_4\,\vartheta_{23} = 0,\\
&\vartheta_{14}^3 + \vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_{03} - \vartheta_{12}\vartheta_2\,\vartheta_4 = 0,\\
&\vartheta_{23}^3 - \vartheta_5\,\vartheta_4\,\vartheta_{01} + \vartheta_2\,\vartheta_0\,\vartheta_{03} = 0;
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_5^3 - \vartheta_0\,\vartheta_{34}\vartheta_{12} - \vartheta_{23}\vartheta_4\,\vartheta_{01} = 0,\\
&\vartheta_{34}^3 - \vartheta_{12}\vartheta_5\,\vartheta_0 - \vartheta_{01}\vartheta_{14}\vartheta_{03} = 0,\\
&\vartheta_0^3 + \vartheta_2\,\vartheta_{03}\vartheta_{23} - \vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_5 = 0,\\
&\vartheta_{12}^3 + \vartheta_{14}\vartheta_4\,\vartheta_2 - \vartheta_0\,\vartheta_5\,\vartheta_{34} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

11. *Conséquences arithmétiques.* — On déduit de ces équations quelques conséquences arithmétiques intéressantes.

Dans la première équation (13) on a, pour ϑ_4, après remplacement de g' par $h + g$, la série

$$\vartheta_4 = \sum_{m,n} e^{\pi i g\left[m^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right] + \pi i h\left[2m\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]}$$

qu'on peut mettre sous une forme plus commode. Posons

$$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \qquad \omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \tag{15}$$

ω et ω' sont les racines de l'équation $\omega^2 - \omega - 1 = 0$ et sont des unités du *corps quadratique* $\sqrt{5}$; si l'on fait ensuite

$$g = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{5}}, \qquad h = \frac{\omega\xi - \omega'\eta}{\sqrt{5}}, \tag{16}$$

(¹) *Voir* une autre démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 5 mars 1906. On pourrait aussi suivre une méthode analogue à celle indiquée en note au n° 5.

il vient

$$\vartheta_1 = \sum_{m,n} e^{\frac{\pi i}{\sqrt{5}}\left\{\xi\left[m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega\right]^2 - \eta\left[m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega'\right]^2\right\}}.$$

Dès lors, ϑ_4^3 est une somme de termes du type

$$(17) \qquad e^{\frac{\pi i}{\sqrt{5}}[\xi(M+N\omega)-\eta(M+N\omega')]},$$

M et N étant entiers ou fractionnaires; le coefficient, dans ϑ_4^3, du terme (17), pour lequel M et N sont donnés, s'obtiendra comme il suit. On posera

$$(18) \qquad M + N\omega = \left[m_1 + \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\omega\right]^2 + \left[m_2 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\omega\right]^2 + \left[m_3 + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\omega\right]^2,$$

et l'on déterminera toutes les solutions en nombres entiers m_i, n_i, de cette équation : le coefficient cherché sera le nombre $\mathfrak{N}$ de ces systèmes de solutions.

De même, dans le produit $\vartheta_5\vartheta_{01}\vartheta_{23}$, le coefficient du terme (17) sera le nombre $\mathfrak{N}'$ des systèmes de solutions entières μ_i, ν_i de l'équation

$$(19) \quad M + N\omega = (\mu_1 + \nu_1\omega)^2 + \left(\mu_2 + \frac{1}{2} + \nu_2\omega^2\right) + \left[\mu_3 + \frac{1}{2} + \left(\nu_3 + \frac{1}{2}\right)\omega\right]^2;$$

enfin, dans le produit $\vartheta_2\vartheta_{12}\vartheta_{14}$, ce sera la somme

$$\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3+1}$$

étendue aux mêmes systèmes de solutions.

On a ainsi, en vertu même de la première équation (13), la relation

$$(20) \qquad \mathfrak{N} - \mathfrak{N}' + \Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3+1} = 0.$$

Or, les équations (18) et (19) donnent immédiatement

$$M \equiv m_1 + m_2 + m_3 + \frac{3}{4} \pmod 2,$$

$$N \equiv m_1 + m_2 + m_3 + \frac{3}{4} \pmod 2,$$

$$M \equiv \mu_1 + \nu_1 + \nu_2 + \frac{3}{4} \pmod 2,$$

$$N \equiv \nu_1 + \mu_3 + \nu_3 + \frac{3}{4} \pmod 2,$$

ce qui montre que $M - \frac{3}{4}$ et $N - \frac{3}{4}$ sont des entiers de même parité, et que dès lors $\mu_1 + \nu_2 + \mu_3 + \nu_3$ est pair; la relation (20) s'écrit par suite

$$\mathfrak{N} = 2\mathfrak{N}',$$

d'où ce théorème, *relatif aux décompositions d'un entier du corps quadratique* $\sqrt{5}$ *en sommes de carrés de trois entiers*, appartenant au même corps :

Si A *et* B *désignent des entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs, de même parité, le nombre des décompositions de*

$$4A + 3 + \omega(4B + 3)$$

en somme de trois carrés selon la formule

$$(21) \quad \begin{cases} [2m_1 + (2n_1 + 1)\omega]^2 + [2m_2 + (2n_2 + 1)\omega]^2 \\ + [2m_3 + (2n_3 + 1)\omega]^2 \end{cases}$$

est double du nombre des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(22) \quad (2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + (2\mu_2 + 1 + 2\nu_2\omega)^2 + [2\mu_3 + 1 + (2\nu_3 + 1)\omega]^2.$$

Dans cet énoncé et dans les suivants, les m_i, n_i, μ_i, ν_i sont des entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs; deux décompositions (21) telles que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2$ sont regardées comme distinctes, à moins que β ne soit identique à α.

La seconde équation (13) conduit au même résultat; la troisième et la quatrième donnent cette proposition :

Si A *et* B *sont des entiers ordinaires quelconques, le nombre des décompositions de* $4A + 3 + 8B\omega$ *selon la formule*

$$(2m_1 + 1 + 2n_1\omega)^2 + (2m_2 + 1 + 2n_2\omega)^2 + (2m_3 + 1 + 2n_3\omega)^2$$

est double de celui des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\omega]^2 + [2\mu_3 + 1 + (2\nu_3 + 1)\omega]^2.$$

Des deux dernières équations (13), on déduit que :

Si A *et* B *sont des entiers ordinaires quelconques, le nombre des décom-*

positions de $8A + 6 + \omega(4B + 1)$ *selon la formule*

$$[2m_1 + 1 + (2n_1 + 1)\omega]^2 + [2m_2 + 1 + (2n_2 + 1)\omega]^2 + [2m_3 + 1 + (2n_3 + 1)\omega]_2$$

est double de celui des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\omega]^2 + (2\mu_3 + 1 + 2\nu_3\omega)^2.$$

12. Examinons maintenant, au point de vue des conséquences arithmétiques, les équations (14); il suffira de considérer la première. Elle donne immédiatement le résultat suivant :

Soient M et N deux entiers ordinaires quelconques; considérons les deux décompositions de $M + N\omega$,

$$\text{(I)} \qquad M + N\omega = (m_1 + n_1\omega)^2 + (m_2 + n_2\omega)^2 + (m_3 + n_3\omega)^2,$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} M + N\omega = \left[\mu_1 + \left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right)\omega\right]^2 + \left(\mu_2 + \frac{1}{2} + \nu_2\omega\right)^2 \\ \qquad + \left[\mu_3 + \frac{1}{2} + \left(\nu_3 + \frac{1}{2}\right)\omega\right]^2; \end{cases}$$

soient $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ les nombres respectifs de ces décompositions, on a, par la première équation (14),

$$\text{(23)} \qquad \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les systèmes entiers m_i, n_i, qui satisfont à (I).

L'équation (23) donne un théorème facile à énoncer; mais on peut aller plus loin et obtenir une relation entre $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$. Supposons d'abord que, dans chacune des décompositions (I), les trois quantités $m_i + n_i\omega$ soient distinctes deux à deux, et *ne regardons pas comme différentes deux décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre* des trois quantités élevées au carré. D'après cela, une décomposition (I) compte pour six unités dans $\mathfrak{N}_1$; dans $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$, elle donne les six termes

$$\text{(24)} \qquad (-1)^\alpha + (-1)^\beta + (-1)^\gamma + (-1)^\delta + (-1)^\varepsilon + (-1)^\theta,$$

étant posé

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = m_1 + n_1 + n_2 + m_3, \qquad \gamma = m_2 + n_2 + n_1 + m_3, \\ \qquad\qquad \varepsilon = m_3 + n_3 + n_1 + m_2, \\ \beta = m_1 + n_1 + n_3 + m_2, \qquad \delta = m_2 + n_2 + n_3 + m_1, \\ \qquad\qquad \theta = m_3 + n_3 + n_2 + m_1. \end{array}\right.$$

Étudions maintenant la parité des six quantités $\alpha, \beta, \ldots, \theta$.

On déduit de (I)

$$(26)\quad M \equiv m_1 + m_2 + m_3 + n_1 + n_2 + n_3, \qquad N \equiv n_1 + n_2 + n_3 \pmod 2;$$

et, par (25),

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1 \equiv M + N + \beta + \gamma + \delta, \qquad m_2 \equiv M + N + \alpha + \beta + \delta, \\ \qquad\qquad m_2 \equiv M + N + \alpha + \gamma, \\ n_1 \equiv N + \alpha + \gamma + \delta, \qquad n_2 \equiv N + \alpha + \beta + \gamma \pmod 2, \\ \qquad\qquad n_3 \equiv N + \beta + \delta \pmod 2, \\ \qquad\qquad \varepsilon \equiv \alpha + \delta, \qquad \theta \equiv \beta + \gamma. \end{array}\right.$$

De plus, l'équation (I) donne

$$M = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$
$$N = 2m_1 n_1 + 2m_2 n_2 + 2m_3 n_3 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2;$$

d'où, en utilisant (27),

$$M \equiv 3(M+N)^2 + 3N^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) \pmod 4,$$
$$N \equiv 3N^2 + 6N(M+N) + 2\alpha\beta + 2\beta\delta + 2\gamma\delta \pmod 4,$$

ce qu'on écrit

$$(28)\quad \frac{M^2 + M}{2} \equiv N(M+1) + \alpha\gamma + \beta\delta \pmod 2,$$

$$(29)\quad \frac{N^2 + N}{2} \equiv MN + \alpha\beta + \beta\delta + \gamma\delta \pmod 2.$$

13. Distinguons maintenant plusieurs cas.

Premier cas : *Le nombre* $\dfrac{M^2 + M}{2} + N(M+1)$ *est impair.* — La congruence (28) n'a alors, en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que *six* solutions, d'après un résultat bien connu dans la théorie des caractéristiques des thêtas à deux variables; elles sont données par le Tableau suivant, complété

par les valeurs ε et θ, déduites de (27) :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1

Par suite, quatre des six quantités sont impaires et deux sont paires, dans tous les cas; donc, sans avoir besoin d'étudier la congruence (29), on est sûr que la somme des six unités (24) est égale à $-4+2=-2$, de sorte que, dans $\mathfrak{N}_1 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$, chaque décomposition (I) donne $6+2=8$ unités, et l'équation (23) montre que le nombre des décompositions (II) est *huit* fois celui des décompositions (I).

On a supposé, dans (I), les trois quantités $m_i + n_i\omega$ distinctes deux à deux. Si deux d'entre elles sont égales, c'est-à-dire si $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, la troisième étant différente, la décomposition (I) considérée donne, dans $\mathfrak{N}_1$, *trois* unités, et l'on reconnaît, par la méthode du cas général, qu'elle en donne *une* dans $-\Sigma(1-)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$; on dira alors que le nombre des décompositions (II) est toujours égal à *huit* fois celui des décompositions (I), avec la restriction de compter seulement pour $\frac{1}{2}$ une décomposition (I) dans laquelle deux des quantités $m_i + n_i\omega$ coïncident.

Enfin, les trois quantités $m_i + n_i\omega$ d'une même décomposition (I) ne peuvent être égales entre elles; car on aurait alors, par (I),

$$M = 3m^2 + 3n^2, \qquad N = 6mn + 3n^2,$$

et le nombre $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ serait pair, contrairement à l'hypothèse.

Deuxième cas : $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ *est pair*, $\frac{N^2+N}{2} + MN$ *est impair*. — La congruence (28) a alors *dix* solutions en α, β; γ, δ, mais *trois* seulement vérifient la congruence (29), ce sont les suivantes :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

Dès lors, quatre des six quantités sont impaires, deux sont paires, et l'on retombe exactement sur les conclusions du premier cas.

TROISIÈME CAS : $\frac{M^2+M}{2}+N(M+1)$ *et* $\frac{N^2-N}{2}+PN$ *sont pairs.* — Les congruences (28) et (29) admettent les *sept* solutions :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0

Si on laisse de côté la première solution, on voit que, dans chacune des autres, quatre des six quantités $\alpha, \ldots, \theta$ sont paires et deux impaires, de sorte que la somme (24) est égale à $4-2=2$. Donc une décomposition (I) dans laquelle les trois $m_i+n_i\omega$ sont distincts et les six quantités $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ non simultanément paires, donne, dans $\mathfrak{N}_1-\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$, $6-2=4$ unités.

Si, au contraire, $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ sont tous pairs, ou, ce qui revient au même par (27), si l'on a

$$m_1\equiv m_2\equiv m_3\equiv M+N, \qquad n_1\equiv n_2\equiv n_3\equiv N \qquad (\text{mod}\,2),$$

la décomposition considérée donne $6-6=0$ unité, c'est-à-dire *ne compte pas*.

Donc, en admettant que, dans chaque décomposition (I), les trois $m_i+n_i\omega$ soient deux à deux distincts, on peut dire que, par (23), le nombre des décompositions (II) est *quatre* fois celui des décompositions (I), avec la restriction qu'une décomposition (I) dans laquelle les m_i ont la parité de $M+N$ et les n_i celles de N, compte pour zéro.

14. Il est facile maintenant de traiter d'une manière analogue le cas où deux au moins des $m_i+n_i\omega$ d'une même décomposition seraient égaux, et voici le résultat final : les trois dernières équations (14) conduisent à la même conclusion.

Soient M *et* N *des entiers ordinaires quelconques; considérons les*

décompositions de $4\mathrm{M}+4\mathrm{N}\omega$ *en sommes de trois carrés selon les formules*

$$(\mathrm{I}) \qquad (2m_1+2n_1\omega)^2+(2m_2+2n_2\omega)^2+(2m_3+2n_3\omega)^2,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad [2\mu_1+(2\nu_1+1)\omega]^2+(2\mu_2+1+2\nu_2\omega)^2+[2\mu_3+1+(2\nu_3+1)\omega]^2.$$

1° *Si l'un au moins des nombres*

$$\frac{1}{2}(\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}+2\mathrm{N}) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\mathrm{N}(\mathrm{N}-1+2\mathrm{M})$$

est impair, le nombre des décompositions (II) *est huit fois celui des décompositions* (I) : *les décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre des trois quantités* $2m_i+2n_i\omega$ *ne comptent que pour une seule ; une décomposition* (I) *dans laquelle deux de ces trois quantités sont égales ne compte que pour* $\frac{1}{2}$; *enfin les trois quantités ne peuvent être égales entres elles.*

2° *Si les deux nombres* $\frac{1}{2}(\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}+2\mathrm{N})$ *et* $\frac{1}{2}\mathrm{N}(\mathrm{N}-1+2\mathrm{M})$ *sont pairs, le nombre des décompositions* (II) *est quatre fois celui des décompositions* (I) : *les décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre des trois quantités* $2m_i+2n_i\omega$ *ne comptent que pour une; celles où deux au moins de ces trois quantités sont égales comptent pour zéro; enfin une décomposition* (I) *où tous les* m_i *ont la parité de* $\mathrm{M}+\mathrm{N}$ *et tous les* n_i *celle de* N *compte également pour zéro.*

15. *Extension des résultats arithmétiques.* — Nous n'avons fait appel, jusqu'ici, qu'aux relations (13) et (14), sans utiliser les identités plus générales, telles que (8) et (10), dont elles dérivent.

Partons cette fois de l'identité (10), regardons-y g et h, c'est-à-dire ξ et η [équations (16)], comme les variables indépendantes, u et v comme des paramètres : en égalant, dans les deux membres de (10), les coefficients de l'exponentielle (17), on arrive au résultat qui suit.

Reprenons les décompositions (I) et (II) ci-dessus de $4\mathrm{M}+4\mathrm{M}\omega$; regardons cette fois comme distinctes deux décompositions (I) qui diffèrent par l'ordre des trois quantités élevées au carré; posons

$$\mathfrak{A} = \sum{}'(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}e^{2\pi i(m_1+m_2+m_3)u+2\pi i(n_1+n_2+n_3)v},$$

$$\mathfrak{C} = \sum{}'e^{2\pi i(n_1+n_2-m_2)u+2\pi i(m_1+n_1+m_2)v},$$

les deux sommes Σ' s'étendant à toutes les décompositions (I) du nombre donné $4\mathrm{M}+4\mathrm{N}\omega$,

$$\mathfrak{B} = \sum{}''e^{2\pi i(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)u+2\pi i(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)v},$$

la somme Σ'' s'étendant à toutes les décompositions (II) du même nombre; on a, quels que soient u et v,

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

On en conclut, en développant les exponentielles suivant les puissances croissantes de u, v, et identifiant les développements des deux membres,

$$\begin{aligned}\Sigma''(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)^p(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)^q \\ = \quad \Sigma'(n_1+n_2-m_2)^p(m_1+n_1+m_2)^q \\ - \Sigma'(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}(m_1+m_2+m_3)^p(n_1+n_2+n_3)^q,\end{aligned}$$

p et q désignant des entiers ordinaires quelconques, non négatifs; la somme Σ'' s'étend à toutes les décompositions (II); les sommes Σ' à toutes les décompositions (I), deux de ces décompositions qui diffèrent par l'ordre des trois quantités élevées au carré *étant regardées comme distinctes*.

Supposons maintenant, pour fixer les idées, qu'une au moins des deux quantités $\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{M}+2\mathrm{N})$ et $\frac{1}{2}\mathrm{N}(\mathrm{N}-1+2\mathrm{M})$ soit impaire; nous avons vu que, parmi les six quantités $m_i+n_i+n_j+m_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$ et deux à deux distincts), quatre sont impaires et deux paires; dès lors si Σ désigne une somme étendue aux décompositions (I), deux de ces décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre des termes élevés au carré *n'étant pas regardées comme distinctes* (et c'est ce que nous admettrons dans les énoncés suivants), on a

$$\begin{aligned}\Sigma''(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)^p(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)^q \\ = \Sigma'(n_1+n_2-m_2)^p(m_1+n_1+m_2)^q \\ + 2\Sigma(m_1+m_2+m_3)^p(n_1+n_2+n_3)^q.\end{aligned}$$

Par suite, évidemment, si, pour chaque décomposition (I), on écrit les *six* quantités

$$\begin{matrix} n_1+n_2-m_2; & n_1+n_2-m_1; & n_1+n_3-m_3; \\ n_1+n_3-m_1; & n_2+n_3-m_3; & n_2+n_3-m_2, \end{matrix}$$

et *deux* fois la quantité $m_1+m_2+m_3$, le Tableau ainsi obtenu est identique à celui que forment les quantités $\mu_1+\mu_2+\mu_3+1$, pour toutes les décompositions (II). Si deux des quantités $2m_i+2n_i\omega$ d'une même décomposition (I) sont égales, par exemple si $m_1=m_2$, $n_1=n_2$, on

écrira, pour cette décomposition, les *trois* quantités

$$2n_1+m_1,\quad n_1+n_3-m_3,\quad n_1+n_3-m_1,$$

et *une* fois la quantité $2m_1+m_3$, et la proposition subsistera.

On a un théorème pareil en remplaçant,

$$n_1+n_2-m_2,\quad \ldots \quad \text{par } m_1+n_1+m_2,\quad \ldots;$$
$$m_1+n_2+m_3 \quad \text{par } n_1+n_2+n_3$$

et

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+1 \quad \text{par } \nu_1+\nu_2+\nu_3+1.$$

Ces propositions, qui s'étendent aisément au cas où les deux quantités $\frac{1}{2}M(M+2N)$ et $\frac{1}{2}N(N-1+2M)$ sont paires, mettent sur la voie d'une démonstration directe de nos résultats arithmétiques; nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

16. *Remarque.* — On peut observer que les relations biquadratiques classiques entre les dix thêtas d'arguments nuls donnent des propositions simples sur les décompositions en sommes de quatre carrés des nombres du corps quadratique $\sqrt{D}$; par exemple, de l'équation

$$\vartheta_4^4-\vartheta_{01}^4=\vartheta_{03}^4-\vartheta_2^4,$$

on déduit que :

Si M et N sont des entiers ordinaires quelconques, dont le second est impair, les nombres de décompositions de $4M+4N\sqrt{D}$ en quatre carrés selon les deux formules

$$(2m_1+1+2n_1\sqrt{D})^2+(2m_2+1+2n_2\sqrt{D})^2+(2m_3+1+2n_3\sqrt{D})^2 +(2m_4+1+2n_4\sqrt{D})^2$$

et

$$[2\mu_1+(2\nu_1+1)\sqrt{D}]^2+[2\mu_2+(2\nu_2+1)\sqrt{D}]^2 +[2\mu_3+(2\nu_3+1)\sqrt{D}]^2+[2\mu_4+(2\nu_4+1)\sqrt{D}]^2$$

sont égaux.

SUR LA TRANSFORMATION ORDINAIRE

DES

FONCTIONS ABÉLIENNES

Journal de Mathématique, 5e série, t. VII (1901).

1. La théorie de la transformation des fonctions abéliennes ordinaires peut recevoir, sur la surface de Kummer, une interprétation géométrique très simple qui conduit à d'intéressantes propriétés de cette surface; inversement, l'interprétation géométrique peut venir en aide à l'Analyse pour la recherche des trois équations, dites *modulaires*, qui lient les modules des fonctions abéliennes primitives et transformées; nous insisterons spécialement, à ce point de vue, sur la transformation du second ordre.

Propriétés préliminaires.

2. Soit une surface de Kummer représentée paramétriquement par le procédé de M. Weber (*Crelle*, t. 84) : les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales des variables u et v, du second ordre et à caractéristique nulle; ces fonctions étant paires, à un point de la surface répondent (aux périodes près) deux couples d'arguments u, v et $-u, -v$. Les seize points doubles ont pour arguments les seize demi-périodes, en y comprenant la demi-période o, o.

3. Considérons maintenant, sur la surface de Kummer, une courbe C que nous supposerons d'abord ne passer *par aucun des seize points doubles*, et cherchons, *le long de cette courbe*, l'expression des différen-

tielles du et dv. En admettant que les coordonnées d'un point de C soient exprimées en fonction fuchsienne d'un paramètre, ξ, on aura, pour du et dv, des expressions de la forme $\sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi$, $\Theta(\xi)$ étant une fonction uniforme de ξ; cela résulte de ce que, en chaque point de la courbe, du et dv doivent avoir chacun deux valeurs égales et de signes contraires. De plus, $\Theta(\xi)$ doit être une fonction thêtafuchsienne du second ordre. Soit en effet $\left(\xi, \dfrac{a\xi+b}{c\xi+d}\right)$ une des substitutions fondamentales du groupe fuchsien lié à C; il faut que du et dv se reproduisent, du moins au signe près, quand on opère sur ξ cette substitution, car celle-ci n'altère pas le point considéré sur la courbe. En d'autres termes, en supposant $ad - bc = 1$, le radical $\sqrt{\Theta(\xi)}$ doit se reproduire multiplié par $\pm(c\xi+d)^2$, c'est-à-dire que

$$\Theta\left(\frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right) = (c\xi+d)^4\,\Theta(\xi),$$

ce qui établit bien que $\Theta(\xi)$ est une fonction thêtafuchsienne d'ordre deux.

Étudions maintenant les pôles et les zéros de cette fonction, ou mieux, pour plus de généralité, de la fonction $\Theta(\xi)$ définie le long de C par

$$(1) \qquad du + \rho\,dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi,$$

où ρ est une constante quelconque : cette nouvelle fonction; d'après le raisonnement précédent, est encore thêtafuchsienne et du second ordre.

Elle ne peut avoir de pôle d'ordre supérieur à l'unité, car ce pôle serait au moins d'ordre deux, et l'intégrale $\int\sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi$ y deviendrait infinie, ce qui est impossible, puisque $u+\rho v$ demeure fini, comme u et v, sur toute la surface de Kummer, et *a fortiori* sur la courbe C.

Je dis que $\Theta(\xi)$ ne peut pas non plus admettre de pôle d'ordre un, $\xi=\xi_0$. On aurait en effet, dans le domaine du point ξ_0,

$$du + \rho\,dv = \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\xi_0}}\,[a_0 + a_1(\xi-\xi_0) + \ldots]$$

et

$$(2) \qquad u + \rho v = \sqrt{\xi-\xi_0}\,F(\xi-\xi_0) + c_0,$$

c_0 désignant une constante, et $F(\xi-\xi_0)$ une fonction holomorphe de ξ

au voisinage de ξ_0. Faisons maintenant décrire à ξ un contour fermé autour du point ξ_0; $u + \rho v$ prend la nouvelle valeur

$$(3) \qquad -\sqrt{\xi - \xi_0}\,F(\xi - \xi_0) + c_0,$$

différente de la précédente. Comme $u + \rho v$ ne peut admettre, en un même point de la surface de Kummer, que deux valeurs égales et de signes contraires, aux périodes près, la *somme* ou la *différence* des valeurs (2) et (3) doit être une période de $u + \rho v$: la différence, qui dépend de ξ, ne peut satisfaire à cette condition; il faut donc que ce soit la somme, qui est $2c_0$. Si donc on désigne par (1, 0), (0, 1), (g, h), (h, g') un système de périodes normales de u et v, et par m, n, p, q des entiers, on aura

$$2c_0 = m + n\rho + p(g + \rho h) + q(h + \rho g').$$

D'ailleurs, pour $\xi = \xi_0$, $u + \rho v$ se réduit à c_0. Il en résulte aisément, puisque ρ est quelconque, que, *pour* $\xi = \xi_0$, u et v ont les valeurs

$$u = \frac{1}{2}(m + pg + qh), \qquad v = \frac{1}{2}(n + ph + qg').$$

Ces deux valeurs constituent une *demi-période* de u, v; le point correspondant sur la surface de Kummer est donc un des seize points doubles de la surface, conclusion contraire à l'hypothèse initiale que la courbe C ne passe par aucun de ces points.

Ainsi, la fonction $\Theta(\xi)$ ne peut admettre de pôle; un raisonnement tout pareil établit que $\Theta(\xi)$ ne peut avoir de zéro d'ordre impair. Voici donc le résultat :

4. *Soit, sur la surface de Kummer, une courbe,* C, *ne passant par aucun des seize points doubles; imaginons que les coordonnées d'un point de* C *soient exprimées en fonction fuchsienne d'un paramètre* ξ. *En désignant par* du *et* dv *les différentielles abéliennes qui répondent à la surface, par* ρ *une constante quelconque, on a,* en tout point de la courbe C,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ *étant une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre deux, dont tous les zéros sont d'ordre pair de multiplicité.*

5. Sous une autre forme, en représentant par $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane d'ordre n, répondant point par point à C, on aura, le long de la courbe $f = 0$,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{F_{2n-6}(x, y)}\, \frac{dx}{f'_y},$$

$F_{2n-6}(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $2n - 6$, biadjointe à $f(x, y) = 0$. Par *biadjointe*, on entend une courbe qui présente, en chaque point multiple de la proposée, la même singularité que la figure formée par l'ensemble de deux adjointes ordinaires. De plus, la courbe $F_{2n-6} = 0$ a un contact d'ordre impair avec la courbe $f = 0$ en tous les points, non multiples, où elle la coupe.

6. *Remarque*. — Il peut arriver que $\Theta(\xi)$ soit le carré d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre un; ou, si l'on veut que F_{2n-6} soit le carré d'un polynome de degré $n - 3$ en x et y qui, égalé à zéro, représente une courbe adjointe à $f = 0$.

Dans ce cas, du et dv sont des différentielles *abéliennes de première espèce* le long de la courbe C : celle-ci est alors ce que j'ai appelé une *courbe univoque* (*Journal de Math.*, 4e série, t. IX), c'est-à-dire que son équation sur la surface de Kummer s'obtient en annulant une fonction thêta des variables u et v, qui n'est ni paire ni impaire.

7. Supposons maintenant que la courbe C passe par un ou plusieurs points doubles de la surface de Kummer; on aura toujours (n° 3) le long de cette courbe

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ étant une fonction thêtafuchsienne du second ordre de ξ. Cette fonction, d'après le n° 3, ne peut admettre comme pôles (nécessairement d'ordre un) ou comme zéros d'ordre impair, que les valeurs de ξ qui répondent aux points de C coïncidant avec un point double de la surface. Pour éclaircir cette question, supposons que, pour $\xi = \xi_0$, la courbe C passe par le point double qui a pour arguments abéliens $u = 0$, $v = 0$ sur la surface (le raisonnement serait le même pour un autre point double) et prenons ce point pour origine, $x = y = z = 0$, des coordonnées. On aura, *sur la courbe* C, au voisinage de ξ_0,

$$x = \alpha(\xi - \xi_0)^{\mu} + \beta(\xi - \xi_0)^{\mu+1} + \ldots$$

et des expressions analogues pour y et z : dans ces équations, p désigne un entier positif, au moins égal à 1 ; si $p = 1$, la branche de courbe qui répond aux valeurs voisines de ξ_0 est *simple;* si $p > 1$, la courbe présente, pour ces valeurs, un *cycle* singulier, d'ordre p.

Observons maintenant que, *sur la surface de Kummer*, en vertu même du mode de représentation de M. Weber, les coordonnées x, y et z sont des fonctions paires des paramètres u et v; au voisinage de $u = 0$, $v = 0$; on a donc, sur la surface,

$$x = A u^2 + B uv + C v^2 + \ldots$$

et de même pour y et z. On en conclut, *le long de la courbe* C, au voisinage de ξ_0,

$$A u^2 + B uv + C v^2 + \ldots = \alpha(\xi - \xi_0)^p + \beta(\xi - \xi_0)^{p+1} + \ldots$$

et deux autres équations semblables; d'où

$$u^2 = \lambda(\xi - \xi_0)^p + \ldots, \qquad uv = \mu(\xi - \xi_0)^p + \ldots, \qquad v^2 = \nu(\xi - \xi_0)^p + \ldots$$

et par suite u et v, exprimés en fonction de ξ le long de C, sont d'ordre $\frac{1}{2}p$ en $(\xi - \xi_0)$. Dès lors on a

$$du + \rho\, dv = (\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2}p-1} F(\xi - \xi_0)\, d\xi,$$

F ne devenant ni nul ni infini pour $\xi = \xi_0$; ce qui montre que $\Theta(\xi)$ contient $(\xi - \xi_0)^{p-2}$ en facteur. Ainsi :

1° La fonction $\Theta(\xi)$ admet comme pôles d'ordre un les valeur de ξ répondant aux branches *simples* de la courbe C qui passent par les points doubles de la surface, et ces valeurs seulement;

2° Elle admet comme zéros d'ordre $p - 2$ les valeurs de ξ répondant aux *cycles* d'ordre p que présente la courbe en ces mêmes points doubles. Les autres zéros de $\Theta(\xi)$ sont (n° 3) d'ordre de multiplicité pair.

8. On ne devra pas oublier, en appliquant ces résultats, qu'un point multiple d'ordre n, *à tangentes distinctes*, est formé par n branches simples; au contraire, un cycle d'ordre p comporte p branches à tangentes confondues en une seule.

Application aux courbes de genre zéro.

9. Pour une courbe unicursale C, tracée sur la surface de Kummer, on a évidemment

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ étant une fonction rationnelle du paramètre unicursal ξ, dont chaque valeur répond à un point de la courbe et inversement.

Cette fonction ne peut être identiquement nulle quel que soit ρ, car on aurait tout le long de la courbe C, $du = dv = 0$, c'est-à-dire

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.};$$

conclusion inadmissible, car à des valeurs données de u et v correspond *toujours*, sur la surface de Kummer, un point et *jamais* une courbe : cela tient à ce que les quatre fonctions thêta auxquelles sont proportionnelles les coordonnées d'un point de la surface ne s'annulent simultanément pour aucun système de valeurs de u, v.

Cela posé, pour que l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi$ reste finie quel que soit ξ, il faut que le nombre des pôles de $\Theta(\xi)$ surpasse de *quatre unités au moins* le nombre des zéros (on a préalablement effectué sur ξ la transformation homographique la plus générale, de manière que $\xi = \infty$ ne soit pas un point critique de l'intégrale). Comme les pôles, nécessairement simples, de $\Theta(\xi)$ ne peuvent correspondre qu'aux branches simples que présente l'unicursale aux points doubles de la surface (n° 7), il en résulte que :

Il n'existe, sur aucune surface de Kummer, de courbe unicursale ayant au total moins de quatre branches simples en des points doubles de la surface.

Par exemple, il n'y a pas de courbe unicursale ne passant par aucun point double; donc il n'existe pas de plan touchant une surface de Kummer en trois points simples, de quadrique la touchant en neuf points simples, etc.

10. Le cas d'une unicursale C présentant en tout quatre branches simples en des points doubles de la surface mérite un examen ; soient

ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les valeurs du paramètre ξ qui répondent à ces quatre branches; on a nécessairement, par ce qui précède,

$$du + \rho\, dv = a \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_4)}}$$

tout le long de la courbe C, a désignant une constante. Comme ρ est arbitraire, du et dv sont de la même forme, de sorte que $du = k\, dv$ sur C; l'équation de l'unicursale sur la surface est donc

$$u = kv + \text{const.},$$

k étant constant. Mais on reconnaît bien aisément qu'une courbe définie par cette relation linéaire entre u et v ne peut être algébrique que si les quatre périodes abéliennes de $u - kv$ se réduisent à deux : on est donc placé dans le *cas elliptique*. J'ai montré ailleurs (*American Journal of Mathem.*, t. XVI) qu'en égalant à une constante convenable les deux quantités $u - kv$ dont les périodes abéliennes se réduisent à deux, on obtient au total *huit* courbes unicursales passant chacune simplement par quatre points doubles de la surface de Kummer. Par suite :

Dans le cas elliptique, et dans ce cas seulement, on peut tracer sur la surface de Kummer des courbes unicursales présentant, au total, quatre branches simples en des points doubles de la surface; ces courbes, au nombre de huit, passent chacune simplement par quatre points doubles.

Par exemple, le *tétraédroïde* possède huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans, et contenant quatre points doubles chacune.

On conclut de là que, pour $p = 0$, 1 ou 2, il n'existe pas de surface d'ordre n, passant simplement par p points doubles de la surface de Kummer, et touchant celle-ci en $2n^2 - p + 1$ points simples : la courbe d'intersection serait, en effet, unicursale, comme on le vérifie aisément, et aurait 0, 2 ou 4 branches simples en des points doubles de la surface, dont le nombre serait inférieur à quatre.

11. Passons maintenant au cas d'une unicursale C, présentant au total plus de quatre branches simples en des points singuliers de la surface de Kummer; la fonction rationnelle $\Theta(\xi)$ correspondante a alors plus de quatre pôles simples. Elle en a *six au moins*, comme on le reconnaît, en opérant sur ξ une transformation homographique, de

manière que le point $\xi = \infty$ ne soit pas critique pour l'intégrale

$$\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi.$$

Il en résulte qu'*une unicursale tracée sur une surface de Kummer non elliptique doit présenter en tout, aux points doubles de la surface, six branches simples au moins.*

12. Admettons d'abord qu'il y ait exactement six branches simples, répondant aux valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ du paramètre ξ qui détermine les points de l'unicursale C : pour que l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi$ reste finie pour $\xi = \infty$, il faut que $\Theta(\xi)$, qui n'a que les six pôles simples ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_6$, n'ait que deux zéros, lesquels sont nécessairement confondus (n° 7), puisque, par hypothèse, la courbe C n'a, aux points doubles de la surface, que les six branches (simples) considérées ici. On a donc, tout le long de la courbe C,

$$du + \rho\, dv = \frac{a\xi + b}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi.$$

Comme ρ est quelconque, u et v sont, le long de C, deux intégrales hyperelliptiques de genre *deux* et de première espèce; en un point de C, elles ne sont donc déterminées qu'à certaines périodes près, que nous définirons de la manière suivante : Soient u' et v' deux intégrales hyperelliptiques du même type que u et v le long de la courbe C,

$$(3) \qquad u' = \int \frac{a_1\xi + b_1}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi, \qquad v' = \int \frac{a_2\xi + b_2}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi,$$

formant un système normal, c'est-à-dire admettant comme périodes quatre couples de quantités, de la forme $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'). Les intégrales u et v, le long de C, sont des fonctions linéaires de u' et v', fonctions qu'on peut supposer homogènes, si l'on choisit convenablement les limites inférieures des intégrales

$$(4) \qquad u = \lambda u' + \mu v', \qquad v = \lambda' u' + \mu' v'.$$

En un point de la courbe C, u' et v' ne sont déterminés qu'à une de leurs périodes près, *quelconque d'ailleurs;* si u' et v' augmentent d'une période, u et v augmentent, en vertu de (4), de quantités correspondantes. Mais u et v sont, par hypothèse, les arguments hyperelliptiques

d'un point de la courbe C, c'est-à-dire de la surface de Kummer; ils ne peuvent donc avoir, en un même point, que des valeurs différant entre elles d'une période des fonctions abéliennes liées à la surface. Soit, comme au n° 3, (1, 0); (0, 1); (g, h); (h, g') un système de périodes primitives pour u et v sur la surface; les quantités u et v définies par (4) augmenteront d'une période de ce dernier système quand u' et v' augmentent d'une période *quelconque* dérivée des périodes (1, 0); (0, 1); (σ, τ); (τ, σ').

En d'autres termes, si l'on considère u' et v' comme deux variables abéliennes, *indépendantes entre elles*, de périodes (1, 0); (0, 1); (σ, τ); (τ, σ'), les équations (4) établissent une *transformation* entre les fonctions abéliennes des variables u' et v', admettant ces périodes, et les fonctions abéliennes des variables u et v, admettant les périodes (1, 0); (0, 1); (g, h); (h, g') : car, aux valeurs $u'+$ période, $v'+$ période, les équations (4) font correspondre, d'après ce qui précède, des valeurs de la forme $u+$ période, $v+$ période, c'est-à-dire un seul *point abélien* u, v.

Si nous admettons que les fonctions abéliennes en u, v (ou en u', v') ne sont pas singulières dans le sens que nous avons donné à ce mot (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V, VI et VII), la transformation dont il s'agit est nécessairement une transformation ordinaire, et il est aisé de déterminer son ordre.

13. L'équation de la courbe C, sur la surface de Kummer, est de la forme $\Theta(u, v) = 0$, la fonction $\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta, aux périodes (1, 0); (0, 1); (g, h); (h, g'), qui est nécessairement *paire* ou *impaire :* autrement, en effet, la courbe serait univoque (n° 6); c'est-à-dire que u et v seraient des intégrales abéliennes de première espèce sur cette courbe, qui, dès lors, ne pourrait être unicursale.

D'ailleurs, le long de C, u' et v' sont deux intégrales hyperelliptiques de genre *deux*, aux périodes normales (1, 0); (0, 1); (σ, τ); (τ, σ'); elles sont donc liées, en vertu d'un théorème fondamental classique, par une équation $\vartheta(u', v') = 0$, en désignant par $\vartheta(u', v')$ une fonction thêta du premier ordre, aux périodes (1, 0); (0, 1); (σ, τ); (τ, σ') : cette fonction est nécessairement paire ou impaire, car u et v n'étant simultanément définis qu'au signe près le long de C, il en est de même de u' et v' d'après (4).

Cela posé, si la transformation définie par les équations (4) est d'ordre n, ces équations font correspondre, à un point abélien u, v, n^2 points abéliens u', v', dont les arguments diffèrent de certains $n^{\text{ièmes}}$ de périodes; on aura donc, d'après la théorie de la transformation, appliquée à la fonction $\Theta(u, v)$,

$$(5)\qquad \Theta(u, v) = e^{P(u', v')}\mathfrak{I}(u', v')\mathfrak{I}(u' + \alpha_2, v' + \beta_2)\ldots\mathfrak{I}(u' + \alpha_{n^2}, v' + \beta_{n^2}),$$

en désignant par $P(u', v')$ un polynome du second ordre en u', v' et par α_2, β_2, ..., αn^2, βn^2, des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes convenables.

Or, on sait qu'une fonction thêta d'ordre p en u, v a pour transformée en u', v' une fonction thêta d'ordre pn; si p est l'ordre de $\Theta(u, v)$, l'ordre du second membre de (5), qui est évidemment n^2, devant être égal à pn, on aura

$$n = p.$$

Ainsi la transformation que nous étudions a pour ordre l'ordre même de $\Theta(u, v)$, ou, si l'on veut, la moitié du degré de la courbe $\Theta(u, v) = 0$, c'est-à-dire de C (¹).

14. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Soit une surface de Kummer liée à des fonctions abéliennes dérivant du radical $\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}$; supposons qu'une courbe unicursale, tracée sur elle, et de degré $2p$, présente en tout six branches simples aux points doubles de la surface, et désignons par ξ_1, ξ_2, ..., ξ_6 les valeurs du paramètre unicursal correspondantes; les fonctions abéliennes dérivées respectivement des deux radicaux

$$\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x - \xi_1)\ldots(x - \xi_6)}$$

sont liées par une transformation d'ordre p.

Nous reviendrons plus loin sur ce théorème et sur sa réciproque, et nous en ferons quelques applications.

(¹) Car, sur la surface de Kummer définie paramétriquement par le procédé de M. Weber, la courbe $\Theta(u, v) = 0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta, paire ou impaire, d'ordre p, est coupée par un plan en $\frac{1}{2} \cdot 2 . 2 . p$ points; elle est donc d'ordre $2p$.

15. Le cas d'une courbe unicursale ayant plus de six branches simples au total en des points doubles de la surface de Kummer paraît moins intéressant. Le long d'une telle courbe, u et v se présentent sous la forme d'intégrales hyperelliptiques de genre supérieur à deux, et comme elles ne peuvent admettre que quatre paires de périodes simultanées, on a un exemple géométrique d'intégrales réductibles au genre *deux*. Nous n'insisterons pas sur ce point.

16. *Courbes de genre un.* — Il est aisé d'établir, en suivant les méthodes précédentes, que, en dehors du cas elliptique, une courbe de genre *un*, tracée sur la surface de Kummer, présente en tout quatre branches au moins en des points singuliers de la surface. Par suite, il n'existe pas de plan tangent à la surface en deux points simples; pas de quadrique tangente en huit points simples, etc.

Application aux courbes de genre deux.

17. Nous ne traiterons que des courbes de genre *deux* (tracées sur la surface de Kummer) ne passant par aucun des seize points doubles.

Soient C une pareille courbe; C′ une courbe plane du quatrième ordre, à un point double, lui correspondant point par point, et d'équation $f(x, y) = 0$. Les différentielles $du + \rho\, dv$ prises sur la surface le long de C ont pour expression le long de C′ (n° 5)

$$du + \rho\, dv = \frac{\sqrt{F_2(x, y)}}{f'_y}\, dx,$$

$F_2(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une conique *biadjointe* à C′, c'est-à-dire ayant un point double au point double de C′. La conique $F_2 = 0$ se décompose donc en deux droites passant par ce point et qui, de plus, doivent être soit confondues, soit tangentes à C′ (n° 5) : mais les tangentes menées à C′ par son point double sont au nombre de six, et l'équation simultanée de deux d'entre elles ne peut contenir de paramètre arbitraire; comme $F_2(x,y)$ doit évidemment dépendre du paramètre ρ, il faut que les deux droites qui composent la conique $F_2 = 0$ soient confondues. En d'autres termes, du et dv sont de la forme

$$\frac{ax + by + c}{f'_y}\, dx,$$

la droite $ax + by + c = 0$ passant par le point double de C'; u et v sont donc *deux intégrales abéliennes de première espèce* appartenant à cette courbe.

Il en résulte qu'on peut séparer analytiquement, le long de C' ou de C, les arguments u, v et $-u$, $-v$ qui correspondent à un même point; C est donc une courbe *univoque*, c'est-à-dire que son équation, sur la surface de Kummer, s'obtient en annulant une fonction thêta, de u et v, qui n'est ni paire, ni impaire.

18. Soient maintenant u' et v' deux intégrales abéliennes de première espèce, appartenant à C' (ou, ce qui revient au même, à C), et formant un système normal, c'est-à-dire ayant des couples de périodes du type $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ'); en un point de C, u' et v' prennent des valeurs qui diffèrent entre elles d'une période, et cette période peutêtre *quelconque*. Comme C est de genre *deux*, u et v sont, le long de cette courbe, linéaires en u' et v' :

$$u = \lambda u' + \mu v'; \qquad v = \lambda' u' + \mu' v'. \tag{6}$$

D'ailleurs, en un point de C, u et v prennent des valeurs qui diffèrent entre elles d'une période dérivée des périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') liées aux arguments u et v sur la surface de Kummer; il en résulte que, u' et v' augmentant d'une *quelconque* de leurs périodes, u et v, définis par (6), augmentent d'une des leurs. Par suite (n° 12), les équations (6) établissent une *transformation* entre les fonctions abéliennes de u, v, aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), et les fonctions abéliennes de u', v', aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ').

Si la transformation est ordinaire, ce qui est le cas certain pour des fonctions abéliennes non singulières, soit n son ordre; $\Theta(u, v)$ étant le premier membre de l'équation de C sur la surface de Kummer, on a, comme au n° 13,

$$\Theta(u, v) = e^{P(u', v')} \mathfrak{S}(u', v') \mathfrak{S}(u' + \alpha_2, v' + \beta_2) \ldots \mathfrak{S}(u' + \alpha_{n^2}, v' + \beta_{n^2}), \tag{7}$$

d'où l'on conclut encore que n est égal à l'ordre, p, de la fonction thêta $\Theta(u, v)$.

Dans cette équation, $\mathfrak{S}(u', v')$ désigne, comme au n° 13, une fonction thêta d'ordre un, aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ'); mais cette fonction n'est plus paire ou impaire, parce que $\Theta(u, v)$ ne l'est pas.

Le degré de la courbe C est d'ailleurs égal à $4p$, car le nombre des zéros communs à $\Theta(u, v)$ et à une fonction thêta du second ordre est $4p$, et ces zéros ne sont pas deux à deux égaux et de signes contraires, puisque $\Theta(u, v)$ n'est ni paire ni impaire.

19. Complétons ces résultats par une interprétation géométrique.

Soient K la surface de Kummer initiale sur laquelle est tracée C, et K′ une surface analogue définie de la même manière à l'aide des fonctions abéliennes en u' et v'. En vertu de (6), à un point u', v' de K′ répond un seul point u, v de K, et à un point de K répondent p^2 points de K′, puisque la transformation (6) est d'ordre p. Quand le point u, v décrit sur K la courbe C, l'équation (7) montre que les p^2 points u', v' correspondants décrivent, sur K′, les p^2 courbes distinctes

$$\vartheta(u', v') = 0, \qquad \vartheta(u' + \alpha_2, v' + \beta_2) = 0, \qquad \ldots,$$

dont chacune, dès lors, correspond à C *point par point*. D'ailleurs, la courbe $\vartheta(u', v') = 0$, où $\vartheta(u', v')$ est une fonction thêta d'ordre *un*, ni paire ni impaire, est la section de K′ par un plan tangent, et a pour modules les modules mêmes des fonctions abéliennes liées à K′ (¹).

Observons encore qu'en désignant par α et β deux constantes, la courbe définie sur K par l'équation $\Theta(u + \alpha, v + \beta) = 0$ correspond évidemment point par point à $\Theta(u, v) = 0$; c'est donc une courbe de même genre (*deux*) et de mêmes modules que C; elle est aussi de même degré, $4p$.

Enfin, chacune des courbes $\Theta(u + \alpha, v + \beta) = 0$, y compris C, est l'intersection complète de la surface K avec une surface d'ordre p (²); en général, une telle intersection est de genre $2p^2 + 1$ et, pour qu'elle soit de genre *deux*, il faut qu'elle admette $2p^2 - 1$ points doubles (ou des points multiples d'ordre supérieur en nombre équivalent); la surface d'ordre p touchera donc la surface de Kummer en $2p^2 - 1$ points.

20. On peut donc énoncer ce résultat :

Soit, sur une surface de Kummer, une courbe de genre deux *ne passant*

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. IX, p. 112.
(²) *Ibid.*, t. IX, p. 155.

par aucun des seize points doubles : cette courbe est de degré $4p$; *elle appartient à un groupe doublement infini de courbes de même degré, de même genre et de mêmes modules, également tracées sur la surface et ne passant par aucun point double. Chacune de ces courbes, y compris la proposée, est l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre* p, *qui la touche en* $2p^2 - 1$ *points; ses modules sont ceux de fonctions abéliennes liées, par une transformation d'ordre* p, *à celles qui définissent la surface primitive.*

Réciproquement : *Toute surface d'ordre* p *touchant la surface de Kummer en* $2p^2 - 1$ *points et ne passant par aucun de ses seize points doubles, la coupe suivant une courbe de degré* $4p$ *et de genre* deux, *dont les modules jouissent de la propriété précédente.*

Une autre réciproque, à peu près évidente, est celle-ci :

Soient K *et* K′ *deux surfaces de Kummer transformées l'une de l'autre par une transformation ordinaire d'ordre* p, *c'est-à-dire telles qu'à un point de* K′ *réponde un point de* K *et, à un point de* K, p^2 *points de* K′ : *aux sections de* K′ *par ses plans tangents correspondent, point par point, sur* K, *des courbes d'ordre* $4p$, *de genre* deux, *ayant toutes pour modules ceux des fonctions abéliennes qui définissent la surface* K′.

21. De cet ensemble de propositions résulte le théorème général :

Les surfaces d'ordre p *qui touchent une surface de Kummer en* $2p^2 - 1$ *points, c'est-à-dire la coupent suivant des courbes de genre* deux, *et qui ne passent par aucun des seize points singuliers, se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations ordinaires, non équivalentes, d'ordre* p; *chaque groupe est lié à une de ces transformations.*

Les surfaces d'un groupe sont en nombre doublement infini et coupent la surface de Kummer proposée suivant des courbes de degré $4p$ *et de genre* deux *qui ont les mêmes modules : ces modules sont ceux des fonctions abéliennes transformées, par la transformation qui correspond au groupe, des fonctions abéliennes liées à la surface de Kummer initiale.*

On ainsi une représentation géométrique très simple des transformations d'un ordre donné et des équations modulaires correspondantes.

Par exemple, si p est premier, il y a $1 + p + p^2 + p^3$ transformations non équivalentes d'ordre p (Hermite); nous aurons donc ce même

nombre pour nos groupes de surfaces d'ordre p. Ainsi, il y a quarante groupes de surfaces du troisième ordre touchant chacune la surface de Kummer en dix-sept points; quinze groupes de quadriques tangentes en sept points, etc.

22. On peut rattacher à cette théorie les résultats donnés plus haut (n° 14) à propos de certaines courbes unicursales.

Reprenons les deux surfaces de Kummer K et K′ introduites tout à l'heure : aux sections de K′ par ses plans tangents correspondaient point par point, sur K, des courbes de genre *deux* et de degré $4p$. Si $\mathfrak{I}(u', v') = 0$ est l'équation d'une des sections considérées sur K′, et si $\Theta(u, v) = 0$ est celle de la courbe correspondante sur K, on a (7)

$$\Theta(u, v) = e^{P(u',v')}\mathfrak{I}(u', v')\mathfrak{I}(u'+\alpha_2, v'+\beta_2), \quad \ldots, \quad \mathfrak{I}(u'+\alpha_{p^2}, v'+\beta_{p^2}).$$

Parmi les sections de K′ par ses plans tangents figurent les seize coniques de cette surface; soit $\mathfrak{I}_0(u', v') = 0$ l'une d'elles. La fonction $\mathfrak{I}_0(u', v')$ est un des seize thêtas normaux d'ordre *un;* elle est paire ou impaire. On en déduit immédiatement que la fonction $\Theta(u, v)$ correspondante, que je désignerai par $\Theta_0(u, v)$ est aussi paire ou impaire; de plus, $\mathfrak{I}_0(u', v')$ s'annule pour six demi-périodes de u', v'; d'où l'on conclut que $\Theta_0(u, v)$ s'annule six fois pour des demi-périodes de u, v. Plus exactement, la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a six branches simples en des points doubles de K. Cette courbe est d'ailleurs de degré $2p$, au lieu de $4p$, à cause de la parité ou de l'imparité de $\Theta_0(u, v)$; elle est unicursale, puisqu'elle répond point par point à la conique $\mathfrak{I}_0(u', v') = 0$.

23. Réciproquement, toute unicursale de degré $2p$, tracée sur K, et présentant en tout six branches simples aux points doubles de cette surface, appartient, comptée deux fois, à un des *groupes* de courbes de genre *deux* et d'ordre $4p$ rencontrés tout à l'heure. Car si $\Theta_0(u, v) = 0$ est son équation, je dis que les courbes

$$\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$$

sont de degré $4p$ et de genre *deux*.

1° Elles sont d'un degré double du degré de $\Theta_0(u, v) = 0$, car la fonction $\Theta_0(u, v)$ est nécessairement paire ou impaire (n° 13) et la fonc-

tion $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)$ n'a plus cette propriété, tout en ayant, comme fonction thêta, le même ordre que la précédente.

2° Elles sont de genre *deux*, car on peut établir entre les courbes $\Theta_0(U, V)=0$ et $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)=0$ la correspondance

$$U=u+\alpha, \qquad V=v+\beta,$$

qui à un point u, v ne fait correspondre qu'un point U, V, et à un point U, V fait correspondre les deux points $u=\varepsilon U-\alpha$, $v=\varepsilon V-\beta$, ε désignant ± 1. D'ailleurs, ces deux derniers points ne coïncident que si U, V est une demi-période, ce qui se présente en tout six fois, puisque la courbe $\Theta_0(U, V)=0$ n'a que six branches simples aux points doubles de K : le genre ρ de la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)=0$ s'obtient dès lors par la formule de M. Zeuthen sur les genres de deux courbes correspondantes, ce qui donne ici

$$2(\rho-1)=2.2.(0-1)+6, \qquad \text{d'où} \qquad \rho=2.$$

24. Il résulte de là et du théorème du n° 14 que, pour obtenir les modules de toutes les fonctions abéliennes liées, par une transformation d'ordre p, aux fonctions abéliennes qui définissent une surface de Kummer donnée K, on pourra procéder ainsi : on cherchera à déterminer sur K les unicursales d'ordre $2p$ qui présentent en tout six branches simples aux points doubles de la surface ; ces courbes se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations non équivalentes d'ordre p. Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ sont les valeurs du paramètre unicursal qui correspond, sur une des courbes, aux six branches simples passant par des points doubles, le radical $\sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$ donnera naissance (n° 14) à des fonctions abéliennes liées aux fonctions primitives par une transformation d'ordre p.

Transformations d'ordre trois.

25. Pour les transformations du troisième ordre, on doit, d'après ce qui précède, chercher les courbes unicursales de degré *six* ayant en tout six branches simples aux points singuliers. Or (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 42), les courbes d'ordre *six* se divisent en deux grandes classes : celles de la première passent simplement par

six points doubles, celles de la seconde par dix. Les premières sont donc seules admissibles. Elles se répartissent (*ibid.*) en seize familles, quadruplement infinies chacune, et qui sont transformées l'une de l'autre par une des quinze transformations homographiques de la surface en elle-même $\left(\text{ces transformations font répondre à un point } u, v \text{ le point } u + \frac{1}{2} \text{ période}, v + \frac{1}{2} \text{ période}\right)$. Il suffit donc de considérer une des seize familles : les courbes correspondantes sont (*ibid.*) les intersections de la surface de Kummer K avec des quadriques menées par une des seize coniques, γ. Une pareille courbe est, en général, de genre *quatre* (*ibid.*, p. 141); pour qu'elle soit unicursale, il faut qu'elle ait quatre points doubles, distincts des points singuliers de K, puisqu'en ces derniers points il ne peut y avoir, en tout, que six branches simples. Ainsi, tout revient à déterminer, parmi les quadriques en nombre quatre fois infini qui passent par la conique γ, celles qui touchent la surface de Kummer en quatre points (simples). Il y en a en tout quarante, puisqu'il y a quarante transformations non équivalentes d'ordre *trois* (n[os] 21, 24). En projetant la figure à partir d'un des points doubles de K, non situés sur γ, on arrive sans difficulté à ce résultat [1] :

Soient ABC *et* A'B'C' *deux triangles circonscrits à une même conique; désignons par* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *les arguments des six côtés considérés comme tangents à la conique.*

Il y a quarante courbes unicursales du sixième ordre passant par les sommets des deux triangles et en outre bitangentes aux six côtés; si $\xi_1, \ldots, \xi_6$ *sont les arguments unicursaux qui répondent aux six sommets sur une de ces courbes, les fonctions abéliennes des deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$$

sont liées par une transformation du troisième ordre.

On obtient ainsi les quarante transformations non équivalentes de cet ordre.

Transformations d'ordre deux.

26. Les courbes d'ordre quatre, sur la surface de Kummer ordinaire,

---

[1] *Voir*, à ce sujet, notre Mémoire *Sur les fonctions abéliennes singulières* (ce Journal, 5[e] série, t. V, p. 342-344).

sont les sections planes et des biquadratiques dont chacune passe par *huit* points doubles (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 79). Les quartiques ayant *six* branches simples en des points singuliers ne peuvent donc appartenir qu'à la catégorie des sections planes; et ce seront nécessairement les sections faites par des plans contenant trois points doubles. On doit rejeter les seize coniques qui sont d'ordre deux et non d'ordre quatre; or il y a en tout $\frac{1}{6}\,16 \times 15 \times 14$ plans menés par trois des seize points doubles; parmi eux figure chacun de seize plans singuliers compté $\frac{1}{6}\,6 \times 5 \times 4$ fois, puisqu'il contient six points doubles; il reste donc $\frac{1}{6}\,16\,[15 \times 14 - 6 \times 5 \times 4]$, ou 240 plans non singuliers contenant trois points doubles chacun. D'ailleurs, ces plans sont transformés les uns des autres par les quinze transformations homographiques de la surface en elle-même, de sorte qu'il n'y a à considérer que 240 : 16, c'est-à-dire quinze, d'entre eux. Ce nombre de quinze est, comme cela devait être, celui des transformations non équivalentes du second ordre. Ainsi :

Soient K *une surface de Kummer et* A_1, A_2, A_3 *trois de ses points doubles non situés dans un même plan singulier; la section de* K *par le plan* A_1, A_2, A_3 *est une quartique unicursale, admettant* A_1, A_2 *et* A_3 *comme points doubles : les six arguments de ces points sur l'unicursale sont les racines d'un polynome du sixième ordre dont la racine carrée donne naissance à des fonctions abéliennes liées, par une transformation quadratique, à celles dont dépend la surface de Kummer proposée.*

27. On peut donner à ce résultat une forme bien autrement élégante.

Observons d'abord qu'en vertu des propriétés générales de la surface de Kummer, il existe un point double A_0 de cette surface, tel que le tétraèdre $A_0A_1A_2A_3$ n'admette pour face aucun plan singulier de K. Dès lors, les six plans singuliers qui contiennent le point A_0 passent, deux par deux, par les trois droites A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, et coupent le plan $A_1A_2A_3$ suivant six droites tangentes à une même conique (τ), qui est la section du cône des tangentes à la surface K en A_0. Les rapports anharmoniques des six droites précédentes quatre à quatre sont, d'ailleurs, comme on sait, les modules de K, c'est-à-dire ceux des fonctions abéliennes liées à cette surface.

Cela posé, prenons, dans le plan $A_1A_2A_3$, le triangle $A_1A_2A_3$, pour triangle de référence, $xyz=0$; la quartique unicursale considérée plus haut, admettant A_1, A_2 et A_3 comme points doubles, est la transformée d'une conique (σ) par la substitution

$$x'=\frac{1}{x},\qquad y'=\frac{1}{y},\qquad z'=\frac{1}{z};$$

aux points A_1, A_2, A_3 considérés comme appartenant successivement aux branches de la quartique qui s'y croisent, correspondent les six points où la conique (σ) coupe les six côtés du triangle de référence. Ainsi, les modules des fonctions abéliennes, liées à celles qui définissent K par la transformation quadratique du théorème précédent, sont les rapports anharmoniques, quatre à quatre, des six points ou les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ coupent (σ).

D'un autre côté, nous avons dit tout à l'heure que les modules des fonctions abéliennes liées à K sont les rapports anharmoniques des six droites, tangentes à la conique (τ), suivant lesquelles le plan $A_1A_2A_3$ coupe les six plans singuliers menés par A_0 : ces six droites sont évidemment les six tangentes qu'on peut mener à la quartique unicursale envisagée, par les points A_1, A_2, A_3 ; on vérifie directement, par la Géométrie analytique, que leurs rapports anharmoniques quatre à quatre, sur la conique qu'elles touchent, sont les mêmes que ceux des six tangentes qu'on peut mener à la conique (σ) par A_1, A_2, A_3. Par conséquent :

Soit donné un radical $\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}$; marquons sur une conique quelconque (σ) les six points qui ont pour arguments unicursaux les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_6$ et joignons-les deux à deux par trois droites, de manière à former un triangle T *dont chaque côté contienne deux des six points et dont aucun sommet ne soit sur la conique. Il y a quinze pareils triangles.*

Prenons maintenant le triangle polaire de T *par rapport à la conique; soient $b_1, b_2, \ldots, b_6$ les arguments des six points où ses côtés coupent la courbe; les deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}\quad\text{et}\quad\sqrt{(x-b_1)\ldots(x-b_6)}$$

donnent naissance à deux systèmes de fonctions abéliennes liés l'un à l'autre par une transformation du second ordre.

Aux quinze triangles T *correspondent ainsi les quinze systèmes qui dérivent du système primitif par une transformation quadratique.*

28. Analytiquement, cette construction conduit au résultat suivant :

Les quinze transformations quadratiques des fonctions abéliennes dérivées du radical $\sqrt{x^6 + Ax^5 + \ldots + Ex + F}$ sont liées respectivement aux quinze décompositions du polynome sous le radical en trois facteurs du second degré.

Soit une de ces décompositions

$$(x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2)(x^2 + p_3 x + q_3);$$

le polynome du sixième ordre qui donne naissance aux fonctions abéliennes de la transformation correspondante est

$$\begin{aligned}&[x^2(p_2 - p_1) + x(q_2 - q_1) + p_1 q_2 - p_2 q_1]\\ \times &[x^2(p_3 - p_2) + x(q_3 - q_2) + p_2 q_3 - p_3 q_2]\\ \times &[x^2(p_1 - p_3) + x(q_1 - q_3) + p_3 q_1 - p_1 q_3].\end{aligned}$$

29. Terminons par quelques propositions relatives aux quadriques sept fois tangentes à la surface de Kummer. D'abord, en vertu de nos théorèmes généraux :

Il y a quinze groupes, doublement infini chacun, de quadriques touchant en sept points une surface de Kummer K *et ne passant par aucun des seize points singuliers de cette surface; les quadriques d'un même groupe coupent* K *suivant des courbes d'ordre huit, de genre deux, qui ont les mêmes modules; ces modules sont ceux d'un des quinze systèmes de fonctions abéliennes liées, par transformation quadratique, aux fonctions dont dépend la surface de Kummer proposée.*

Si $\Theta_0(u, v) = 0$ *est l'équation de la section faite sur* K *par un plan non singulier contenant trois points doubles de* K, *les courbes de genre deux ci-dessus, appartenant à un même groupe, sont données par l'équation* $\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$, *où* α *et* β *désignent deux constantes arbitraires.*

D'après cela, les courbes $\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$ ont *sept points doubles;* mais ces points doubles sont de deux espèces.

Quatre d'entre eux ont pour arguments les solutions communes aux deux équations $\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$, $\Theta_0(-u + \alpha, -v + \beta) = 0$: ces

solutions sont au nombre de 2.2.2, ou 8, puisque $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta du second ordre; comme elles sont deux à deux égales et de signe contraire, elles ne donnent bien que quatre points doubles de la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)=0$.

On obtient les *trois* autres points doubles comme il suit. Désignons par ω, ω' une des trois demi-périodes qui annulent (doublement) $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire les arguments u, v d'un des trois points singuliers de K que contient la section plane $\Theta_0(u, v)=0$: il est clair que le point d'arguments $\omega-\alpha$, $\omega'-\beta$ sera un point double sur la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)=0$. On trouve donc ainsi trois points doubles, dont les arguments diffèrent de demi-périodes, ce qui conduit à de nombreuses propriétés, faciles à énoncer, de ces groupes de trois points.

La courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)=0$ étant de genre deux est hyperelliptique et ses points sont, par suite, deux à deux conjugués. Si (u, v) est un de ces points, le conjugué est évidemment $(-2\alpha-u, -2\beta-v)$; les deux conjugués coïncident si $u+\alpha$, $v+\beta$ est une demi-période, ce qui ne se produit que pour les trois points doubles de la seconde espèce. Ces points, considérés comme appartenant successivement à chacune des deux branches de la courbe de genre deux qui s'y croisent, sont donc les six points de *diramation* de cette courbe.

TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS.

DEUXIÈME PARTIE.

SURFACE DE KUMMER.

TROISIÈME PARTIE.

SURFACES HYPERELLIPTIQUES GÉNÉRALES.

QUATRIÈME PARTIE.

SURFACES REPRÉSENTABLES POINT PAR POINT SUR LA SURFACE DE KUMMER.

SUR LES SURFACES DE KUMMER ELLIPTIQUES.

SUR UNE SURFACE DU SIXIÈME ORDRE LIÉE AUX FONCTIONS ABÉLIENNES DE GENRE TROIS.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIERES.

(Premier Mémoire.)

PREMIÈRE PARTIE.

DEUXIÈME PARTIE.

TROISIÈME PARTIE.

QUATRIÈME PARTIE.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES.

(Deuxième Mémoire.)

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

TROISIÈME PARTIE.

MULTIPLICATION COMPLEXE.

QUATRIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES EN ELLES-MÊMES.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES.

(Troisième Mémoire.)

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES SINGULIÈRES D'INVARIANTS HUIT, DOUZE ET CINQ.

SUR LA TRANSFORMATION ORDINAIRE DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus. (Chèques postaux : Paris 29323.)

CURIE. — **Œuvres de Pierre Curie**, publiées par les soins de la Société française de Physique. Avec une Préface de Mme Curie. In-8 (25 × 16) de XXII-621 pages, avec 118 figures et 3 planches dont un portrait.. 60 fr.

LAGRANGE. — **Œuvres complètes**, publiées par les soins de J.-A. Serret et G. Darboux, Membres de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. In-4 (28 × 23), avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet. (Ouvrage complet.)

La 1re Série comprend tous les Mémoires imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris,* ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément chacun...... 100 fr.

La 2e Série se compose de 7 Volumes, qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits, savoir :

Tome VIII : *Résolution des équations numériques*..... 60 fr.

Tome IX : *Théorie des fonctions analytiques*.......... 60 fr.

Tome X : *Leçons sur le calcul des fonctions*.......... 60 fr.

Tome XI : *Mécanique analytique,* avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux (Ire Partie)......................... 60 fr.

Tome XII : *Mécanique analytique,* avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux (IIe Partie)........................ 60 fr.

Tome XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert,* publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par Ludovic Lalanne........................... 60 fr.

Tome XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants :* publiée et annotée par Ludovic Lalanne, avec deux fac-similés........ 60 fr.

90777. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

GAUTHIER-VILL
et Cie
Prix : 20

Date Due

FORM 109			


240859